

Medición de la excentricidad de la órbita terrestre



Osvaldo D. Pavioni, Federico M. Ortega

*Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro
de la Provincia de Buenos Aires, Av. Del Valle 5737, B7400JWI;
Olavarría, Buenos Aires, Argentina.*

E-mail: opavioni@fio.unicen.edu.ar

(Recibido el 3 de Marzo de 2009; aceptado el 7 de Mayo de 2009)

Resumen

En este trabajo se propone una manera de obtener el valor de un parámetro astronómico como lo es la excentricidad de la órbita terrestre. Usando las leyes de Kepler, elementos del cálculo diferencial y un instrumento de construcción sencilla, se obtienen resultados satisfactorios. Todo esto hace que el trabajo experimental propuesto pueda ser de interés para estudiantes de ciencias naturales o ciencias exactas.

Palabras clave: Órbita terrestre, excentricidad, solsticio, equinoccio.

Abstract

In this paper we propose a way to get the value of an astronomical parameter such as the eccentricity of Earth orbit. Using Kepler's laws, elements of differential calculus and an instrument of simple construction, satisfactory results are obtained. All this makes the experimental work proposed may be of interest to students of natural sciences or exact sciences.

Keywords: Earth orbit, eccentricity, solstice, equinox.

PACS: 01.50.My, 07.05.Fb, 95.90.+v

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Entre las causas que contribuyen a los cambios en el sistema climático terrestre frecuentemente se mencionan los factores externos que originan fluctuaciones en la radiación solar recibida. Entre esos factores los especialistas destacan las variaciones orbitales. La llamada teoría de Milancovitch (debida al astrofísico serbio Milutin Milancovitch, 1879 – 1958) da cuenta de ellas y es un intento de explicar su incidencia en el clima global. La correlación más fuerte observada por Milancovitch entre la variación climática y los parámetros orbitales se da en ciclos de aproximadamente 100000 años, coincidentes con las variaciones de la excentricidad de la órbita (e). Las órbitas de los planetas tienen valores de excentricidad $0 \leq e < 1$. Si $e = 0$ la órbita es una circunferencia perfecta, a medida que su valor crece, toma la forma de una elipse cada vez más achatada. En los últimos cinco millones de años el valor de la excentricidad de la órbita terrestre ha variado entre 0,000483 y 0,060791 [1]. Los efectos de retroalimentación de estos cambios en el clima de la Tierra aún no son comprendidos en su totalidad [1].

El calentamiento global es un tema de interés creciente en los últimos años. Si bien se lo considera originado en factores internos (antropogénicos); cuando se lo estudia en una perspectiva a largo plazo, no es posible ignorar los cambios debido a factores externos. La influencia de estos factores puede generar en los estudiantes interrogantes

acerca del valor actual de e y sobre la posibilidad de medirlo desde el punto de la superficie terrestre en que se hallan parados. El valor de la excentricidad actual puede hallarse en la bibliografía o, más fácil aún, realizando la búsqueda en Internet. Sin embargo un intento de medirlo tiene implicancias pedagógicas enriquecedoras que, por los aspectos que tal actividad involucra, pueden resultar de interés para estudiantes y docentes de las ciencias naturales.

La medición de un parámetro astronómico característico de la órbita terrestre, parece en principio una tarea compleja que requiere del uso de instrumentos sofisticados. Sin embargo, es posible obtener un valor de e con una buena aproximación, determinando únicamente la cantidad de días que transcurren entre el equinoccio de marzo y el equinoccio de septiembre (Te), entre el solsticio de junio y el solsticio de diciembre (Ts) y entre el equinoccio de marzo de un año y el del año siguiente (T). Para esto es necesaria la observación y el registro de la posición del punto en que asoma (o se esconde) el Sol en el horizonte.

II. ¿CÓMO DETERMINAR Te , Ts Y T ?

El punto en el que levanta el Sol en el horizonte (P en la figura 1) se desplaza día tras día efectuando un movimiento oscilatorio anual que tiene sus extremos en los

solsticios y el punto medio en los equinoccios. Este desplazamiento es notable en los días próximos a los equinoccios, mientras que en los días cercanos a los solsticios el cambio se hace menos evidente [2].

