

Algunos experimentos con cuerpos rígidos



Néstor A. Olivieri, Pablo A. Nuñez y Eduardo E. Rodríguez
*Instituto de Industria, Universidad Nacional de General Sarmiento,
J. M. Gutiérrez 1150, CP B1613GSV, Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina.*

E-mail: erodrigu@ungs.edu.ar

(Recibido el 15 de Abril de 2010; aceptado el 12 de Mayo de 2010)

Resumen

Se presentan algunos diseños experimentales usados para ilustrar algunos temas importantes de la dinámica de cuerpos rígidos durante un curso universitario de mecánica. Los experimentos recurren a materiales de bajo costo y disponibles en los laboratorios de física universitarios. Uno de ellos usa un cuerpo con una geometría no convencional y los restantes representan casos usualmente incluidos como desafíos en varios libros de texto.

Palabras clave: Resolución de problemas, modelado, experimentos con cuerpos rígidos.

Abstract

Experimental designs used to illustrate some important topics of the dynamics of rigid bodies in a mechanics course in the university are presented. All the designs use low-cost materials, available in the physics laboratories. One of the designs uses a body with a non-conventional geometry, and the other two experiments deal with cases proposed in several texts as challenges.

Keywords: Problem solving, modeling, experiments with rigid bodies.

PACS: 01.50.My, 01.50.Pa, 01.50.Qb

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Como docentes organizadores de un curso de mecánica para estudiantes de ingeniería hemos encontrado ciertas dificultades para expandir la oferta de experimentos que puedan realizar los alumnos en torno al tema de la mecánica de cuerpos rígidos, y que al mismo tiempo esos experimentos queden al alcance del bagaje de conocimiento que los alumnos hayan alcanzado del tema durante el desarrollo del curso, a fin de que la práctica experimental sea aprovechable por ellos y les mejore la comprensión de los tópicos más destacados.

Si bien en la literatura especializada se encuentran propuestas experimentales muy variadas [1, 2, 3, 4, 5], observamos que cada una de éstas desarrolla conceptos específicos, y su adecuación al desarrollo de un curso que lleva adelante su propio temario queda, en cierto modo, limitada. Asimismo, las propuestas experimentales publicadas que aparecen como más atractivas y desafiantes [6], hacen necesario un mayor conocimiento de técnicas de cálculo para modelar los problemas, como por ejemplo el formalismo lagrangiano, pero éste usualmente no se presenta en un curso elemental de mecánica.

Otras dificultades se relacionan con el acceso experimental a variables físicas como la velocidad, la aceleración o la energía. Cuando estas variables se miden con precisión aportan, en conjunto, información relevante para el análisis de la mecánica del cuerpo rígido. Una forma de acceder a estos datos consiste en, por ejemplo,

usar técnicas de video para registrar en detalle el movimiento [7] o bien sensores de movimiento vinculados a un sistema de toma de datos por computadora [8, 9].

En este trabajo compartimos experimentos para acompañar el dictado de temas relacionados con la dinámica de un cuerpo rígido, tal como se los brinda normalmente en un curso estándar de mecánica en los primeros años de estudio de una carrera de ciencias o ingeniería. Hemos buscado diseños que reúnan las siguientes características: a) que sean simples y de bajo costo, de modo que su replicación no ofrezca dificultad y así poder incorporarlos a cursos numerosos; b) que la física involucrada esté al alcance de todos los alumnos que tomen el curso por primera vez; c) que ilustren aspectos centrales de la dinámica de un cuerpo rígido; d) que no requieran de equipamiento sofisticado para su realización.

Esto nos ha llevado, por un lado, a tomar la idea de aprovechar la conversión a experimentos de ciertos problemas clásicos que se presentan en los cursos y que los estudiantes resuelven rutinariamente.[10] De esta manera, las actividades que pueden desarrollarse aportan a la comprensión e integración de conceptos ya que vinculan aspectos de la resolución de problemas, la modelización y la puesta a prueba de hipótesis o modelos por medio de la experimentación.[11] Asimismo, cabe señalar que las actividades buscan remarcar aspectos importantes del trabajo experimental como son el análisis de datos y la conexión de los resultados con las expectativas que surgen del modelado de un problema.

