Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial

Gustavo Martínez-Sierra[1], **Pierre Francois Benoit Poirier**[2]

[1]Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - Unidad Legaria del Instituto Politécnico Nacional. Calzada Legaria #694 Col. Irrigación Del. Miguel Hidalgo, C. P. 11500, México, D. F.
[2]Facultad de Ingeniería Campus I, Universidad Autónoma de Chiapas. Blvd. Belisario Domínguez km 1081 Colonia Centro C. P. 29020. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

E-mail: gmartinezsierra@gmail.com

(Recibido el 10 de Abril de 2008, aceptado el 3 de Mayo de 2008)

Resumen
En el presente artículo se ofrecen resultados de una investigación sobre construcción del conocimiento desde el punto de vista de una *epistemología histórica* del producto vectorial. Nuestro hallazgo fundamental consiste, en nuestra opinión, en haber detectado que el concepto de producto vectorial puede ser interpretado como un concepto organizador, junto con el Análisis Vectorial, cuyo objetivo es dotar de economía al sistema simbólico cartesiano y favorecer una percepción geométrica de los modelos matemáticos.

Palabras clave: Epistemología-histórica, producto vectorial, análisis vectorial, cuaternión.

Abstract
This work presents a research about knowledge construction, from the point of view of a *historic-epistemology* of the vectorial product. Our main conclusion, in our opinion, to have detected that the concept of vectorial product concept can be interpreted like an organizer concept, joint the Vectorial Analysis, whose objective is to equip with economy to the Cartesian symbolic system and to favor a geometric perception of the mathematical models.

Keywords: Historic-epistemology, vectorial product, vectorial analysis, quaternion.

PACS: 01.40.gf, 01.65.+g, 02.10.Ud **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCION

Partimos de consideración, Poirier [1], de que la operación de "multiplicación" entre dos vectores carece de sentido para la mayoría de los estudiantes. Los estudiantes pueden - y saben - calcular las coordenadas del vector que resulte al efectuar el producto, pero la interpretación física o geométrica que subyace detrás de los cálculos no es claramente percibida. Es decir, que tal operación no se justifica ante el alumno, ve en ella solamente un algoritmo sin fundamentos reales. El producto de vectores (sea escalar o vectorial) difiere totalmente de la multiplicación aritmética o algebraica manejado por el alumno desde los primeros años de su vida escolar. Entre otros, implica operar con objetos de naturaleza distinta a la de los números reales; o, si invertimos la reflexión: ¿en qué se parece un vector a un número? ¿Pueden multiplicarse objetos que no son números "tradicionales"? En segundo lugar, la operación es anti-conmutativa y no admite la propiedad del inverso. Otra diferencia de índole conceptual importante es que el producto de dos vectores no nulos *puede* dar como resultado cero, mientras que en álgebra elemental, si ninguno de los factores de una multiplicación es cero, el resultado *tiene que ser* distinto de cero. Esas observaciones nos señalan que detrás de la similitud del vocablo y de la notación, el producto vectorial se aleja considerablemente de los esquemas proporcionados por la multiplicación usual.

Nuestra hipótesis es que las dificultades vinculadas con el aprendizaje del producto vectorial, y que le parecen inherentes, se originan en el *status epistemológico* de dicho concepto: el de formar parte de un sistema conceptual organizador, junto con el Análisis Vectorial, cuyo significado es el de dotar de economía al sistema simbólico cartesiano y el de favorecer una percepción geométrica de los modelos matemáticos.

De esta manera, el objetivo del presente trabajo es dar evidencia, de corte histórico-epistemológico, que apoya nuestra afirmación de que producto vectorial puede ser interpretado como concepto organizador, tomando como eje de análisis las líneas generales del debate que existió en torno al tránsito del sistema conceptual del cuaternión al del Análisis Vectorial.

II. HISTORIA, EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

Partimos de la idea de que uno de los objetivos de la didáctica de las ciencias es explicar cómo se construye conocimiento científico en situación escolar. De ahí nuestro interés en el estudio de los procesos de construcción de conocimiento y de los fenómenos que se suscitan al seno del *sistema didáctico* (el conocimiento, la institución-profesor y el alumno) y del contexto sociocultural que lo rodea. Nuestra aproximación sistémica, [2] y [3], permite tratar los fenómenos de *construcción* y de *difusión* del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del saber, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza.

En otras palabras, se considera que al menos cuatro grandes dimensiones interdependientes son las que condicionan/determinan la construcción y la difusión del conocimiento: las dimensiones cognitivas, didácticas, epistemológicas y sociales. Estas últimas condicionan/determinan, a su vez, las tres primeras. La *dimensión didáctica* atiende a aquellas circunstancias propias del funcionamiento de los diferentes sistemas didácticos y de enseñanza. La *dimensión cognitiva* se ocupa de las circunstancias que son relativas al funcionamiento y la actividad mental de las personas. La *dimensión epistemológica* se aboca a aquellas circunstancias *que* son propias de la naturaleza y significados del saber matemático. La *dimensión social* atiende a las circunstancias conformadas por las normativas y valoraciones sociales del saber y la manera en como éstas influyen en las demás dimensiones.