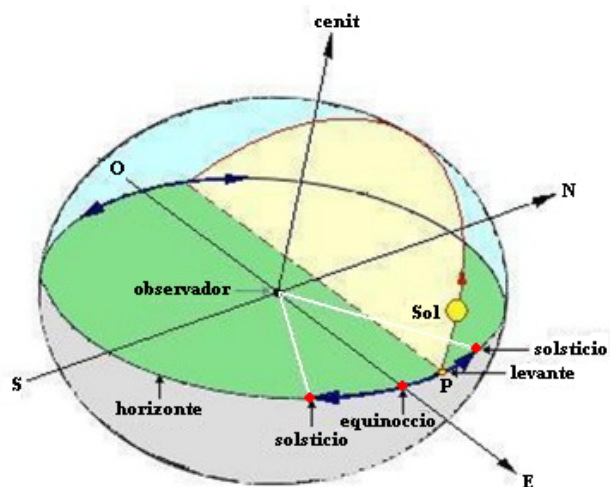


FIGURA 1. Desplazamiento del punto en que sale el Sol (flecha azul). En un año el punto P realiza una oscilación completa. El observador de la figura se halla en el hemisferio sur.

Para determinar en que días el Sol alcanza esas posiciones particulares, es necesario situarse en un lugar que tenga un horizonte despejado y aproximadamente plano y contar con un instrumento que permita medir ángulos (regla solsticial). Un instrumento así es posible fabricarlo con recursos disponibles en el taller o laboratorio de una escuela [3].



FIGURA 2. Regla solsticial situada en el Parque Astronómico La Punta, ciudad de La Punta, San Luis, Argentina [4].

Se debe elegir además un objeto de referencia fijo a tierra, de tal manera que pueda definirse un ángulo entre las visuales dirigidas hacia ese objeto y hacia el punto del levante (Fig. 3). Este ángulo debe quedar contenido en un plano paralelo al horizonte. Como se va a dirigir la visual directamente al sol es imprescindible el uso de protección para los ojos; por ejemplo, lentes como los usados por los soldadores.

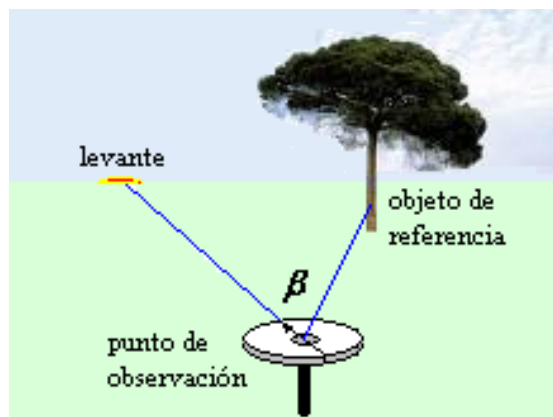


FIGURA 3. Ángulo entre la posición en que asoma el Sol y un objeto de referencia fijo al suelo.

Tanto las posiciones en el horizonte de los extremos de la oscilación, dadas como un ángulo respecto del objeto de referencia (β), como el instante t en los que éstos son alcanzados, aparecen en las coordenadas del máximo o mínimo que se obtiene cuando se representa gráficamente el ángulo β en función de t . En la Fig. 4 se muestran puntos obtenidos experimentalmente durante los días próximos al solsticio de Junio de 2007 y una curva de ajuste polinómica de segundo grado. En la escala temporal se tomó $t = 0$ a las 00:00 hs del día 1 de Enero (hora local). La diferencia entre el instante que corresponde al mínimo de la curva obtenida por nosotros y la ocurrencia del solsticio según los datos dados por el U.S. Naval Observatory [5], que se muestran en Tabla I, es de 5 horas y 15 minutos. La no uniformidad que se observa en la distribución temporal de los registros se debe a la imposibilidad de realizar mediciones en los días nublados o con niebla.

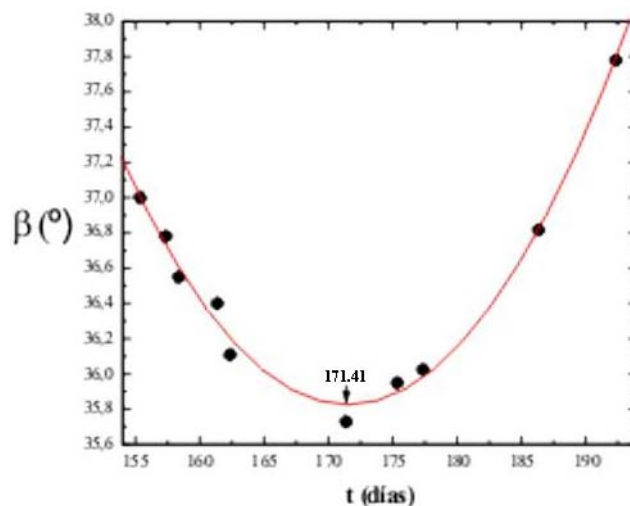


FIGURA 4. Medición del ángulo β en días próximos al solsticio de Junio de 2007.