Por otra parte, dadas las características de los experimentos que presentamos, no es completamente necesario tener acceso a sistemas de medición automáticos, y por lo tanto las experiencias se podrían hacer en laboratorios que dispongan sólo de instrumentos básicos como reglas, calibres, cronómetros y balanzas.

A continuación, en distintas secciones se presentan una demostración y dos experimentos que puntualizan sobre conceptos de la dinámica del cuerpo rígido, a saber: rodadura de cuerpos de distintos momentos de inercia, péndulo físico con centro de masas variable, y pequeñas oscilaciones de esferas en canales cilíndricos. En todos los casos los alumnos pueden ser guiados para que ejerciten las observaciones y los experimentos desde la concepción formal de un modelo físico hasta la construcción del dispositivo experimental.

II. CUERPOS QUE RUEDAN

En lo que concierne a la rodadura de cuerpos, en varios libros de texto [12, 13] se considera el movimiento sobre un plano inclinado de cuerpos que se liberan simultáneamente de una misma altura. Es común el análisis de “carreras” que tienen como “contrincantes” a dos esferas macizas de distintos radios y masas, o a una maciza contra una hueca de iguales radios y masas, o de cilindros y aros, etcétera. Las geometrías simétricas de estos cuerpos son familiares a los alumnos y el cálculo de los respectivos momentos de inercia suele ser tratado previamente al planteo de la pregunta.

Pero consideremos el caso de cuerpos que no presentan geometrías usuales. Dos de estos cuerpos, que se muestran en la Figura 1, tienen igual masa, están contruidos con las mismas partes, pero distribuidas de diferente manera. Los cuerpos están armados con dos discos compactos conectados por tres cilindros de madera del mismo largo. La disposición de los elementos es tal que la simetría de cada cuerpo respecto del eje longitudinal que pasa por el centro de masas queda preservada.



FIGURA 1. Dos cuerpos contruidos con los mismos elementos pero que presentan distinta distribución de la masa en torno al eje de rotación.

Si simultáneamente estos cuerpos se liberan desde la misma altura para que rueden sobre un plano inclinado, ¿cuál de ellos llega primero a la base? Detrás del razonamiento cualitativo que un alumno tiene que hacer para arribar a la respuesta están los conceptos de simetría, distribución de masa, momento de inercia y el teorema de los ejes paralelos, que sintetizan en buena medida los elementos básicos necesarios para el tratamiento del movimiento de cuerpos rígidos.

Tras decidir sus respuestas, los alumnos pueden observar la rodadura de los cuerpos a lo largo de un plano inclinado con un ángulo pequeño. En un proceso de retroalimentación, los alumnos pueden revisar sus razonamientos a la luz del resultado de sus observaciones. Un problema complementario consiste en calcular el momento de inercia de cada cuerpo compuesto de: dos discos con agujero, tres barras homogéneas y seis tornillos (estos tornillos pueden considerarse como masas puntuales). Esto requiere de mediciones de las dimensiones de cada parte (masa, longitud, radios) y los correspondientes cálculos.

III. PÉNDULO FÍSICO CON CENTRO DE MASA VARIABLE

El concepto de péndulo físico aparece como un tema de la dinámica del cuerpo rígido que involucra los conceptos de centro de masas, momento de inercia y la Segunda Ley de Newton aplicada a un sistema continuo en rotación, los cuales se integran a un concepto singular como son las oscilaciones armónicas.

Un problema de resolución que aparece en el libro de Sears *et al.* [14] consiste en determinar cómo varía el período de un péndulo formado por una varilla que tiene adosada una pequeña masa, la cual puede ubicarse a una distancia variable del eje de suspensión del sistema, ubicado en la parte más alta de la varilla. Nuestra realización se muestra esquemáticamente en la Figura 2, en la que un tubo de masa M y largo L reemplaza a la varilla y el cuerpo pequeño es una esfera de masa m .

