

# Botellas equilibristas: Extracción discrepante de un billete desde la boca de dos botellas verticales invertidas



Paco H. Talero<sup>1</sup>, Luis H. Barbosa<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Grupo Física y Matemática, Depto. de Ciencias Naturales, Universidad Central, Carrera 5 No 21-38, Bogotá, Colombia.

<sup>2</sup>Depto Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Av. Legaria 694, Col. Irrigación, C. P. 11500, México D. F.

**E-mail:** ptalerol@ucentral.edu.co; lhbfsica@yahoo.es

(Recibido el 30 de Marzo de 2009; aceptado el 13 de Mayo de 2009)

## Resumen

Se presenta el análisis físico de un montaje cotidiano, discrepante y de gran valor didáctico. El montaje consiste en poner un billete sobre la boca de una botella de vidrio vacía y luego sobre ésta equilibrar otra botella idéntica puesta verticalmente de manera que el billete quede entre las dos bocas. Con el sistema así configurado se pide a un estudiante extraer el billete de entre las botellas sin tocarlas ni destruir su configuración de equilibrio. Se muestra una metodología basada en el método científico que permite abordar conceptos básicos de Mecánica Newtoniana mediante este montaje.

**Palabras clave:** Botellas equilibristas, experimentos discrepantes, demostraciones experimentales, enseñanza de la Física, eventos discrepantes.

## Abstract

We present an analysis of a physical assembly discrepant, daily and of high didactic value. The assembly consists of putting a ticket on the mouth of an empty glass bottle and then another bottle on the balance placed vertically so that the ticket is between the two mouths. With the system configured, we request to students to extract a ticket out of the bottle without touching or destroying your existing balance. We present a methodology based on the scientific method that will address basic concepts of Newtonian Mechanics using this assembly.

**Keywords:** Equilibrist bottles, discrepant experiments, demonstration experiments, physics education, teaching methods.

**PACS:** 01.50.My, 01.40.-d, 01.40.Fk, 01.50.Pa, 01.50.Wg, 01.50-i, 01.40.gb

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Un inicio cautivante puede ser la chispa que prenda la mecha para movilizar a un estudiante hacia la observación sistemática de un fenómeno físico y con ello favorecer su aprendizaje. Un experimento discrepante (ExD) genera esa chispa y es un arreglo experimental que el profesor de física presenta a su grupo de estudiantes en busca de una explicación del fenómeno físico involucrado. Comúnmente los estudiantes expresan sorpresa y desequilibrio conceptual debido a lo contra-intuitivo, paradójico e impactante del evento experimentado [1].

Los ExD permiten contextualizar los contenidos físicos a enseñar, implementar una metodología de investigación y desarrollar actitudes científicas en los estudiantes [1, 2]. Se presenta a continuación un ExD que consiste en un billete colocado en medio de las bocas dos botellas puestas verticalmente. Este montaje ha sido

denominado en la literatura, botellas equilibristas [3]. La extracción del billete sin que se pierda el equilibrio de las botellas no se explica desde un modelo que potencie las capacidades intelectivas del estudiante, simplemente precisan que el fenómeno sucede por la inercia [4], perdiendo una herramienta de enorme valor pedagógico para el aprendizaje de la física. A este respecto Feynman expresa que utilizar un concepto sin que se pueda deducir algo a partir de él, no explica nada realmente, es como decir, “las botellas se mantienen en equilibrio porque el espíritu las hace mantener”, más aún, se podría decir igualmente “la inercia las hace caer” [5].

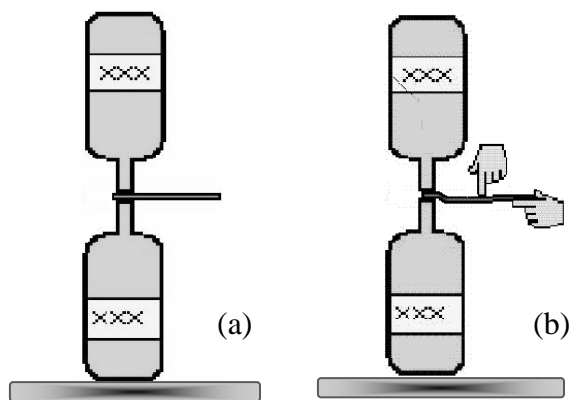
Al mismo tiempo, en este caso, la extracción del billete requiere un esfuerzo y un cuidado en el accionar, pues cerca del 100% de quienes lo intentan, no logran que las botellas mantengan la configuración. Este esfuerzo demanda una observación sistemática para establecer las condiciones que se requieren para que el billete pueda