Una vez conocidas las posiciones angulares en las que sale el Sol en los solsticios (β_1 y β_2), se determina el punto en el horizonte por el cual asoma el Sol en los equinoccios

haciendo $\beta_{1/2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$ (posición del punto cardinal

Este). La representación gráfica del ángulo β en función del tiempo en los días cercanos a los equinoccios se aproxima a la de una recta. Realizando entonces un ajuste lineal es posible determinar el instante en que $\beta = \beta_{1/2}$.

Los datos experimentales obtenidos por nosotros y que se muestran en la Fig. 5, dan un valor del instante en que ocurrió el equinoccio de Marzo de 2007 con una diferencia de 9 h y 7 minutos con respecto a lo que se indica en Tabla I.

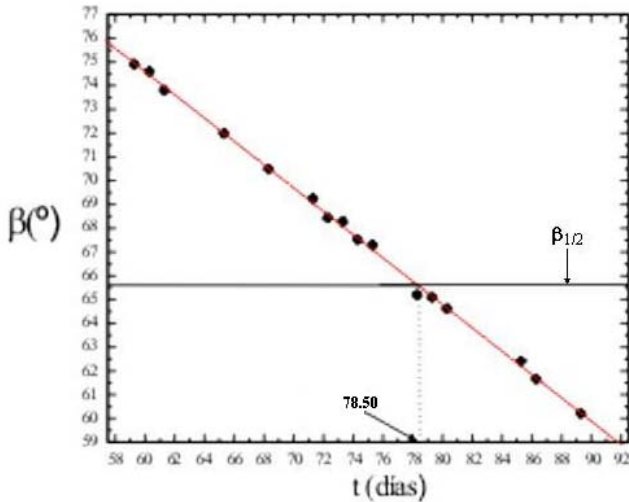


FIGURA 5. Medición del ángulo β en días próximos al equinoccio de Marzo de 2007.

Si t_M y t_S son las coordenadas temporales obtenidas para los equinoccios de Marzo y Septiembre respectivamente y t_J y t_D los instantes correspondientes a los Solsticios de Junio y Diciembre resulta $T_e = t_S - t_M$ y $T_s = t_D - t_J$. El período del movimiento se obtiene haciendo $T = t_M' - t_M$, donde t_M' es el instante en el que ocurre el solsticio de Marzo un año después de t_M . T recibe el nombre de año trópico o año solar.

III. ¿CÓMO OBTENER e A PARTIR DE T_e , T_s y T ?

Según la primera ley de Kepler, la Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol, estando éste en uno de los focos. Debido a la dirección que tiene el eje terrestre en el espacio, oblicuo a la eclíptica, los solsticios y equinoccios no coinciden con la posición de la Tierra en los extremos de los ejes de la elipse. El solsticio de junio ocurre antes que el afelio y el solsticio de diciembre antes que el perihelio. Esta situación varía secularmente debido a la precesión del eje terrestre; sin embargo este cambio en la orientación espacial del eje es tan lenta (aproximadamente $0^\circ 0' 50''$ por año) que, para el propósito de medir la excentricidad de la órbita, se la puede considerar constante en un año.

La ecuación en coordenadas polares (1) da el módulo del vector \vec{r} dirigido desde el centro del Sol hacia el

centro de la Tierra (distancia Sol – Tierra). En ella a es la longitud del semieje mayor de la elipse y e su excentricidad.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (1)$$

Es posible hallar el área A_e , barrida por \vec{r} cuando la Tierra viaja desde un equinoccio hasta el otro (Fig. 6), resolviendo la integral (2).

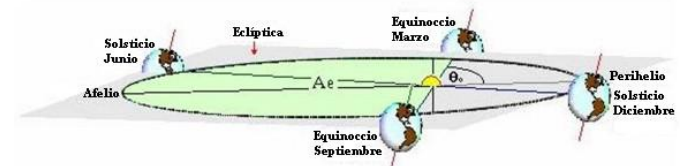


FIGURA 6. Área barrida por \vec{r} entre dos equinoccios. La excentricidad de la órbita se ha exagerado.

$$A_e = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} r^2 d\theta. \quad (2)$$

Una solución aproximada de (2) es:

$$A_e = \frac{1}{2} a^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} e^2 + 4 e \sin(\theta_0) \right). \quad (3)$$

Detalles del cálculo pueden verse en el apéndice.

