

# Rodadura de una esfera sobre un plano inclinado. Mejoras al experimento desarrollado en el “plano de Packard”



**Néstor A. Olivieri, Pablo A. Nuñez y Eduardo E. Rodríguez**  
*Instituto de Industria, Universidad Nacional de General Sarmiento,  
J. M. Gutiérrez 1150, CP B1613GSV, Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina.*

**E-mail:** erodrigu@ungs.edu.ar

(Recibido el 11 de Marzo de 2010, aceptado el 12 de Abril de 2010)

## Resumen

Presentamos una reformulación de un experimento para estudiar la rodadura de una esfera sobre un plano inclinado, usualmente desarrollado sobre el denominado “plano de Packard”. El empleo de una cámara digital para filmar el movimiento permite ampliar las posibilidades de análisis de las variables del movimiento. De las imágenes se obtiene en tiempo real y con una muy buena precisión, la posición, velocidad, aceleración y energía del cuerpo. De esta manera se hace accesible el estudio de la hipótesis de la conservación de la energía mecánica en un movimiento de rodadura sin deslizamiento.

**Palabras clave:** Dinámica de cuerpos rígidos, plano de Packard, conservación de la energía mecánica.

## Abstract

We report on a reformulation of an experiment that studies the rolling of a sphere on an incline, usually made on the so-called Packard’s apparatus. By using a digital camera to capture the motion, we can increase the analysis of the motion’s variables. From the images obtained in real time the position, velocity, acceleration and energy of the rolling body are obtained with a very good precision. The experiment allows the study of the hypothesis of mechanical energy conservation in a motion of rolling without slipping.

**Keywords:** Dynamics of rigid bodies, Packard’s apparatus, conservation of mechanical energy.

**PACS:** 01.40.gb, 01.50.My, 01.50.Pa

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos una reformulación de la experiencia clásica de observar la rodadura de una esfera sobre un plano inclinado moviéndose en las dos dimensiones del plano. Este experimento se realiza con el denominado “aparato o plano de Packard” [1, 2], que esencialmente es una placa de madera donde la esfera puede caer describiendo una trayectoria parabólica.

Mostramos cómo el uso de una cámara digital como herramienta para la adquisición de datos [3, 4, 5, 6] amplía las posibilidades de análisis del experimento. Esto se debe esencialmente a que una filmación permite analizar el movimiento del cuerpo en tiempo real en vez de hacerlo, como ha sido usual en experimentos de este tipo [1, 2], en unidades temporales arbitrarias, que requiere asumir que el movimiento es uniforme en una dirección. Con el modo de trabajo que proponemos, además de obtener la forma de la trayectoria, se obtiene la velocidad del cuerpo y su energía. A partir del análisis cuantificable de las variables puede estudiarse, por ejemplo: la aceleración del cuerpo y su

relación con el momento de inercia; y la hipótesis de conservación de la energía mecánica de un cuerpo que rueda sin deslizar.

En la presentación del caso de rodadura sin deslizamiento de cuerpos rígidos que se hace en los cursos de mecánica se destaca especialmente la ausencia de trabajo de la fuerza de roce. La presencia de la fuerza de roce, necesaria para la rodadura sobre un plano inclinado, aporta complejidad a la comprensión que del tema tienen que hacer los alumnos. La estrategia estándar de mostrar que en el caso de rodadura sin deslizamiento el punto de contacto entre el cuerpo y la superficie donde rueda tiene velocidad nula respecto de la superficie, y que por allí pasa “un eje instantáneo de rotación”, es una tarea ardua y compleja, y que requiere de los alumnos un grado de abstracción significativo para un entendimiento adecuado de la física del problema.

En tal contexto, reviste importancia reconocer que la fuerza de roce en esas condiciones es estática y, por lo tanto, no produce disipación. De esta manera, puede considerarse el caso de una rodadura sin deslizamiento de

un cuerpo rígido por un plano inclinado como un ejemplo donde la energía mecánica se conserva y, a partir de esto, obtenerse la ecuación de movimiento por medio de un análisis de la energía [7, 8]. Sin embargo, no es común ofrecer una prueba experimental de los supuestos utilizados a fin de que los alumnos visualicen de manera satisfactoria la situación que se les plantea.

Se entiende entonces que el estudio de la hipótesis de la conservación de la energía mecánica en un movimiento de rodadura sin deslizamiento puede considerarse como un núcleo, desde el cual se asocie una serie de conceptos importantes que se introducen en el estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos. Además, los experimentos pueden orientarse para que dejen en claro la necesidad de considerar en conjunto a las energías potencial, cinética de traslación y cinética de rotación para verificar la hipótesis de conservación de la energía mecánica, lo que permite reforzar estos conceptos generales en los alumnos.