extraerse sin dañar la configuración. Controlado por el profesor este escenario se ha probado es de una enorme riqueza [1]. Como expresó Einstein, refiriéndose precisamente al comportamiento de la aguja magnética, “el desarrollo del mundo intelectual es, en cierto sentido, la superación del sentimiento de admiración: la huida incesante de lo sorprendente, del milagro” [7].

En este trabajo se ilustra de manera concreta un ExD enmarcado dentro del referente teórico de la mecánica newtoniana de las partículas. En la sección II, se muestra el montaje así como las preguntas esenciales del fenómeno. En la sección III se presentan las observaciones de los hechos físicos relevantes, el modelo teórico y el experimento controlado. Finalmente en la sección IV se presentan las conclusiones.

## II. DESCRIPCIÓN DEL ExD

Para este ExD se requiere un billete, dos botellas de vidrio idénticas, secas, vacías y sin corcho. Sobre el borde de una mesa se ubica una de las botellas con su boca hacia arriba, sobre este se coloca un billete y sobre el billete se posiciona la otra botella con su boca hacia abajo de manera que el sistema botella-billete-botella se mantenga en equilibrio (ver Fig. 1).



**FIGURA 1.** (a) Dos botellas colocadas verticalmente boca con boca con un billete en medio. (b) Extrayendo el billete con golpe rápido.

En seguida el profesor pide a un estudiante extraer el billete de entre las botellas sin tocarlas ni destruir su configuración de equilibrio. Después de algún tiempo de trabajo el profesor resuelve el acertijo: toma con firmeza el billete de uno de sus extremos y con los dedos de su mano libre le proporciona un golpe rápido al mejor estilo de karate [8] que ocasiona la salida del billete de entre las botellas sin que estas caigan.

Luego de revelado el “secreto” del ExD y experimentado el fenómeno, el profesor plantea las siguientes preguntas de trabajo:

1. ¿Cuál debe ser la rapidez umbral  $v_u$  de los dedos a partir de la cual el billete es extraído sin afectar la configuración de equilibrio de las botellas?
2. ¿Qué tipo de arreglo experimental permite falsear las implicaciones extraídas del análisis teórico?

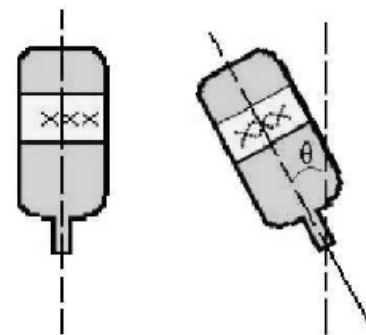
En busca de una respuesta a estas preguntas los estudiantes realizan, bajo la orientación del profesor, un extenso trabajo que contiene observación, modelación, análisis teórico y experimentación hasta apropiarse de una explicación física coherente y enmarcada dentro del referente teórico de la mecánica newtoniana de partículas. Tal explicación y análisis experimental se presentan a continuación.

## III. OBSERVACIÓN, MODELO, TEORÍA Y EXPERIMENTO

A continuación se expone una explicación al fenómeno físico contenido en el ExD. El orden de exposición pretende dar a entender la esencia metodológica implementada en el trabajo con ExD.

La observación minuciosa del fenómeno físico muestra los siguientes comportamientos:

1. Extraer el billete sin destruir la configuración de equilibrio requiere proporcionar un golpe rápido sobre el billete (ver Fig. 1b). Esta práctica se asemeja al golpe proporcionado por un karateka cuando realiza el rompimiento de un bloque de hormigón, cuya rapidez es de unos 7 m/s [8, 9, 14].
2. La botella superior no sufre movimiento angular significativo, esto se evidencia al observar el eje de la botella al extraer el billete. Particularmente, si se pinta una línea vertical sobre la botella que coincida con el eje vertical cuando se extraiga el billete se observa que esta no se aleja significativamente de la línea de equilibrio. Cabe anotar que la línea se encuentra en el mismo plano que contiene el centro de masa y el eje vertical de la botella (ver Fig. 2).