Un punto esencial de nuestro acercamiento consiste en *problematizar* el conocimiento. Desde nuestro punto de vista los conocimientos no son objetos que el profesor proporciona al alumno, el cual a su vez los recibe, si no que se les considera como objetos evolutivos y cambiantes en función del entorno sociocultural en donde tienen origen. Desde este punto de vista el conocimiento se vuelve la piedra angular del conjunto de relaciones didácticas que se tejan alrededor de la enseñanza de un concepto o un sistema conceptual. Entendemos, entonces, que los procesos didácticos no se resumen en una relación bilateral entre el docente y el estudiante o entre la enseñanza y el aprendizaje, sino que se establecen como producto de encuentros múltiples alrededor de y con el conocimiento.

Desde el punto de vista anterior, y de acuerdo con Artigue [4], el *análisis epistemológico* de un conocimiento de referencia es una tarea indispensable para el que busca comprender los fenómenos didácticos relativos a éste. Así, un *análisis histórico-epistemológico* tiene por objetivo entender su naturaleza, su significado y sentido al determinar las causas que posibilitaron su aparición, de identificar las diferentes etapas de su construcción en el ámbito científico, así como las condiciones de sus transformaciones sucesivas hasta llegar en el aula como objeto de enseñanza (esto dicho en el sentido de la transposición didáctica por Chevallard [5]). De ahí nuestro desplazamiento hacia la epistemología histórica para atender preguntas alrededor de procesos de construcción de conocimiento: ¿Cómo y por qué surge históricamente un conocimiento? ¿Cómo se vincula con los saberes ya existentes? ¿Cómo se integra en una estructura más amplia para a su vez propiciar nuevos descubrimientos?

Nuestra acepción de *epistemología histórica* se toma en el sentido de Bachelard [6]. Al respecto, Bachelard hace una distinción entre el trabajo del historiador de la ciencia y el del epistemólogo: mientras el primero debe considerar las ideas como hechos, el segundo debe considerar los hechos como ideas e insertarlos en un sistema de pensamiento. *"Un fait mal interprété par une époque reste un fait pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue, un obstacle ou une contre pensée"* [6].

No sobra señalar que las situaciones de desarrollo histórico de un concepto no son directamente transferibles al salón de clase. En primer lugar, está el factor del tiempo: no se puede recrear en unas horas o unos semestres una génesis que, históricamente, se extiende sobre varias decenas de años y hasta varios siglos. Luego están presentes las restricciones cognitivas: la organización del saber que se enseña no sigue en su conjunto la progresión histórica del saber erudito. Por fin, las diferencias en los aspectos sociales, psicológicos e institucionales son tales que la construcción escolar que se realiza en el salón de clase no puede presentar sino una semejanza alejada con el proceso histórico. En realidad, lo que se busca en el análisis histórico, no es tanto la enumeración y la definición del papel de las diferentes etapas de la evolución de un concepto, sino la determinación de las condiciones que permiten pasar de una etapa a otra o, al contrario, determinar los aspectos que actuaron como obstáculo en este pasaje.

III. UNA EPISTEMOLOGÍA HISTÓRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

La génesis del producto vectorial es inseparable, y al mismo tiempo explicativa, de la aparición del Análisis Vectorial. Según Crowe [7], esta creación corresponde, por lo menos en sus inicios, al encuentro entre dos tradiciones matemáticas. La primera concierne la noción de número y cantidad y su desarrollo a través de la historia, desde los naturales a los irracionales transcendentales, pasando por la inclusión de los complejos y de los "hipercomplejos", así como de las operaciones algebraicas que permiten trabajar con esos números. La segunda consiste en la búsqueda de la representación de la realidad física por medio de conceptos matemáticos. Para Dorier [8], el análisis vectorial nace de "*une profonde réflexion dialectique entre intuition géometrique et calcul algébrique*".

En el marco de lo señalado anteriormente, el análisis histórico-epistemológico que desarrollamos nos permite dar cuenta tres etapas que históricamente corresponden a una epistemología del producto vectorial: 1) Hamilton y los cuaterniones, 2) La defensa y crítica del cálculo de cuaterniones, y 3) Del cuaternión al análisis vectorial moderno. A continuación los detalles del análisis.

A. Hamilton y los cuaterniones

A partir del éxito de la representación geométrica de los números complejos, que posibilitan en cierta medida un Cálculo geométrico en el plano, lo que busca Hamilton es extender esta idea, eso es, busca una manera de modelar matemáticamente los fenómenos observados en el mundo tridimensional que sea más intuitiva que el análisis cartesiano. En este sentido, su motivación inicial no está muy alejada de aquellos que utilizaron la ley del paralelogramo para sumar cantidades vectoriales. Aunque después Hamilton se encierre en la construcción de un sistema puramente matemático, podemos decir que el cuaternión nace indirectamente de la voluntad de una interpretación matemática del mundo real. Dos obstáculos se pusieron en su camino: el primero, y claro está que Hamilton no podía saberlo, es que no existe álgebra de números tridimensional, sino de hipercomplejos cuadridimensional. El segundo es el principio de permanencia que tuvo que rebasar para admitir una multiplicación no conmutativa. El resultado de su investigación es el cuaternión, objeto híbrido con una parte escalar y una parte vectorial geométrica. La presencia junta de estas dos partes dificulta considerablemente la interpretación de este número.

La expresión matemática que corresponde a lo que actualmente conocemos como producto vectorial y que encontramos en la parte vectorial del cuaternión resultante de la multiplicación de dos vectores no surge por azar, sino que aparece como consecuencia lógica de una operación algebraica definida entre números cuadridimensionales. Lo que norma el modo operativo son las "fórmulas fundamentales", son ellas que al ser activadas producen el resultado mencionado. En otros términos, la parte imaginaria, o vectorial, del cuaternión producto se desprende de leyes que el mismo Hamilton definió para que pueda funcionar su sistema.