A continuación, se presentan las consideraciones generales del movimiento de roto-traslación de una esfera que cae en un plano inclinado y el diseño experimental que puede realizarse en el laboratorio de física para estudiar la hipótesis de conservación de la energía mecánica en este caso.

## II. RODADURA SIN DESLIZAMIENTO DE UNA ESFERA SOBRE UN PLANO INCLINADO

La Figura 1 muestra un sistema de referencia adecuado para estudiar el movimiento. Si la esfera inicia su movimiento de rodadura desde la posición más alta (origen de coordenadas) con una velocidad de traslación inicial  $(v_{x,0}, 0)$ , se acelerará en la dirección  $y$ , a lo largo de la cual existe una fuerza neta, y mantendrá su velocidad en la dirección  $x$ , dado la ausencia de fuerza neta en esa dirección.

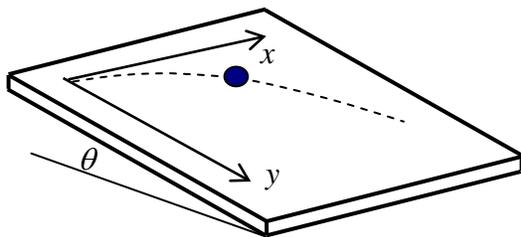


FIGURA 1. Sistema  $x$ - $y$  de referencia sobre el plano.

Las coordenadas  $(x, y)$  de la esfera sobre el plano inclinado están dadas por:

$$x(t) = v_{x,0}t \quad (1)$$

y

$$y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2. \quad (2)$$

La aceleración  $a_y$  es:

$$a_y = \frac{m g \sin(\theta) - f}{m}, \quad (3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación del plano y  $f$  es la fuerza de roce. El momento de rotación de la fuerza de roce acelera angularmente a la esfera, y esta aceleración  $\alpha$  es:

$$\alpha = \frac{f R}{I}. \quad (4)$$

Aquí,  $R$  es el radio de la esfera e  $I$  su momento de inercia respecto del eje que pasa por el centro de masas,  $I = (2/5)mR^2$ . En la rodadura sin deslizamiento se cumple la relación entre  $\alpha$  y la aceleración del centro de masas: [7, 8]

$$\alpha = a_y / R, \quad (5)$$

y usando esta ecuación de vínculo junto a (4) en (3) se obtiene:[9]

$$a_y = \frac{5}{7}g \sin(\theta). \quad (6)$$

La trayectoria de la esfera es:

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{a_y}{v_{x,0}^2} x^2, \quad (7)$$

y se ve que de la obtención de la trayectoria experimental y de la correspondencia del valor medido de la aceleración con (6) puede estudiarse si la esfera rueda sin deslizamiento. La velocidad  $v_{x,0}$  puede obtenerse independientemente.

## III. RODADURA SIN DESLIZAMIENTO Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

La energía cinética de un cuerpo rígido de masa  $m$  que rota con velocidad  $\omega$  y se traslada con velocidad  $v$  está determinada por: [7, 8]

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (8)$$

Para el caso particular de una esfera de radio  $R$  que rueda sin deslizar se cumple para las velocidades:

$$v = R \omega, \quad (9)$$

y la energía cinética puede expresarse sólo en función de la velocidad de traslación  $v$ :

$$K = \frac{7}{10}mv^2. \quad (10)$$

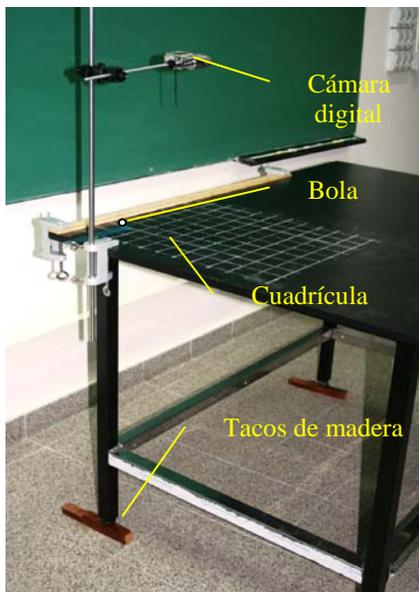
Si la esfera se deja rodar sin deslizar sobre un plano inclinado su energía mecánica instantánea es:

$$E = K + U = \frac{7}{10}mv^2 + m g z, \quad (11)$$

donde  $z$  es su posición vertical instantánea, que decrece con el tiempo. Por el carácter no disipativo de la fuerza de roce actuante,  $E$  se conserva, lo que puede ponerse a prueba en el experimento.