El período del péndulo puede obtenerse con la expresión general para el caso de pequeñas amplitudes de oscilación y rozamiento despreciable:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{eje}}{(M+m)gD}} \quad (1)$$

Aquí, I_{eje} es el momento de inercia del sistema con respecto al eje de suspensión, g es la aceleración de la gravedad ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$), y D la distancia entre el centro de masa del péndulo y el eje de suspensión, a saber:

$$D = \frac{M \frac{L}{2} + md}{M + m} \quad (2)$$

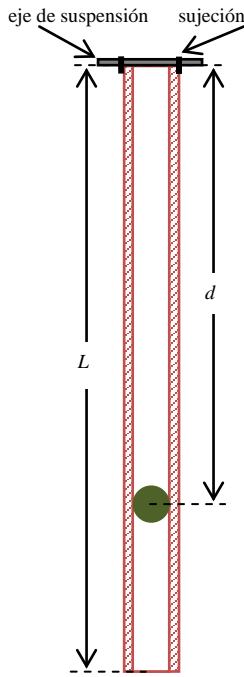


FIGURA 2. Péndulo con centro de masa variable.

En este péndulo compuesto I_{eje} es la suma de los momentos de inercia del tubo I_{tubo} y de la esfera I_{esfera} con respecto al eje de suspensión:

$$I_{eje} = I_{tubo} + I_{esfera} \quad (3)$$

Para un tubo de largo L y radios externo e interno R_{ext} y R_{int} , respectivamente:

$$I_{tubo} = \frac{1}{4} M (R_{ext}^2 + R_{int}^2) + \frac{1}{3} ML^2 \quad (4)$$

El momento de inercia de la esfera respecto del eje de suspensión es:

$$I_{esfera} = \frac{2}{5} mr^2 + md^2 \quad (5)$$

El primer término en (5) corresponde al momento de inercia de la esfera con respecto a un eje que pasa por su centro de masas, y el segundo término resulta de la aplicación del teorema de los ejes paralelos, donde d es la distancia entre el centro de la esfera y el eje de suspensión.

Vale la pena analizar la expresión del período como una función de las variables que intervienen después de reemplazar en (1) por las expresiones de D y I_{eje} . En primer lugar, en el péndulo utilizado –de 58 cm de longitud y de r de 1 cm (ver TABLA I)–, el primer término representa la distribución de masa en la esfera despreciable frente al segundo término y la distribución de la masa a lo largo del

tubo). Por lo tanto, el momento de inercia del tubo puede ser considerado como el de una varilla homogénea de masa M y longitud L . En segundo lugar, el término $2/5mr^2$ que corresponde al momento de inercia de la esfera con respecto a su centro, es comparable a la aproximación del momento de inercia del tubo $I_{tubo} = 1/3ML^2$ sólo si m es del orden de $M (L/d)^2$. Con los datos de la TABLA I esto se cumple en el caso extremo de una relación de masas $m/M \approx 10^4$, mientras que para el péndulo utilizado $m/M \approx 0,2$, por lo que el término $2/5mr^2$ también puede ser despreciado frente a $1/3ML^2$.

En conclusión, el péndulo puede ser tratado como una varilla larga de masa M y longitud L a la que se le adhiere una masa puntual m a distancia variable d respecto del eje de suspensión. Con esto, el momento de inercia del péndulo puede ser expresado como:

$$I_{eje} \approx \frac{1}{3} ML^2 + md^2, \quad (6)$$

y resulta una expresión simplificada del período:

$$T(d) \approx 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} ML^2 + md^2}{g \left(M \frac{L}{2} + md \right)}}, \quad (7)$$

donde ha sido usada la expresión (2) para $D(d)$. Estas expresiones son empleadas *a priori* en el análisis de un denominado “péndulo no-intuitivo” formado por dos cuerpos, aunque sin la presentación de una adecuada justificación (ver, por ejemplo, [15]).