A.1 El descubrimiento de los cuaterniones

El primer artículo de Hamilton cuyo tema es puramente matemático apareció en 1833. En él, establece una correspondencia entre números complejos y pares ordenados de reales. Esa idea será para él un leitmotiv y aparece regularmente en sus artículos mientras desarrolla su teoría de las funciones conjugadas, o de los pares algebraicos. Así, en 1837, Hamilton [9] escribe: "*In the theory of single numbers, the symbol* $\sqrt{-1}$ *is absurd, and denotes an impossible extraction, or a merely imaginary number; but in the theory of couples, the same symbol* $\sqrt{-1}$ *is significant, and denotes a possible extraction, or a real couple, namely (...) the principal square root of the couple (-1, 0). Therefore, (...) for any couple* (a_1, a_2) *whatever,* $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$ *.*"

Su centro de interés en los años que siguen se enfoca en la búsqueda de una generalización de los principios descritos en el artículo al espacio de dimensión 3, es decir a una "*theory of triplets*". Su acercamiento a la problemática es múltiple: a veces lo estudia bajo el ángulo algebraico, a veces desde un punto de vista geométrico. Es esta última aproximación, al examinar las propiedades geométricas de la multiplicación de los números complejos, que le va a proporcionar la clave para su descubrimiento de los cuaterniones.

La multiplicación entre dos números complejos se basa sobre el producto de las longitudes de cada vector y el ángulo que forman entre ellos. Hamilton, al querer extender esas ideas al espacio tridimensional, se da cuenta que la consideración del ángulo entre los vectores no es suficiente, sino que hay que tomar en cuenta también el plano en el cual se inscribe el ángulo, es decir la rotación que permite obtener una dirección a partir de la otra. Ahora bien, una rotación en el espacio esta determinada por un ángulo de naturaleza unidimensional y una dirección de naturaleza bidimensional. Dicho de otro modo, mientras que en el plano complejo, la multiplicación requiere de la longitud (objeto unidimensional) y de un ángulo, o sea un total de dos dimensiones, la multiplicación en el espacio necesita de cuatro dimensiones, tres procedentes de la rotación y una debida a la longitud. Ese análisis va llevar a Hamilton a abandonar progresivamente la idea de construir un "cálculo geométrico" basándose en la noción de terna, pues se convence poco a poco que el elemento que permitirá dicha construcción es el cuádruplo.

Además, la composición de dos rotaciones en el espacio no es conmutativa, al contrario de lo que ocurre en la geometría plana. De hecho, se sabía desde hace mucho tiempo que la función resultante de la composición de dos funciones no es la misma según el orden de composición. No constituye por lo tanto un ejemplo de no conmutatividad, no se viola el principio de permanencia. Sin embargo, la consideración de la rotación en una operación algebraica conduce finalmente a la renuncia a la conmutatividad en el producto de los cuádruplos.

La teoría de los cuaterniones, nombre dado por Hamilton a sus números cuatro-dimensionales, se publica en 1844. Con este sistema, se crea un cálculo que respeta el conjunto de reglas prescritas por el principio de permanencia con la sola excepción de la conmutatividad de la multiplicación. Es de notar en particular que la asociatividad de la multiplicación o la inambigüedad de la división son mantenidas. Pronto, las aplicaciones del cuaternión en física darán otra justificación, saber en cuanto a la utilidad, a la aparición de tal cálculo como "cálculo geométrico".

A.2 Los cuaterniones

Los cuaterniones son números hipercomplejos que se escriben bajo la forma, $q = w + ix + jy + kz$, en dónde w, x, y, y z son números reales. Hamilton [11] escribe "*has been induced to call the trinomial expression itself, as well as the line which it represents, a vector*." Por lo tanto, contienen dos partes distintas: el primer término, w, llamado escalar, y una parte imaginaria $ix + jy + kz$, que puede representarse como un segmento con una dirección en el espacio. Hamilton [10] escribe que i, j, k son "*a* *system of three different imaginary quantities*" dirigidos a lo largo de los ejes *x, y, z* respectivamente. Además, esas unidades obedecen a las "fórmulas fundamentales": $i^2 = j^2 = k^2 = -ijk = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ik = -ki = j$.

Hamilton está consciente de la dificultad de dar una interpretación geométrica a la parte escalar del cuaternión, mientras que la parte vectorial (o imaginaria) puede ser representada fácilmente. Pues, al contrario de lo que pasa con los números complejos, no indica una distancia con respecto a un eje de rotación. Escribe [11], en un artículo mandado a la Academia Real Irlandesa, en 1844: "*A quaternion may thus be said to consist generally of a real part and a vector. The fixing a special attention on this last part, or element, of a quaternion, by giving it a special name, and denoting it in many calculations by a single and special sign, appears to the author to have been an improvement in his method of dealing with the subject (...) Regarded from a geometrical point of view, this algebraically imaginary part of a quaternion has thus so natural and simple a signification or representation in space, that the difficulty is transferred to the algebraically real part; and we are tempted to ask what this last can denote in geometry or what in space might have suggested it*."