#### IV. DISEÑO EXPERIMENTAL

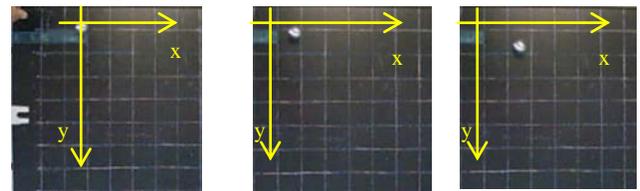
Los experimentos pueden hacerse ya sea usando un plano de Packard comercial [10], una placa de madera o una mesa de mayor superficie. En nuestro caso usamos una mesa con tablero de madera, inclinada levemente ( $\theta < 3^\circ$ ) mediante unos tacos de madera, según muestra la imagen de la Figura 2. Es conveniente marcar con tiza en la mesa una cuadrícula de referencia de 50 cm x 50 cm, con líneas cada 5 cm en las dos direcciones. Una regla de plástico en lo alto de la cuadrícula sirve como "lanzadera", a partir de la cual se libera la esfera para que inicie su movimiento rodando en la dirección  $x$ . Un soporte fija la cámara digital, ubicada de manera que el campo de enfoque abarque toda la cuadrícula.



**FIGURA 2.** La imagen corresponde al diseño del plano inclinado. Se observa una mesa en declive sobre la cual se monta la cámara digital usando un soporte.

En nuestro experimentos usamos una bola de acero de 0.0066 kg y 0.01275 m de radio. Con esferas de plástico

duro se obtienen resultados similares. Para estudiar su movimiento se procede a filmar a la bola que cae rodando, impulsada inicialmente con la mano a lo largo de la lanzadera [11]. La trayectoria se reconstruye a partir de la técnica del análisis "cuadro por cuadro" del video. Del video se extraen los fotogramas o cuadros por medio de programas de acceso libre como SpanishDub [12], el que usamos en este trabajo (ver Figura 3). Esto permite obtener de cada fotograma las coordenadas ( $x'$ ,  $y'$ ) de la esfera sobre la imagen digital, medidas en número de píxeles contados desde los ejes de referencia. Esto puede hacerse, por ejemplo, con programas de acceso libre [13] o con el utilitario Paint de MS-Office. Luego es necesario establecer la conversión de la medición en píxeles a unidades de medición de longitud, por ejemplo, centímetros, para obtener las coordenadas reales ( $x$ ,  $y$ ) sobre el plano. Para esto sirve la cuadrícula de referencia. Por otra parte, la cantidad de cuadros por segundo que filma la cámara permite determinar el tiempo del experimento. En nuestro caso la cámara empleada es una HP-M525 que toma 17 cuadros por segundo, según sus especificaciones técnicas, y esta frecuencia de captura de imágenes es adecuada para el experimento. A esta frecuencia de grabado, las coordenadas del cuerpo se obtienen cada 0.0588 s.



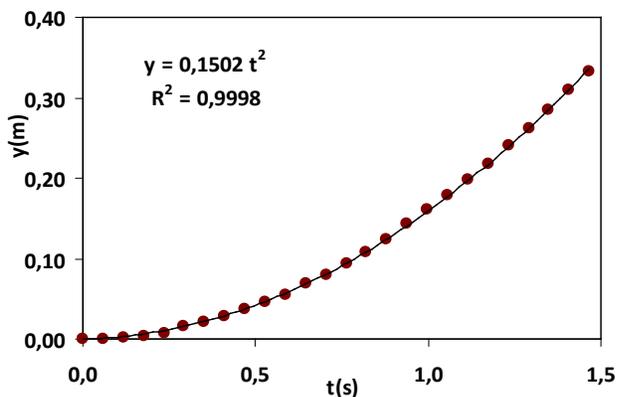
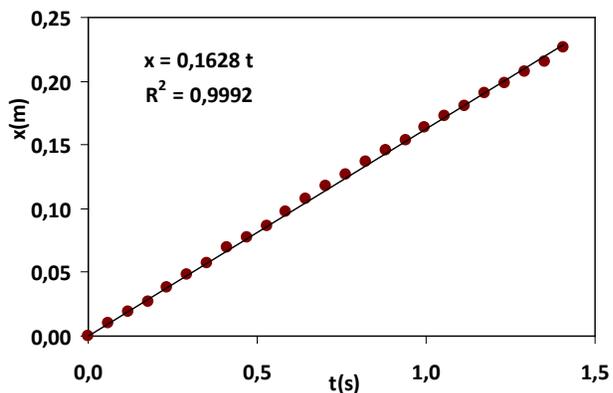
**FIGURA 3.** Serie de fotogramas obtenidos del video por medio del uso del programa SpanishDub. La mesa está inclinada un ángulo  $\theta = 2.3^\circ$  en la dirección  $y$  del sistema de referencia indicado.