Finalmente, cuando se analizan las diferencias que aparecen en el período si se utiliza el momento de inercia aproximado, se encuentra que tal período difiere en menos del 2% respecto del obtenido con el momento de inercia exacto. La Figura 3 muestra estas leves discrepancias para diferentes valores de m/M . Desde arriba hacia abajo se muestran curvas para: $m/M = 1, 10, 100$. La curva inferior corresponde al caso de un péndulo simple de longitud d . Para representar los casos se utilizaron los valores de la TABLA I.

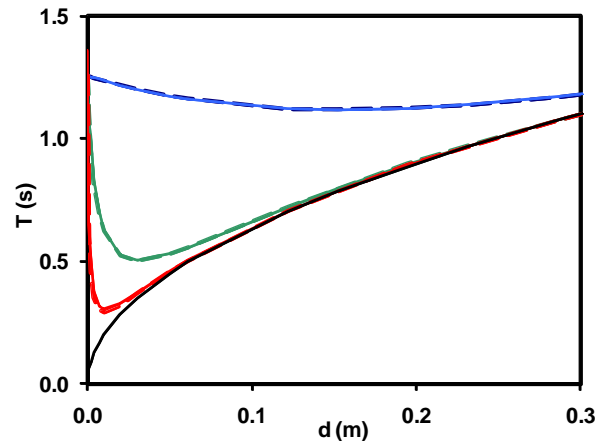


FIGURA 3. Período del péndulo físico en función de la distancia de la esfera al eje de suspensión, para diferentes razones m/M .

A. Diseño experimental

El péndulo construido está formado por un tubo de PVC y una esfera de acero. En la TABLA I se indican las dimensiones del tubo y de la esfera.

El eje de suspensión del péndulo es una varilla rígida delgada (6 cm de longitud, 2 mm de diámetro), y puede fijarse en el extremo del tubo con dos ganchos construidos con el alambre de clips metálicos. Los ganchos se pegan con un adhesivo instantáneo. En términos generales, no es difícil encontrar una esfera que ajuste dentro de un tubo de manera que se pueda fijar su posición con comodidad.

Cuando el eje horizontal se apoya sobre dos bloques de acero el péndulo puede oscilar con escasa amortiguación, de manera que se pueden observar unos 50 ciclos. Cronometrando el tiempo de N ciclos, Δt , se obtiene el valor del período como $T = \Delta t / N$; en nuestro caso $N = 40$.

El cambio de posición de la esfera en el tubo modifica la posición del centro de masas del sistema y su momento de inercia respecto del eje. En este experimento se determina cómo varía el período para distintas posiciones d de la esfera dentro del tubo.

TABLA I. Dimensiones de las partes del péndulo físico.

| Tubo | |
|---------------|-------------------------------|
| Longitud | $L = (0.587 \pm 0.001)$ m |
| Masa | $M = (74.2 \pm 0.1)$ g |
| Radio interno | $R_{int} = (7.7 \pm 0.1)$ mm |
| Radio externo | $R_{ext} = (10.4 \pm 0.1)$ mm |
| Esfera | |
| Masa | $M = (16.8 \pm 0.1)$ g |
| Radio | $r = (7.7 \pm 1.1)$ mm |

B. Resultados

La Figura 4 muestra el período de oscilación del péndulo construido, medido para diferentes posiciones d de la esfera dentro del tubo, y su comparación con el modelo. La línea continua representa el período calculado usando todos los términos del I_{eje} . En tanto, línea punteada corresponde al período calculado usando la aproximación (7).

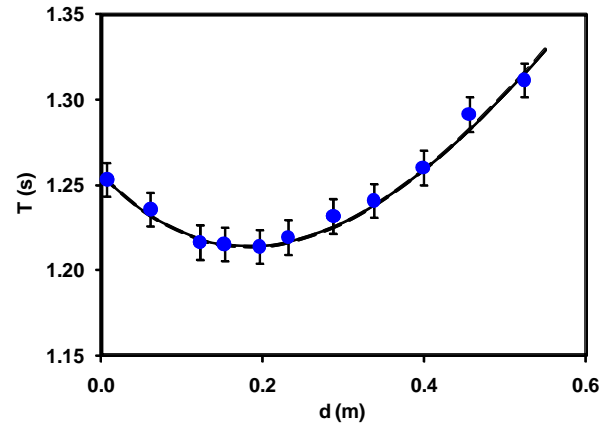


FIGURA 4. Período del péndulo para diferentes posiciones de la esfera dentro del tubo.