La presencia de esta parte real y su falta de significado constituye el eslabón débil de la teoría y es el punto que recibirá más críticas. El propio Hamilton siente que esas dos partes no tienen implícitamente el mismo estatuto, que son de naturaleza diferente, no solamente por la interpretación geométrica que posibilitan –o no–, sino también por las aplicaciones que permiten; por lo tanto establece la necesidad de hacer una distinción entre las dos partes del número, pues estima [12] que "*the separation of the real and imaginary parts of a quaternion is an operation of such frequency occurrence, and may be regarded as so fundamental in this theory*". Introduce la notación siguiente, para designar un cuaternión:

$$Q = Sca.Q + Vect.Q = S.Q + V.Q = SQ + VQ.$$

Y con el afán de ilustrar – al mismo tiempo que justificar – la utilización de esta simbología, propone aplicarla a la multiplicación de dos cuaterniones α y α' con parte real igual a 0, esto es, si tenemos $\alpha = xi + yj + zk$ y $\alpha' = x'i + y'j + z'k$, y tomando en cuenta las operaciones fundamentales, entonces:

$$S.\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz')\,;$$
$$V.\alpha\alpha' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - x'y)\,.$$

Constatamos que la parte real del cuaternión resultante es igual al opuesto del producto escalar actual, mientras que su parte imaginaria corresponde al producto vectorial moderno. Es decir que la multiplicación de estos vectores conlleva a los dos productos entre vectores que hoy en día se utilizan, y cuya interpretación física es conocida (trabajo de un fuerza, momento de una fuerza). De hecho, Hamilton y Tait utilizarán de manera recurrente esta escritura en casos en donde hoy se usaría el producto punto o el producto escalar. Por ejemplo, Hamilton demuestra que $V.\alpha\alpha'=0$ equivale al paralelismo de α y α'.

B. Defensa y crítica del cálculo de los cuaterniones

Al representar un objeto geométrico por un símbolo y operar sobre este símbolo, Hamilton marca en cierta medida el principio del análisis vectorial moderno. Sin embargo, queda el problema latente de la significación de la yuxtaposición en un mismo número de una parte real que no tiene interpretación geométrica con otra, la parte imaginaria, que sí tiene una. ¿Tiene que eliminarse entonces la parte real para sólo considerar la parte geométrica? ¿Cómo dar sentido a esa parte real? Ese tipo de preguntas son las que van a surgir con la difusión de la teoría de los cuaterniones, las que van a dirigir el debate acerca de su uso y dividir la comunidad científica, principalmente en Inglaterra. Numerosos científicos intervinieron en el debate, pero en el marco de nuestro trabajo, nos limitaremos a examinar el punto de vista de solamente algunos de ellos, los más representativos en cuanto a su acercamiento al incipiente análisis vectorial: P. G. Tait, quien es en cierta medida el continuador de la obra de Hamilton sobre los cuaterniones, J. Gibbs e Heavyside quienes crearon los métodos vectoriales modernos y J. C. Maxwell, quien por su crítica al cuaternión constituye un puente entre ellos.

B.1 Tait: el abogado de los cuaterniones

El principal defensor del uso de los cuaterniones es P.G. Tait y es él quien se va encargar de difundir el trabajo de Hamilton. En un libro intitulado *Elementary treatise on quaternion* [13], cuya primera edición es de 1867, desarrolla toda la teoría en vista de sus aplicaciones en física de una manera mucho más clara de lo que hacía Hamilton. El primer capítulo se llama *"vectors and their composition"*, es decir, se enfoca en el cuaternión sin su parte real. Trata de las operaciones elementales entre vectores (adición, multiplicación escalar, diferenciación de vectores con respecto a una variable escalar) y en este sentido, presenta muchas similitudes con el capítulo equivalente de un libro actual de cálculo vectorial. En el segundo capítulo, "*Productos y cociente de vectores*" explica los principios de la multiplicación de los cuaterniones. Establece, por ejemplo, que para dos cuaterniones α y β se tiene "$S\alpha\beta = S\beta\alpha$" y "$V\alpha\beta = -V\beta\alpha$" (lo que corresponde a la conmutatividad del producto escalar y la anti-conmutatividad del producto cruz respectivamente).

En los dos capítulos siguientes, demuestra propiedades de los cuaterniones. Podemos leer así $S\alpha\beta = -T\alpha T\beta\cos\theta$ y $V\alpha\beta = T\alpha T\beta sen\theta.\eta$ en donde T es el símbolo que indica la longitud del vector y η un vector unitario perpendicular a α y β. Luego, desarrolla aplicaciones de la teoría en el campo de la geometría y de la física notablemente a través el uso del operador ∇. Para dar un ejemplo, en la simbología utilizada por Tait el equilibrio de un sólido se escribe $\sum S\alpha\delta\beta = 0$.

Es claro que muchos de los elementos del análisis vectorial moderno están presentes en esta obra: suma vectorial, multiplicación escalar, producto punto y producto vectorial, propiedades de ∇, etc. Sin embargo, la forma de presentarlo, la necesidad de considerar únicamente una de las dos partes del cuaternión, sea la parte real o sea la parte imaginaria, la ausencia de representación geométrica de la parte real, el problema de dar una interpretación física a un número cuadri-dimensional dificultan el acceso a esa teoría. Por lo tanto, no es de extrañarse que otros científicos, como Maxwell, van a verter críticas a dicha teoría, reconociendo que si bien indica un camino interesante en búsqueda de un cálculo geométrico intrínseco, no es lo suficientemente satisfactoria en términos operativos y en cuanto a los significados que se puede dar a los dos partes del cuaternión reunidas en un mismo ente.