De forma similar puede ser calculada el área A_s barrida por \vec{r} desde el solsticio de Junio hasta el solsticio de Diciembre (Fig. 6) efectuando la integral (2) entre $\theta_0 + \pi/2$ y $\theta_0 + 3\pi/2$. En este caso el resultado es (4).

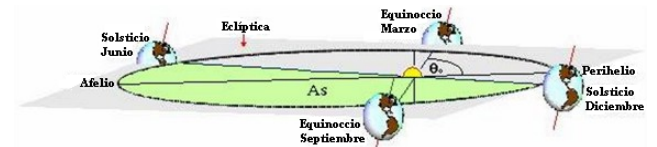


FIGURA 7. Área barrida por \vec{r} entre dos solsticios. La excentricidad de la órbita se ha exagerado.

$$A_s = \frac{1}{2} a^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} e^2 + 4 e \cos(\theta_0) \right). \quad (4)$$

El área total barrida en una vuelta completa, obtenida resolviendo (2) entre θ y 2π es (5).

$$A = a^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} e^2 \right). \quad (5)$$

Mediante recursos algebraicos se puede eliminar los parámetros desconocidos a y θ_0 (ver apéndice), y teniendo

en cuenta que, según la segunda ley de Kepler, las áreas barridas por \vec{r} son proporcionales a los tiempos empleados en hacerlo, puede obtenerse finalmente las ecuaciones (6) y (7) que serán usadas para el cálculo de e , siendo T_e , T_s y T los tiempos empleados en barrer las áreas A_e , A_s y A respectivamente.

$$K = \sqrt{\left(\frac{T_e}{T} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{T_s}{T} - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad (6)$$

$$e = \frac{1}{2} \pi K. \quad (7)$$

Para verificar el comportamiento de las ecuaciones (6) y (7) se puede efectuar el cálculo con datos de la Tabla I.

Tabla I. Fecha de solsticios y equinoccios en 2006 y 2007 [5].

		Mes	Día	Hora	Minuto (UT)
2006	Equinoccios	Mar.	20	18	26
		Sept.	23	04	03
	Solsticios	Jun.	21	12	26
		Dic.	22	00	22
2007	Equinoccios	Mar.	21	00	07
		Sept.	23	09	51
	Solsticios	Jun.	21	18	06
		Dic.	22	06	08

Tomando como origen para la medición del tiempo la hora 00:00 del 1 de Enero de 2006, y adoptando como unidad de medición el día, los equinoccios y solsticios de la Tabla I quedan ordenados como se muestra en la Fig. 8.

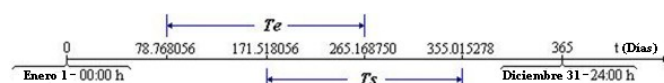


FIGURA 8. Ordenamiento de los instantes en que ocurrieron los equinoccios y solsticios en 2006.

Resultando $T_e = 186.400694$ días, $T_s = 183.497222$ días. Teniendo en cuenta que el equinoccio de Marzo del 2007 ocurrió el día 20 a las 00 h 07' UT resulta $T = 365.236805$ días.

El valor de excentricidad que se obtiene con (6) y (7) es $e = 0.016700$. Este resultado difiere en menos de 0.06% con el valor $e = 0.016710$ publicado por la NASA [6]. Esta diferencia muestra que los errores introducidos por las diversas aproximaciones realizadas para llegar a (6) y (7) no son significativos.

El calendario civil toma convencionalmente los días 21 de Marzo y de Septiembre como los días en que ocurren los equinoccios y 21 de Junio y de Diciembre los correspondientes a los solsticios. Suponiendo que ocurran justo al mediodía, se obtiene para años no bisieptos, $T_e = 184$ días, $T_s = 183$ días y $T = 365$ días. Con estos

valores resulta $e = 0.006805$, cifra que difiere en algo más que 59% con respecto al valor aceptado [6]. Es evidente entonces que con las convenciones adoptadas no es posible hacer una buena estimación de e .

Con datos experimentales, recogidos como se describió anteriormente, se obtuvo $e = 0.0175$, presentando una diferencia de 5% con respecto al valor aceptado [6].

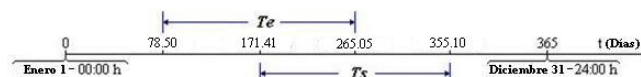


FIGURA 9. Ordenamiento de los instantes medidos para los equinoccios y solsticios de 2007.