**FIGURA 2.** Si hay torque significativo la botella rota de lo contrario permanece sin rotar.

3. El desplazamiento vertical de la botella superior es inapreciable. Este comportamiento es de esperar, pues su desplazamiento vertical debe corresponder al grosor del billete que es a lo sumo de 0,2 mm, mientras que la altura de la botella es de unos 30 cm.
4. El desplazamiento horizontal  $x$  de la boca de la botella superior es a lo sumo de 1 mm. Tal desplazamiento  $x$  se puede medir directamente en la configuración final en equilibrio de las botellas.
5. Al disponer una botella sobre la otra, boca con boca, se aprecia que no es posible mantener el equilibrio si el desplazamiento  $x$  de la botella superior sobre la inferior

supera el grosor  $\Delta r$  de la boca de la inferior que es de unos 3,5 mm.

6. Al extraer el billete golpeándolo lo más cerca posible al borde de las bocas de las botellas, no se observa deslizamiento entre el dedo y el billete.

7. Al extraer el billete la botella inferior permanece inmóvil respecto a la botella superior.

8. El billete no está ligado a la botella superior mientras éste es extraído.

De acuerdo con la observación se plantea un modelo de trabajo [13].

La primera observación otorga el orden de magnitud de la rapidez buscada, unos 7 m/s.

De la segunda observación resulta evidente que el torque producido por las fuerzas que intervienen en el proceso de extracción del billete no producen torque significativo sobre las botellas, esto trae como consecuencia que las botellas puedan considerarse como bloques compactos o más formalmente como partículas, pues su estructura interna no es de importancia para esta situación [10, 11].

La tercera observación permite inferir que la aceleración vertical de la botella es nula entonces la suma de las fuerzas verticales es igual a cero y se puede afirmar que la botella superior se encuentra en equilibrio vertical.

La cuarta observación permite establecer que la botella superior es afectada por algún tipo de fuerza, ya que antes de extraer el billete se encontraba en reposo y luego de extraído el billete la botella superior se desplaza y termina en reposo, luego hay una aceleración horizontal diferente de cero y de acuerdo con la segunda ley de Newton la fuerza neta en esa dirección es diferente de cero. Dado que el torque sobre la botella superior no es significativo el desequilibrio de esta no se produce por tal causa sino por el arrastre que sufre la botella superior respecto a la inferior y que la deja en una posición de desequilibrio estático.

De acuerdo con la quinta observación y puesto que la botella superior siempre termina en reposo sobre la botella inferior la condición de equilibrio se traduce en que el desplazamiento de la botella superior  $x$  no puede exceder el grosor de la boca de la botella inferior  $\Delta r$ , es decir,  $x < \Delta r$  (ver Fig. 3).

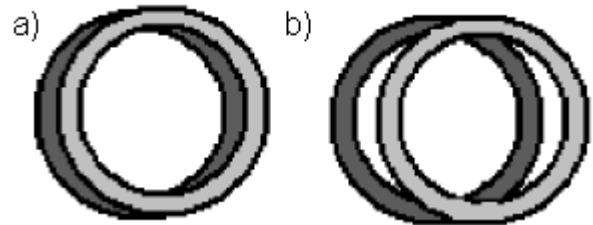


FIGURA 3. Posición de las bocas de las botellas en: (a) equilibrio y (b) desequilibrio.

Merece atención especial el hecho de que mientras el billete se desliza, la botella superior no toca la botella inferior de inmediato. La botella superior “espera” hasta que la parte posterior del billete se encuentre en una posición mayor al radio  $R$  de la botella inferior. Luego empieza a descender hasta tocar la botella inferior, pero cuando esto ocurre ya el billete abandonó las dos bocas y la botella superior estará prácticamente en contacto total con la botella inferior. Esto es de esperar, pues la botella rotará sólo cuando el billete pase de la mitad de la botella. Esta situación se explica al revisar la primera observación ya que la velocidad angular esperada es prácticamente nula. Así mismo, cabe resaltar que la condición de equilibrio es estática ya que la botella superior, al deslizar sobre la inferior, debe alcanzar el reposo para no caer. El movimiento se estudia en dos etapas: interacción billete botella superior e interacción botella-botella, (ver Fig. 4).