B.2 Maxwell: aceptación de los vectores, rechazo de los cuaterniones

En los preliminares de la segunda edición de *A Treatise of Electricity and Magnetism* de Maxwell [14] podemos leer "*But for many purposes in physical reasoning, as distinguished from calculation, it is desirable to avoid explicitly introducing the Cartesian coordinates and to fix the mind at once on a point of space instead of its three coordinates and on the magnitude and direction instead of its three components. This mode of contemplating geometrical and physical quantities is more primitive and more natural than the other, although the ideas connected with it did not receive their full development till Hamilton made the next great step in dealing with space, by the invention of his Calculus of Quaternions. (…) As the methods of Descartes are still the most familiar to students of science, and as they are really the most useful for purposes of calculations, we shall express all our results in the Cartesian form. I am convinced, however, that the introduction of the ideas, as distinguished from the operations and methods of Quaternions, will be of great use to us in the study of all parts of our subject, and especially in electrodynamics where we have to deal with a number of physical quantities, the relations of which to each other can be expressed far more simply by a few words of Hamilton's, than by the ordinary equations. (…) 11. One of the most important features of Hamilton's method is the division of quantities into Scalars and Vectors*".

Así, para Maxwell, lo importante en la teoría de los cuaterniones es la idea que representan, esto es, una concepción geométrica del cálculo, y no tanto los métodos utilizados para trabajar con ellos. Maxwell reivindica, para la física, el viejo deseo leibniziano de poder aprehender a un problema a través de su visualización geométrica y el poder operar directamente sobre la cantidad geométrica (dirección con longitud), haciendo abstracción de las coordenadas cartesianas. En este aspecto, con la creación de los vectores, el método de los cuaterniones propone un acercamiento que permite considerar la cantidad física en su globalidad durante los cálculos. Es de precisar que de ninguna manera constituye – así por lo menos lo percibe Maxwell – una herramienta para ahorrar el esfuerzo del pensamiento. Pero aunque significa un progreso en el sentido hacia un cálculo de situación, el método queda insatisfactorio en términos operativos y Maxwell prefiere proponer todas sus demostraciones por medio del cálculo cartesiano. Sin embargo, con el fin de ilustrar las ventajas que podría representar un cálculo intrínseco sobre cantidades vectoriales, no solamente en términos de medio para analizar y resolver un problema, sino también, más prosaicamente, en cuestión de simplificación de escritura, propone utilizar el lenguaje de los cuaterniones en algunos casos.

En la mayor parte de las veces, este uso se restringe a la transcripción del resultado obtenido por medio del análisis cartesiano en una forma vectorial, al final de una sección. Por ejemplo, en los últimos incisos de la parte preliminar, Maxwell [14] enuncia el teorema de Stokes de esta forma: "*Theorem IV: A line integral taken round a close curve may be expressed in terms of a surface integral taken over a surface bounded by the curve*". Sigue la demostración que lleva a la ecuación cartesiana:

$$\iint (l\xi + m\eta + n\varsigma)dS = \int (X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds})ds \cdot$$

Luego, introduce el operador ∇ y a través del uso de la notación de los cuaterniones, propone una nueva escritura de la ecuación anterior:

$$\iint S.\nabla\sigma Uvds = \int S.\sigma d\rho,$$

en donde *ds* es un elemento de superficie, $d\rho$ un elemento de longitud y Uv un vector unitario en la dirección normal.

Maxwell hace hincapié regularmente a lo largo del tratado (principalmente en el segundo tomo) sobre la utilidad de un acercamiento de índole geométrica en cuanto a la forma de abordar el problema y a la economía de escritura que este implica. Escribe [14], después de una demostración acerca de la fuerza de Ampère: "*The reasoning therefore may be presented in a much more condensed and appropriate form by the use of the ideas and language of the mathematical method specially adapted to the expressions of such geometrical relations – the Cuaternións of Hamilton*"

No es sorprendente, entonces, constatar que Maxwell utiliza ampliamente las cantidades vectoriales, por una parte para insistir sobre la naturaleza de la cantidad representada (caracterizada como teniendo una dirección espacial a partir de un punto dado, y una magnitud), por otra en un esfuerzo de abreviación. Así encontramos [14], en el cuerpo explicativo del texto, sentencias del tipo: "*The three vectors, the magnetization F, the magnetic force S and the magnetic induction B are connected by the vector equation: B = S+ 4πF*".

A pesar de las ventajas presentadas por un enfoque vectorial derivado de los cuaterniones, el manejo directo de este último conlleva dificultades intrínsecas; como las que aparecen en la última sección del capítulo "*General equations of the electromagnetic Field* ", la cual se intitula "*Quaternion Expressions for the Electromagnetic Equations*" y al principio de la cual Maxwell [14] reitera: "*In this treatise, we have endeavored to avoid any process demanding from the reader a knowledge of the Calculus of Quaternions. At the same time we have not scrupled to introduce the idea of a vector when it was necessary to do so*". A continuación rescribe todas las ecuaciones del electromagnetismo en una notación vectorial. Por ejemplo, las ecuaciones que definen las componentes (*a, b, c*) de la inducción magnética, dadas por:

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\ ,\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\ ,\ c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy},$$

se cambian en: B = *V* ∇ U en donde U representa el momento electromagnético "*and V indicate that the vector part of the result of this operation is to be taken*". La última frase es importante y representa en cierta forma la mayor crítica que Maxwell dirige al Cálculo desarrollado por Hamilton, eso es la existencia en la constitución del cuaternión de dos partes no homogéneas, una parte escalar y una parte vectorial (geométrica). De ahí su aceptación de las ideas vinculadas con esa teoría pero su rechazo de sus métodos de cálculo. De hecho, Maxwell utiliza de manera repetitiva la noción de vector, efectúa las operaciones básicas (suma, multiplicación escalar,...) pero nunca realiza una multiplicación completa en términos de cuaternión. Toma ya sea la parte escalar del producto, ya sea la parte vectorial, pero nunca considera el resultado en su globalidad.