IV. CONCLUSIÓN

La tarea de medir la excentricidad de la órbita terrestre en la forma descrita requiere de al menos un año y medio de observaciones, tiempo que excede un ciclo escolar anual, lo que implicaría que la medición completa debe realizarse con dos grupos diferentes de estudiantes. Si se toma como conocida la duración del año solar y la amplitud de la oscilación [2], el tiempo requerido para la determinación de e se puede reducir a poco más de seis meses.

También es posible dar a este tema distintos niveles de tratamiento sin llegar a realizar la medición completa. Pueden efectuarse, por ejemplo, solamente los registros de la posición de salida o puesta del Sol en las proximidades de un solsticio o equinoccio. El análisis de los datos recogidos pueden resultar significantes para estudiantes de ciencias naturales dado que el movimiento del Sol en el horizonte o el ritmo con que lo hace es hoy desconocido por muchos habitantes urbanos. Esta experiencia facilitaría cambiar la idea común de que la posición del punto cardinal Este u Oeste es el punto por donde sale o se pone el Sol [2].

Si los estudiantes conocen el manejo de algún software para análisis de datos, pueden avanzar hasta la determinación del momento en que ocurre un solsticio o equinoccio con una mejor aproximación que la que da el calendario.

La medición de e incluyendo su tratamiento teórico, requiere que los estudiantes posean conocimientos de cálculo.

REFERENCIAS

- [1] Henderson-Sellers, A., *Introducción a los modelos climáticos*, (Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1990).
- [2] Camino, N. y Ros, R. *¿Por dónde sale el sol?*, Educación en Ciencias **1**, 11-17 (1997).
- [3] Tignanelli, H., *Astronomía en la escuela (Actividades del Capítulo II)* en: http://www.palp.edu.ar/cielos_web/paginas/actividades%20cap%202.pdf. Consultado el 02 de Marzo de 2009.
- [4] http://www.palp.edu.ar/cielos_esp/Paginas/Pagina.asp?PaginaPalpID=107. Consultado el 03 de Marzo de 2009

APÉNDICE

Asumiendo que el valor de e es próximo a cero, es una buena aproximación escribir en (1) $(1 + e \cos \theta)^{-1}$ como una serie, y luego despreciar los términos que contienen potencias de e mayores o iguales que 3 como se muestra en (8).

$$\frac{1}{1 + e \cos(\theta)} = 1 - e \cos(\theta) + e^2 \cos^2(\theta). \quad (8)$$

Poniendo (8) en (1), elevando al cuadrado, eliminando nuevamente los términos con potencias de e mayores o iguales que 3 y luego resolviendo (2), se llega a (3).

El parámetro a puede ser eliminado haciendo Ae/A o As/A , obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\frac{Ae}{A} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4e \sin(\theta_0)}{\pi \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)} \right), \quad (9)$$

$$\frac{As}{A} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4e \cos(\theta_0)}{\pi \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)} \right). \quad (10)$$

De (9):
$$\sin(\theta_0) = \left(\frac{Ae}{A} - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)}{2e}, \quad (11)$$

y de (10):
$$\cos(\theta_0) = \left(\frac{As}{A} - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)}{2e}. \quad (12)$$

Sumando los cuadrados de las expresiones (11) y (12) se elimina θ_0 y queda:

$$\frac{\pi^2 \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)^2}{4e^2} \left[\left(\frac{Ae}{A} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{As}{A} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] = 1.$$

Luego, extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\frac{\pi \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)}{2e} \sqrt{\left[\left(\frac{Ae}{A} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{As}{A} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]} = 1. \quad (13)$$

De acuerdo a la segunda ley de Kepler:

$$\frac{Ae}{A} = \frac{Te}{T} \quad \text{y} \quad \frac{As}{A} = \frac{T_s}{T}.$$

Entonces la ecuación (13) puede reescribirse como:

$$\frac{\pi \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)}{2e} \sqrt{\left[\left(\frac{Te}{T} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{T_s}{T} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]} = 1. \quad (14)$$

Haciendo:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{Te}{T} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{T_s}{T} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]} = K, \quad (6)$$

la expresión (14) se reduce a:

$$\frac{\pi \left(1 - \frac{e^2}{2} \right)}{2e} K = 1. \quad (15)$$

Resolviendo luego la ecuación cuadrática (15) se obtiene una función de e dependiendo de parámetros que se pueden determinar midiendo solamente la posición en que asoma el Sol en el horizonte:

$$e = \frac{2}{\pi K} \left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2 K^2}{2}} - 1 \right). \quad (16)$$

El desarrollo en serie de (16), despreciando términos de 3º grado en K (esto es posible porque K es próximo a 0), permite, finalmente, escribir la excentricidad como:

$$e = \frac{1}{2} \pi K. \quad (7)$$