Puede observarse la consistencia de la aproximación propuesta ya que la discrepancia con el resultado exacto es muy leve.

Un experimento de este tipo, desde el armado del péndulo y su montaje hasta las mediciones, puede llevar alrededor de 3 horas, lo que lo hace accesible para practicarlo en un curso universitario.

IV. OSCILACIÓN DE UNA ESFERA EN CANALES CILÍNDRICOS

El caso de una esfera de radio r que realiza pequeñas oscilaciones dentro de un canal cilíndrico de radio R está presentado en la bibliografía para ser analizado de diferentes maneras, ya sea en el caso especial en que hay una relación definida entre r y R como considera Serway [16] o cuando $r \ll R$ como proponen Tipler y Mosca [17]. En ambos casos las consignas solicitan demostrar que la esfera puede oscilar con movimiento armónico simple y encontrar una expresión para el período T en función de las dimensiones de la esfera y del canal.

Si se supone que la esfera rueda sin deslizamiento en el canal, el abordaje teórico para este problema puede ser el dinámico o el energético que, aunque presentan distintos grados de complejidad, conducen al mismo resultado.

Para el análisis dinámico se recurre a la esquematización de la situación y se realiza un diagrama de cuerpo libre, como se muestra en la Figura 5.

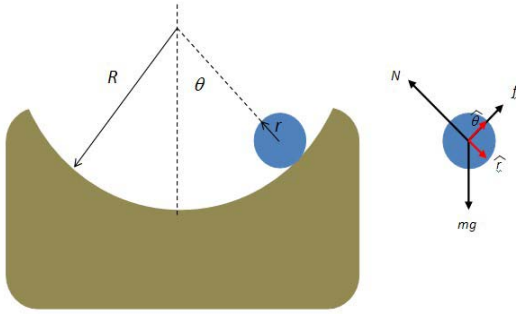


FIGURA 5. a) Una esfera de radio r que oscila en un canal cilíndrico de radio R . b) Diagrama de cuerpo libre donde se indican las fuerzas actuantes sobre la esfera: peso, normal al canal y la fuerza de roce necesaria para la rodadura. Sólo es necesario considerar el movimiento en la dirección del versor angular $\hat{\theta}$.

El análisis indica que en la dirección $\hat{\theta}$ se cumple:

$$-m g \sin\theta + f = m \frac{dv}{dt}, \quad (8)$$

donde θ es el ángulo que define la posición angular de la esfera en el canal respecto de la posición de equilibrio, v es la velocidad tangencial del centro de masas de la esfera a lo largo de un tramo de circunferencia que tiene un radio $(R - r)$, y f es la fuerza de roce entre la esfera y el canal. El módulo de la velocidad tangencial del centro de masas está relacionada con el módulo de la velocidad angular ω ($\omega = d\theta/dt$) respecto del centro de curvatura del canal por:

$$v = \omega (R - r). \quad (9)$$

La fuerza de rozamiento produce a la esfera un momento de rotación respecto de un eje que pasa por su centro de masas y que es paralelo al eje longitudinal del canal, que lo tomamos con eje z . Este momento tiene módulo:

$$f r = I \alpha, \quad (10)$$

donde α es la aceleración angular de la esfera alrededor de su centro de masas e $I = (2/5)mr^2$ es su momento de inercia. Considerando la condición de rodadura sin deslizamiento, tenemos que es válida la ecuación de vínculo entre la velocidad v de la esfera y su velocidad angular Ω de su rotación en torno al eje que pasa por su centro de masas:

$$v = r \Omega. \quad (11)$$

Dado que dependiendo del sentido del movimiento de la esfera sobre el canal, $\omega_z = \pm|\omega|$ y simultáneamente $\Omega_z = \mp|\Omega|$, es decir ω y Ω son opuestas, las velocidades angulares quedan relacionadas a través de