Esta actitud se refleja también en su acercamiento al operador ∇ pues al considerar el producto $\nabla\sigma$, escribe [14]: "*The scalar part is:*

$$S\nabla\sigma = -(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} - \frac{dZ}{dz}),$$

and the vector part is:

$$V\nabla\sigma = i(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}) + j(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}) + k(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}),$$

para luego proponer llamarlas *convergencia* (hoy en día, esa operación se llama divergencia – término acuñado por William Clifford – y da como resultado el negativo de la convergencia de Maxwell) y *versión* de σ respectivamente, por la interpretación física que tienen estas dos operaciones. O sea que la parte real y la parte imaginaria de un cuaternión adquieren un sentido si se les considera de manera separada, pero no la yuxtaposición de los dos en un mismo ente matemático.

Como resumen de esta sección, podemos decir que la teoría de los cuaterniones constituye un paso intermedio entre un cálculo geométrico plano (representado por los complejos) y el análisis vectorial actual. Permite simplificar la escritura, permite en ciertas condiciones una interpretación geométrica del problema y su multiplicación desemboca en dos productos con sentido en física. Pero la presencia de dos partes en el mismo número dificulta el manejo directo del cuaternión. Así, Maxwell no duda en utilizar la notación vectorial en la medida que su uso no deja lugar a problemas de interpretación, eso es, cuando la ecuación es homogénea (suma de vectores, multiplicación escalar). Utilizando únicamente vectores, el problema proviene de la multiplicación, pues el producto de dos vectores da un cuaternión. Maxwell no rompe el estatuto de la multiplicación para trabajar con un álgebra de vectores estructurado por la existencia de dos productos. Sigue considerando esos dos productos como parte de un sólo producto general.

C. Del cuaternión al análisis vectorial moderno

C.1 La transición: Clifford

Al parecer, el primero en querer hacer la transición del análisis cuaterniónal al análisis vectorial es W. K. Clifford. En un texto intitulado *Elements of Dynamics* publicado en 1878, un año antes de su muerte, dedica una sección al producto de dos vectores¨. De acuerdo con Crowe [7] Clifford escribe: "*We are thus led to two different kinds of product of two vectors ab, ac; a vector product, which may be written V.ab.ac, and which is the area of the parallelogram of which they are two sides, being both regarded as steps; and a scalar product, which may be written S.ab.ac, and which is the volume traced out by an area represented by one, when made to take the step representind by the other*".

Para Clifford, el uso de métodos vectoriales en dinámica revela ser de gran interés aunque se da cuenta de que el producto de vectores en las formas definidas por la multiplicación de cuaterniones es de uso limitado. Prefiere entonces construir un álgebra de vectores –en cuanto a la multiplicación– sobre bases distintas. Así, las consideraciones que utiliza para establecer sus productos son geométricas. Al interpretar el área de un paralelogramo como generada por el movimiento de vector *ab* sobre un vector *ac*, define el producto vectorial, cuyo resultado es un vector de longitud (*ab.ac*)sen*bac* y cuya dirección depende del sentido de recorrido. Por otro lado, el examen de un volumen construido entorno de la translación de *ab* (el cual representa ahora una área) a lo largo de *ac*, determina el segundo producto, el producto escalar, como la magnitud (*ab.ac*)cos*bac*. Esas dos multiplicaciones son evidentemente equivalentes a las que se obtienen con el cuaternión (de hecho, no es totalmente un azar si la notaciones empleadas son similares), pero, y es la gran diferencia con Maxwell, Clifford se deshace del poco atrayente manejo del cuaternión para considerar los productos de dos vectores de manera separada, lo que no hacían los científicos anteriores quienes veían en ellos las dos partes de un mismo y único producto.

C.2 El nacimiento del análisis moderno

De acuerdo con Crowe [7] en una carta escrita en 1888 y destinada a Victor Schlegel, Gibbs explica las razones de su acercamiento al cálculo vectorial: "*I saw, that although the methods were called quaternionic the idea of the quaternion was quite foreign to the subject. In regard to the products of vectors, I saw that there were two important functions (or product) called the vector part &*

the scalar part of the product, but that the union of the two to form what was called the whole product did not advance the theory as an instrument of geom. investigation. Again with respect to the operator ∇ as supplied as a vector I saw that the vector part & the scalar part of the result represented important operations, but the union (generally to be separated afterwards) did not seem a valuable idea." Reconocemos aquí, expresada de manera explícita, los críticas que Maxwell dirigía hacia los métodos del cálculo de cuaternión, lo que no es sorprendente ya que Gibbs descubrió los cuaterniones a través de la lectura del *Treatise of Electricity and Magnetism*.