#### V. RESULTADOS

A partir de la reconstrucción de las posiciones de la esfera en función del tiempo se obtienen las curvas de  $x(t)$  e  $y(t)$  (Figura 4). El tipo de movimiento puede determinarse por medio de estas curvas. De la linealidad de  $x(t)$  se concluye que en la dirección  $x$  el movimiento es con velocidad constante. Mientras tanto, en la dirección  $y$  el movimiento es uniformemente acelerado con aceleración de  $0.29 \text{ m/s}^2$ . Este valor se compara muy bien con el valor esperado según (6) de  $0.281 \text{ m/s}^2$  para una inclinación de  $2.3^\circ$  como la usada. Para el cálculo usamos  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

Como advertencia notamos que si en un dado experimento se llega a observar que el gráfico  $x(t)$  no es lineal, esto sería indicativo de una incorrecta inclinación del plano, que en vez de estar inclinado sólo en la dirección  $y$  y lo estaría también en  $x$ , y por lo tanto la esfera también se acelera en esta última dirección.

La trayectoria se muestra en la Figura 5, donde se ha representado  $y$  como función del cuadrado de  $x$  para obtener un gráfico lineal.



**FIGURA 4.** Arriba: Posición  $x(t)$ . Abajo: Posición  $y(t)$ . Se deduce que en la dirección  $x$  el movimiento es con velocidad constante, y en la dirección  $y$  es uniformemente acelerado.

Dado que es posible calcular las velocidades  $v_x$  y  $v_y$  de la esfera partir de las gráficas de  $x(t)$  e  $y(t)$ , también puede determinarse experimentalmente el valor de las energías cinéticas en función del tiempo. Teniendo en cuenta esto puede reescribirse la ecuación (11) como:

$$K = \frac{7}{10} m [v_x(t)^2 + v_y(t)^2]. \quad (12)$$

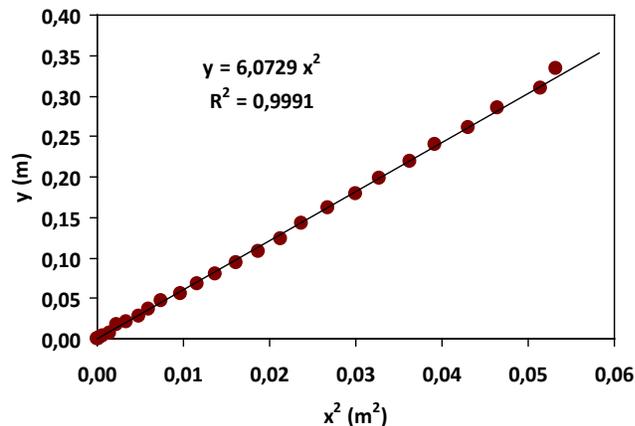
La velocidad  $v_x$  se obtiene de la pendiente de la mejor recta de ajuste del gráfico de  $x(t)$ , y  $v_y$  se obtiene derivando la ecuación de ajuste de  $y(t)$  con un polinomio de grado 2. También, al conocer las posiciones y el ángulo de inclinación del plano se puede determinar la energía potencial gravitatoria en función del tiempo como:

$$U = m g [h - y(t) \text{sen}(\theta)], \quad (13)$$

donde  $h$  es la altura a la que se encuentra el origen de coordenadas sobre el plano, respecto de la parte más baja del plano. Para el experimento que se analiza,  $h = 0.14$  m.

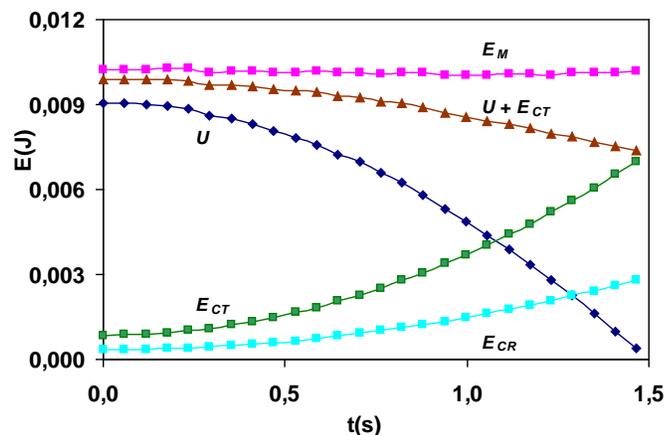
En la Figura 6 se muestran las energías cinéticas de traslación y rotación, y la energía potencial gravitatoria. También están representadas la energía mecánica (suma de

todas) y la suma de la energía cinética de traslación y potencial gravitatoria.