$$\Omega_z = -\omega_z \frac{R - r}{r}. \quad (12)$$

Usando $\alpha = d\Omega/dt$, se obtiene de (10) la fuerza de roce, que puesta en (8) lleva a deducir la ecuación de movimiento de la esfera sobre el canal:

$$\ddot{\theta} = -\frac{5}{7} \frac{g}{(R - r)} \sin(\theta). \quad (13)$$

En el caso de oscilaciones de amplitudes pequeñas, $\sin(\theta) \approx \theta$, y (13) se reduce a la ecuación de un oscilador armónico simple que oscila con un período constante dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \frac{R - r}{g}}. \quad (14)$$

De este modo, el modelo predice un período de oscilación que mantiene una relación lineal entre su cuadrado T^2 y la diferencia $(R - r)$ de los radios del tubo y la esfera:

$$T^2 = \frac{28}{5g} \pi^2 (R - r). \quad (15)$$

Nótese que el factor $28\pi^2/5g = 5.63 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ es constante e independiente de los tamaños de la esfera que oscila y del canal. Si la ecuación (15) puede ser verificada experimentalmente observando oscilaciones de pequeñas amplitudes, se está verificando, entre otras cosas, que el cuerpo rueda sin deslizar, una condición que de otra forma es más difícil de discernir. A continuación, se muestra el diseño experimental y los resultados obtenidos junto a la correlación que presentan con el modelo desarrollado.

A. Diseño experimental

La TABLA II detalla las dimensiones de las esferas usadas, de acero, vidrio y plástico. Los canales cilíndricos son tubos de plástico –como los que se usan como tubos de desagüe– y recipientes cilíndricos de PVC, cuyos radios se dan en la TABLA III.

Para determinar el período de oscilación T se empleó un cronómetro y el siguiente procedimiento: se dejó oscilar la esfera dentro de los tubos midiendo el tiempo Δt de 10 oscilaciones, para luego determinar el período mediante $T = \Delta t / 10$.

TABLA II. Datos de las esferas usadas.

| Esfera | Material | Radio (mm) |
|--------|----------|-------------------|
| 1 | acero | 2.375 ± 0.025 |
| 2 | acero | 4.75 ± 0.05 |
| 3 | acero | 6.25 ± 0.05 |
| 4 | vidrio | 7.50 ± 0.05 |
| 5 | acero | 12.75 ± 0.05 |
| 6 | plástico | 12.75 ± 0.05 |

TABLA III. Radios de los canales cilíndricos usados.

| Canal | R (mm) |
|-------|-----------------|
| 1 | 52.5 ± 0.5 |
| 2 | 80.0 ± 0.5 |
| 3 | 119.5 ± 0.5 |
| 4 | 143.0 ± 0.5 |

B. Resultados

En el gráfico de la Figura 6 se muestran los resultados de los T^2 en función de la diferencia $R - r$. Observamos una buena correlación de los datos con lo que se espera de la aplicación de la expresión (15). La pendiente del gráfico difiere sólo en un 2.3% del valor esperado.

Debe notarse que este resultado proviene del estudio de las oscilaciones de esferas metálicas o de plástico duro sobre canales de PVC. Las mismas esferas puestas a oscilar en canales de poliuretano expandido presentan un amortiguamiento tal que alejan las condiciones experimentales de las usadas para la deducción del modelo que lleva a la expresión (15).

Asimismo, durante los experimentos debe cuidarse que el movimiento oscilatorio de las esferas no sufra desviaciones apreciables de la dirección tangencial.

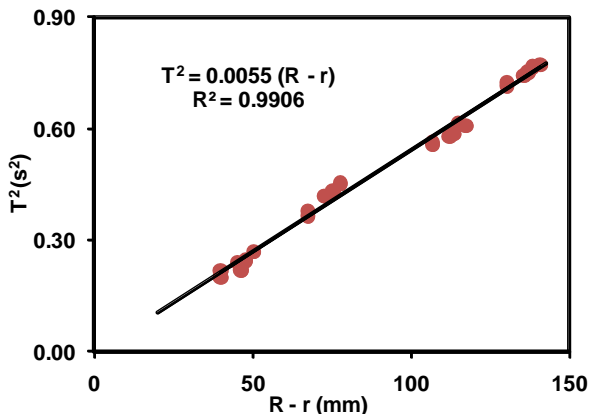


FIGURA 6. El gráfico muestra la relación lineal del período al cuadrado T^2 respecto de la diferencia de los radios $R - r$. Los cuatro grupos de datos corresponden a las mediciones de los períodos de las esferas en cada uno de los cuatro tubos.