En 1881, se imprime el libro (en edición privada) *Elements of vector analysis*, el cual inicialmente estaba destinado por Gibbs a sus estudiantes. En él, ordena y presenta su cálculo vectorial. Al estudiar la composición del libro, uno no puede omitir notar el parecido con un libro de texto actual (por la menos en lo relevante a la teoría, pues el texto de Gibbs no presenta graficas ni propone ejercicios). El primero de los dos capítulos se intitula "*Concerning the algebra of vector*"; empieza con las definiciones de escalar, vector y análisis vectorial. Gibbs [15] propone entonces sus dos productos, el producto escalar (*direct product*) y el producto cruz (*skew product*). Este último está definido de la siguiente manera: "*14 Def.- The skew product of α and β (written αXβ) is a vector function of α and β. Its magnitude is obtained by multiplying the product of the magnitude of α and β by the sin of the angle made by their directions. Its direction is at right angles to α and β, and on that side of the plane containing α and β (supposed drown from a common origin) on which a rotation from α to β through an arc of less than 180° appears counter-clockwise*"

La definición es muy parecida a la que da Clifford, es decir en términos geométricos antes que cartesianos. Por lo demás, la notación utilizada sigue la tradición de la teoría del cuaternión: por ejemplo, los vectores son designados por medio de letras griegas, o por $\bar{A}\bar{B}$ (cuando Tait escribe AB). Las analogías con el primer capítulo del libro "Treatise on quaternions" de Tait son de hecho numerosas. Para ofrecer dos comparaciones, Gibbs escribe $\alpha\times\beta=-\beta\times\alpha$, o bien $\alpha\times[\beta\times\gamma]=(\alpha.\gamma)\beta-(\alpha\beta).\gamma$ cuando en Tait, las mismas propiedades se leen respectivamente: $V\alpha\beta=-V\beta\alpha$ y $V\alpha V\beta\gamma=\gamma S\alpha\beta-\beta S\alpha\gamma$.

El segundo capítulo Gibbs [15] desarrolla los métodos vectorial acerca del operador ∇. Tres años después, en 1884, Gibbs agrega dos capítulos a su libro, en los cuales se extiende sobre la noción de función vectorial. Desde nuestro punto de vista el mérito principal de Gibbs – en lo que se refiere al cálculo vectorial – reside ante todo en haber escogido una notación clara y significativa, sigue en vigor hoy en día. Su producto escalar por ejemplo corresponde a la suma de los productos de las componentes, lo que permite relacionarlo sin problema de interpretación con la noción de magnitud.

Así, como lo subraya Crowe [7], Gibbs tuvo la capacidad de percibir cuáles eran los ajustes en la teoría de los cuaterniones que se tenían que hacer para obtener un sistema de cálculo geométrico que no solamente sea coherente, sino más satisfactorio en su uso.

De manera independiente a Gibbs, Heaviside va a desarrollar un sistema vectorial idéntico al que se utiliza hoy en día, excepto por la notación. Temprano en sus escritos – a partir de 1882 – se pronuncia a favor de un acercamiento a la física (en particular al electromagnetismo) bajo la forma de la cantidades vectoriales. Pero rechaza la teoría del cuaternión, pues según Heaviside [16]: "*A quaternion is neither a scalar, nor a vector, but a sort of combination of both. It has no physical representatives, but is a highly abstract mathematical concept"*

El principal defecto de los quaterniones consiste en su ausencia de significado físico, problema ya señalado por Maxwell y Gibss (de acuerdo con Crowe [7]): "*Quaternionics was in its vectorial aspects antiphisical and unnatural, and did not harmonise with common scalar mathamaticas. So I dropped out the cuaternion altogether, and kept to pure scalars and vectors, using a very simple vectorial algebra in my papers from 1888 onward.*"

Heaviside, en sus primeros escritos utiliza su cálculo vectorial sin realmente presentarlo. De hecho, su introducción al vector se realiza por medio de la definición del rotacional, sin que sea necesario hablar de multiplicación de vectores. Por lo tanto, muchas de sus demostraciones quedan en forma cartesiana o son puramente cualitativas. En 1885, Heaviside define los productos vectoriales, por medio de consideraciones físicas sobre la inducción y la fuerza eléctrica. Escribe $C=V\varepsilon E$, lo que conocemos como $C=\varepsilon\times E$.

En otro artículo del mismo año, presenta –en dos páginas– su sistema vectorial, al definir la suma vectorial, el producto escalar, el producto vectorial y el operador ∇. Su notación es muy parecida a la que utilizaron Hamilton y Tait, por ejemplo representa el producto vectorial de la forma (en donde podemos observar la persistencia de la letra V para simbolizar la operación):

$$V\boldsymbol{AB} = i(A2B3 - B2A3) + j\,(A3B1 - B1A3) + k(A1B2 - B1A2) = -\,V\boldsymbol{BA}.$$

Al enterarse de los trabajos de Gibbs, Heaviside, si bien está de acuerdo con el enfoque vectorial propuesto, critica la notación utilizada por estimar la suya más sencilla. Heaviside será el primero en escribir las ecuaciones de Maxwell en la forma sintética con la cual se conocen hoy en día. En un artículo sobre los flujos de energía en los campos electromagnéticos publicado en 1892, Heaviside [17] resume su posición con respeto a su sistema vectorial de la manera siguiente: "*Its rests enterily upon a few definitions, and may be regarded (from one point of few) as a systematically abbreviated Cartesian method of investigation, and be understood and practically used by any one accustomed to Cartesians, without any study of the difficult science of Quaternions. It is simply the elements of quaternions without the quaternions, with the notation simplified to the uttermost, and with the very inconvenient minus sign before scalar products done away with*"

Las observaciones realizadas alrededor del trabajo de Gibbs pueden también aplicarse al de Heaviside. Su sistema vectorial no propone un método realmente novedoso, sino que se deriva de una simplificación de la teoría de los cuaterniones. Claro está que al igual que Gibbs, tuvo el mérito de reconocer en dónde y cómo se debía modificarla para obtener un sistema mucho más práctico.