**FIGURA 5.** Trayectoria de la esfera sobre el plano, representada como  $y(x^2)$ . Se muestra el ajuste de una recta, de acuerdo con la expresión (7).

Merece la pena observar que la suma de la energía cinética de traslación con la energía potencial gravitatoria resulta en una energía que va disminuyendo en el tiempo. Este hecho, fácilmente reconocible del gráfico de energía, da la oportunidad de enfatizar el aporte de la energía de rotación del cuerpo para definir su energía mecánica [14]. Finalmente, el valor constante de la suma de todas las energías (valor medio:  $\langle E_M \rangle = 0.01014$  J, desviación estándar de la muestra:  $\sigma_E = 7 \times 10^{-5}$  J) muestra la conservación de la energía mecánica para el cuerpo en rodadura.



**FIGURA 6.** Gráfico comparativo de los tipos de energías intervinientes en la caída de la esfera por el plano inclinado. Se muestra además la suma de la energía cinética de traslación ( $E_{CT}$ ) y de la energía potencial ( $U$ ), y la suma de todas las energías ( $E_M$ ). El valor constante de esta última expresa la conservación de la energía mecánica del cuerpo.  $E_{CR}$  es la energía de rotación.

## VI. CONCLUSIONES

La reformulación de esta actividad, que puede hacerse sin dificultad en un laboratorio básico, lleva a ampliar el análisis experimental a la energía del cuerpo que rueda. El uso de una cámara digital para la toma de imágenes y la medición del tiempo permite cuantificar totalmente el movimiento y la extracción de conclusiones relevantes sobre la dinámica de un cuerpo rígido.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto UNGS-IDEI 30/4019.

## REFERENCIAS

- [1] Greenslade, Jr., T. B., *Packard's Apparatus*, Phys. Teach. **34**, 156 (1996).
- [2] Una versión de este dispositivo, similar al original de Packard, puede verse en: [http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/Mechanics/Packards\\_Apparatus/Packards\\_Apparatus.html](http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/Mechanics/Packards_Apparatus/Packards_Apparatus.html). Consultado el 4 de marzo de 2010.
- [3] Gil, S., Reisin, H. D., and Rodríguez, E. E., *Using a digital camera as a measuring device*, Am. J. Phys. **74**, 768 (2006).
- [4] Chen, D., and Xing, L., *Digital camera as a data collector*, Phys. Teach. **47**, 54 (2009).
- [5] Wyrembeck, E. P., *Video analysis with a web camera*, Phys. Teach. **47**, 28 (2009).

- [6] Goff, J. E., and Carré, M. J., *Trajectory analysis of a soccer ball*, Am. J. Phys. **77**, 1020 (2009).
- [7] Sears, F., Zemansky, M., Young, H. y Fredman, R., *Física universitaria, Vol. 1* (Pearson Educación, undécima edición, México, 2004).
- [8] Serway, R., and Jewett, J., *Física para ciencias e ingeniería, Vol. 1*, (Ed. Cengage Learning, Thompson Internacional, séptima edición, México, 2008).
- [9] Una discusión histórica sobre el valor de esta aceleración puede verse en: Crawford, F. S., *Rolling and slipping down Galileo's inclined plane: Rhythms of the spheres*, Am. J. Phys. **64**, 541 (1996).
- [10] Una de estas versiones comerciales es la de la firma Cenco:  
<http://www.cencophysics.com/packards-acceleration-apparatus/p/IG0037841/>. Consultado el 4 de marzo de 2010.
- [11] Videos del experimento disponibles en: <http://www.cienciaredcreativa.org/videos/rodadura/>.
- [12] Spanish Dub es un programa gratuito que soporta los siguientes formatos, tales como AVI y MPEG, que son los formatos de compresión más usuales de las cámaras digitales actuales. El programa puede obtenerse de <http://spanishdub.softonic.com/>. Consultado el 2 de marzo de 2010.
- [13] Puede usarse, por ejemplo, PhotoFiltre: <http://photofiltre.softonic.com>. Consultado el 4 de marzo de 2010.
- [14] Solbes, J., and Tarín, F., *Which reaches the bottom first?*, Phys. Teach. **46**, 550 (2008).