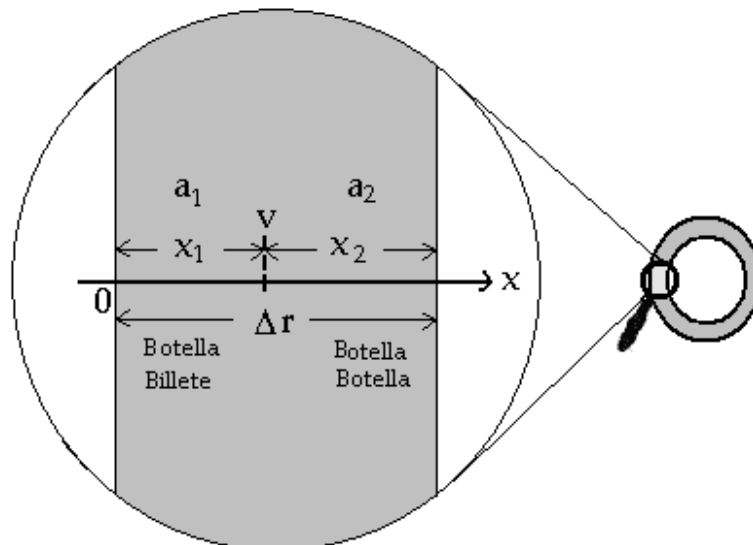


FIGURA 4. Zoom del borde de la botella superior que evidencia el desplazamiento.

De acuerdo con el modelo planteado si el billete estuviese ligado a la botella superior, las fuerzas sobre tal botella serían: normal, peso y fuerza de fricción estática máxima,

visto desde un sistema inercial ligado a la mesa. Se trabaja esta hipótesis para encontrar una aceleración  $a_0$  crítica a

partir de la cual el billete y la botella superior no estén ligados.

Al aplicar la segunda ley de Newton se encuentra la expresión de equilibrio en la dirección vertical

$$N = mg, \tag{1}$$

donde  $m$  es la masa de la botella y  $g$  la aceleración de la gravedad. En el eje horizontal se encuentra la fuerza de fricción estática máxima dada por

$$f_s = ma. \tag{2}$$

Todo se deduce a partir del diagrama de fuerzas sobre la botella superior (ver Fig. 5).

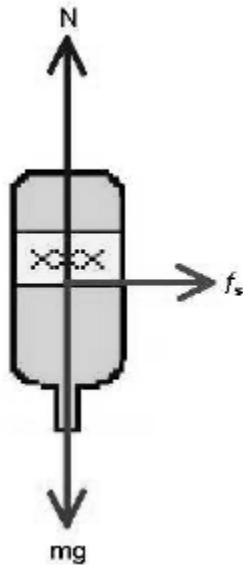


FIGURA 5. Fuerzas sobre la botella superior ligada al billete.

De acuerdo con (2) existe una aceleración crítica  $a_0$  con la cual la botella superior se mueve ligada al billete mientras es extraído. La aceleración  $a_0$  se presenta justo cuando la fuerza de fricción estática es máxima dada por,  $f_s = \mu_s N$ , siendo  $\mu_s$  el coeficiente de fricción estático entre la botella superior y el billete.

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene una expresión para la aceleración  $a_0$ ,

$$a_0 = \mu_s g. \tag{3}$$

De la expresión (3) se entiende que la ligazón del billete y botella superior depende de la naturaleza de las superficies en contacto sin movimiento relativo, de manera que si la aceleración del billete es mayor que  $a_0$  la botella se desliza sobre el billete. Cuando la botella se desliza la fuerza horizontal que actúa sobre ella es la fuerza de fricción cinética y por tanto, la aceleración de la botella superior está dada por

$$a_1 = \mu_k g, \tag{4}$$

donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinético entre la superficie del billete y la superficie de la botella superior.