Conviene agregar que la diferencia entre los sistemas presentados por Gibbs y Heaviside no se reduce a una cuestión de notación, sino en la dirección a donde llevan su creación. Físico ante todo, Heaviside desarrolla su sistema en función de lo que necesita y al aplicar su cálculo vectorial al campo de la electricidad y del magnetismo, ilustra de cierta manera la potencia de su acercamiento. Su sistema le interesa únicamente en vista de sus representaciones interpretativas en aplicaciones prácticas; de hecho, ellas son el origen de su creación como lo atestigua por ejemplo su primera presentación del producto vectorial. Por su lado, Gibbs tiene un acercamiento más formal que lo induce a realizar una presentación más estructurada de su sistema y lo conduce a buscar demostrar nuevos teoremas por medio del análisis vectorial. Esta perspectiva, que se tradujo por la realización de un opúsculo de vocación didáctica puede explicar por qué fue su sistema de notación y no el de Heaviside el que perduró hasta hoy.

IV. CONCLUSIONES

En este artículo, se ha presentado los resultados de un estudio que da cuenta de una epistemología histórica del producto vectorial. Éste estudio permite dar cuenta sobre tres etapas que históricamente corresponden a una epistemología del producto vectorial: 1) Hamilton y los cuaterniones, 2) La defensa y crítica del cálculo de cuaterniones, y 3) Del cuaternión al análisis vectorial moderno.

Con respecto a la primera etapa podemos concluir que la invención de los cuaterniones, atribuido a Hamilton, son el antecedente directo del producto vectorial; siendo éstos, en primera instancia, el intento por dotar a los vectores (o puntos) en el espacio de tres dimensiones de estructura multiplicativa. La segunda etapa, es caracterizada por la existencia de un debate entre la pertinencia de los cuaterniones como parte del sistema simbólico para representar los modelos matemáticos de tipo vectorial. Finalmente, la tercera etapa, se percibe la adaptación plena de la noción de producto vectorial admitiendo la pertinencia de aceptar dos tipos de producto: el escalar y el vectorial.

Es a partir del análisis de esta tercera etapa, en donde se desprende que *el producto vectorial puede ser interpretado como concepto organizador*, en el sentido de que el producto vectorial, junto con el Análisis Vectorial, tiene por objetivo el de dotar de economía al sistema simbólico cartesiano y el de favorecer una percepción geométrica de los modelos matemáticos.

En general, consideramos que nuestra investigación aporta evidencia para aumentar nuestro conocimiento respecto a la construcción histórica de los sistemas simbólicos matemáticos que son la base de nuestra interpretación de la realidad física.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Poirier, P., *Un acercamiento epistemológico al producto vectorial desde la perspectiva de la convención matemática* **(**Tesis de Maestría no publicada. *Universidad Autónoma de Chiapas*, México, 2007)

[2] Cantoral, R. & Farfán, R. M., *La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe*, Recherches en Didactique des Mathématiques **24**, 137 - 168 (2004).

[3] Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G., *Socioepistemología y representación: algunos ejemplos*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. (Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors)), 27 - 46, 2006).

[4] Artigue M., *Epistémologie et didactique*, Recherche en didactique des Mathématiques **10**, 241-286 (1991).

[5] Chevallard, Y., *La transposition didactique*, (Editions La pensée sauvage, Grenoble, 1991).

[6] Bachelard, G., *La formation de l'esprit scientifique*, (Vrin, Paris, 1938).

[7] Crowe, M. J., *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system.* (Dover Publications, Inc, USA, 1985).

[8] Dorier, J.–L., *Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre Linéaire. Perspectives théoriques sur leur interactions*, Les cahiers du laboratoire Leibniz N°12. Grenoble, IMAG, (2000).

[9] Hamilton, W. R., *Theory of conjugate functions, or Algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on Algebra as the science of pure Time*, Proceedings of the Royal Irish Academy, 293 – 422 (1837).

[10] Hamilton, W. R., *On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions*, Proceedings of the Royal Irish Academy **2,** 424-434 (1844).

[11] Hamilton, W. R., *On quaternions*, Proceedings of the Royal Irish Academy **3**, 1-16 (1847).

[12] Hamilton, W. R., *On quaternions*, *Philosophical magazine*, (London, 1844).

[13] Tait, P. G., *Traité élémentaire des quaternions (2 Vol.)*, (Gauthier-Villars Editeurs, Paris, 1882).

[14] Maxwell, J. C., *A treatise on electricity and magnetism*, (Oxford Press, London, 1873).

[15] Gibbs, J. W., *The scientific Papers of J. W. Gibbs*, (Dover Publications Inc., USA, 1961).

[16] Heaviside, O., *Electromagnetic theory (Vol. 1).* (reprint of 1893 ed.) (Nueva York, 1925).

[17] Heaviside O., *On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic fields*, Transactions of the royal society of London, 423-484 (1892).