Como la aceleración del billete se espera que sea siempre mayor que  $a_0$  entonces el desplazamiento  $x_1$  de la botella superior se debe por completo a la aceleración proveniente de la fuerza de fricción cinética. Al aplicar la expresión básica de la cinemática

$$2ax = v^2 - v_0^2, \tag{5}$$

la botella superior tendrá una rapidez

$$v^2 = 2a_1 x_1. \tag{6}$$

En este instante la botella ya ha caído. Al aplicar la segunda ley de Newton se encuentra que para este trayecto la botella tiene aceleración

$$a_2 = -\gamma_k g. \tag{7}$$

Donde el coeficiente de fricción cinético entre las botellas es  $\gamma_k$ . La rapidez  $v$  en (6) se convierte en la rapidez inicial del tramo de contacto entre las dos botellas y puesto que la velocidad final es cero el desplazamiento  $x_2$  está dado por la expresión

$$2a_2 x_2 = -v^2. \tag{8}$$

Al combinar las ecuaciones (6) y (7) y simplificar se encuentra la relación

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\mu_k}{\gamma_k}. \tag{9}$$

De otro lado, el billete se mueve con una aceleración  $a_b$  debida a su interacción con los dedos del experimentador, tal aceleración en general no es constante. Sin embargo, la aceleración media brinda una información valiosa sobre la aceleración del billete [12, 13]. De la observación seis se evidencia que la rapidez inicial del billete es cero mientras que la rapidez final  $v_b$  corresponde a la rapidez de los dedos del experimentador justo al golpear el billete, ya que la mano tiene una mayor masa que la masa del billete.

De acuerdo con lo anterior la aceleración media  $a_b$  del billete es

$$a_b = \frac{v_b}{\tau}. \tag{10}$$

Donde  $\tau$  es el tiempo que tarda el billete en salir. Ya que el billete se desplaza el diámetro de la boca de la botella inferior,  $2R$ , está dado por

$$R = \frac{v_b \tau}{4}. \tag{11}$$

Como el billete se arrastra junto con la botella superior, pero no ligado a ella, esto implica que el tiempo de desplazamiento  $x_1$  de la botella superior también es  $\tau$ , así

$$x_1 = \frac{a_1 \tau^2}{2}. \quad (12)$$

Al reemplazar (4) y (5) en (12) se encuentra

$$x_1 = 8 \frac{\mu_k R^2 g}{v_b^2}. \quad (13)$$

De acuerdo con (13) cuando la rapidez de los dedos del experimentador es grande el desplazamiento  $x_1$  es pequeño y de (9) se infiere que el desplazamiento  $x_2$  también es pequeño, entonces el desplazamiento total es pequeño y las botellas se mantienen en equilibrio, (ver Fig. 4). Por el contrario, cuando la rapidez del experimentador es pequeña el desplazamiento  $x_1$  y  $x_2$  es grande y por lo tanto el desplazamiento total es mayor que el grosor de los picos de las botellas haciéndolas precipitar. La rapidez umbral  $v_u$  del experimentador es la rapidez para la cual el desplazamiento es justo el grosor de las botellas.

De acuerdo con lo anterior la condición de equilibrio es  $x_1 + x_2 \leq \Delta r$  y para encontrar la rapidez umbral es preciso hacer

$$x_1 + x_2 = \Delta r. \quad (14)$$

Si se usan las ecuaciones (9) y (16) se encuentra

$$v_u = \sqrt{8 \mu_k \left(1 + \frac{\gamma_k}{\mu_k}\right) \frac{R^2 g}{\Delta r}}. \quad (15)$$

Esta expresión para la rapidez umbral muestra cómo calcularla desde parámetros que son medibles directamente del sistema físico. Para poner a prueba el modelo se puede medir esta rapidez umbral con un método alternativo, que consiste en dejar caer una varilla de hierro sobre el billete a una altura determinada (ver Fig. 6).

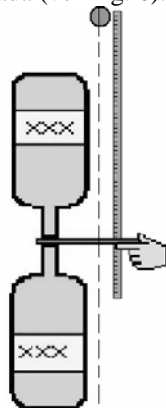


FIGURA 6. Montaje experimental para probar el modelo.

En resumen, se calcula la rapidez umbral midiendo los coeficientes de fricción y el grosor de las botellas; se

compara con la rapidez obtenida del segundo método que es en esencia una caída libre, pues la fuerza de fricción y de empuje son despreciables frente a su peso. Además, el choque entre la varilla y el billete la rapidez de la varilla es prácticamente transmitida al billete debido a que la masa del billete es mucho menor que la de la varilla.

Para estimar el coeficiente de fricción cinética  $\mu_k$  se coloca un billete sobre la boca de una botella y se inclina paulatinamente hasta que el billete se deslice con rapidez constante, así se obtiene  $\mu_k \approx 0,4$ . El coeficiente de fricción cinética entre las botellas es  $\gamma_k \approx 0,4$ . Con esto la velocidad umbral es  $v_u = 4,0 \text{ m/s} \pm 35 \text{ cm/s}$ . El método alternativo arroja como resultado para la velocidad umbral  $v_u = 3,7 \text{ m/s} \pm 1,0 \text{ cm/s}$ , para lo cual se requiere dejar caer la varilla desde una altura aproximada de  $h = 70 \text{ cm}$ . Al comparar los resultados se obtiene un error porcentual del 7,5 %, que es un buen acuerdo si se tiene en cuenta la dificultad que se tiene al medir los coeficientes de fricción [6].

#### IV. CONCLUSIONES

Se mostró que al seguir el método científico y aplicar las leyes de Newton se puede explicar el fenómeno de las botellas equilibristas sin recurrir al concepto de inercia ni inercialidad como se sugiere en [4]. Asimismo, se mostró cómo implementar una metodología basada en el método científico partiendo de un ExD. Como se dijo antes, un enfoque como este genera un escenario de enorme riqueza pedagógica al permitir a estudiantes un ambiente agradable de aprendizaje, de observación sistemática del evento, de necesidad de modelos conceptuales y de búsqueda de relaciones entre variables con su consecuente abstracción en el modelo teórico.

El error relativo de 7.5% en la rapidez umbral fue atribuido a la dificultad que en general se presenta al medir coeficientes de fricción. Un refinamiento del experimento se puede conseguir al mejorar la medida de los coeficientes y acercar la varilla a los picos de las botellas al extraer el billete, además para una confrontación directa de las hipótesis planteadas en el modelo se puede realizar una filmación con una cámara de alta velocidad.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen por sus diferentes aportes a los siguientes colegas: Orlando Organista, Cesar Herreño, Edgar Rodríguez y Fernanda Santana. Del mismo modo, se agradece a la Universidad Central por el apoyo al proyecto de experimentos discrepantes en enseñanza de la física.

#### REFERENCIAS

- [1] Barbosa, L. H., Los Experimentos Discrepantes en la enseñanza de la Física, Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**, 246-252 (2008).

- [2] Barbosa, L. H., Talero. Paco H., *La compuerta mágica: Descripción de un flujo discrepante en dos globos elásticos interconectados*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 135-139 (2009).
- [3] Riveros H., Colado J., Mieres, J., *Experimentos impactantes. Mecánica y Fluidos 1*, (Editorial Trillas, México, 2000).
- [4] Cuesta, M. J., Vila, J. Sierra, C. J., Agudo, T., *Explicación con experimentos sencillos y al alcance de todos de la primera ley de Newton*, Lat. Am. J. Phys Educ. **2**, 241-245 (2008).
- [5] Feynman, R. P., *What Is Science*, The Physics Teacher **7**, 313-320 (1969).
- [6] Feynman, R. P., *The Feynman Lectures of Physics*, Vol. I, (Pearson Addison Wesley, New York, 1989).
- [7] Kagánov, M. y Tsukérnik, V., *La Naturaleza del magnetismo*, (Editorial Mir, Moscú, 1985).
- [8] Walker, J. D., *Karate Strikes*, Am. J. Phys. **43**, 845-849 (1975).
- [9] Wilk, S. R. *et al.*, *The Physics of Karate*, Am. J. Phys. **51**, 783-790 (1983).
- [10] Landáu, L. D., Lifshitz, E. M., *Curso de Física Teórica*, (Editorial Reverté, España, 1975).
- [11] Goldstein, H. *Mecánica Clásica*, (Editorial Reverté, Barcelona, 1987).
- [12] Guerra, M., Correa J. *et al.*, *Física: Elementos fundamentales*, (Editorial Reverté, Barcelona, 1984).
- [13] Serway, R., Jewett, J., *Física para ciencias e ingeniería*, Vol. 1, (Cengage Learning Editors, séptima ed. Mexico, D.F, 2008).
- [14] Feld, M. S. *et. al.*, *The Physics of Karate*, Scientific American **240**, 150-158 (1979).