Vale la pena comentar que el uso de esferas de goma de dos o tres centímetros de diámetro no produce resultados compatibles con la expectativa del modelo, y que esto posiblemente se deba a que no se satisface la condición de rodadura sin deslizamiento de esferas de ese material sobre los canales de plástico o PVC. Asimismo, el tamaño de las esferas a usar está limitado por el amortiguamiento, así es que esferas más pesadas oscilan más tiempo y a la vez producen resultados que se correlacionan mejor con las expectativas del modelo.

V. CONCLUSIONES

Los experimentos presentados responden a necesidades de nuestros cursos de una carrera de ingeniería. No obstante, creemos que son viables durante el desarrollo de cursos análogos de los primeros años universitarios. Por un lado, nuestra propuesta da continuidad a la idea de generar nuevas experiencias para el laboratorio de física, coherentes con el tipo de problemas que se realizan habitualmente en los cursos regulares, lo que a nuestro entender redundaría en una mejor comprensión de los conceptos teóricos de la dinámica de un cuerpo rígido por parte de los alumnos. Por otro lado, el desarrollo de actividades de este tipo puede servir para incorporar nuevos experimentos usando elementos accesibles y de bajo costo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto UNGS-IDEI 30/4019. Agradecemos a María Llera por la lectura crítica del original y sus sugerencias.

REFERENCIAS

- [1] Rafat, M. Z., Wheatland, M. S., and Bedding, T. R., *Dynamics of a double pendulum with distributed mass*, Am. J. Phys. **77**, 216 (2009).
- [2] Couillet, P., Gilli, J. M., Monticelli, M., and Vendenbergh, N., *A damped pendulum forced with a constant torque*, Am. J. Phys. **73**, 1122 (2005).
- [3] Goriely, A., Boulanger, P., and Leroy, J., *Toy models: The jumping pendulum*, Am. J. Phys. **74**, 784 (2006).
- [4] Baker, G. L., *Probability, pendulums, and pedagogy*, Am. J. Phys. **74**, 486 (2006).
- [5] Simbach, J. C., and Priest, J., *Another look at a damped physical pendulum*, Am. J. Phys. **73**, 1079 (2005).
- [6] Carnevali, A., and May, R., *Rolling motion of non-axisymmetric cylinders*, Am. J. Phys. **73**, 909 (2005).
- [7] Olivieri, N. A., Núñez, P. A., y Rodríguez, E. E., *Rodadura de una esfera sobre un plano inclinado. Mejoras al experimento desarrollado en el "plano de Packard"*, aceptado para su publicación en Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 4 (2), mayo de 2010.
- [8] Pecori, B., and Torzo, G., *The Maxwell wheel investigated with MBL*, Phys. Teach. **36**, 362 (1998).
- [9] Gianino, C., *An MBL experiment to analyze the torque on a rigid body*, Phys. Teach. **47**, 224 (2009).
- [10] Rodríguez, E. E., Núñez, P. A., Veliz, M., *Generación de experimentos a partir de problemas tradicionales*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 625-630 (2009).
- [11] Baird, D. C., *Experimentación* (2ª edición, Prentice Hall, México, 1991).

Néstor A. Olivieri, Pablo A. Nuñez y Eduardo E. Rodríguez

[12] Serway, R., and Jewett, J. W., *Física para ciencias e ingeniería*, Vol. 1, (Ed. Cengage Learning–Thompson Internacional, sexta edición, México, 2005).

[13] Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D. y Freed-man, R. A., *Física universitaria*, Vol. 1 (Pearson Educación, décimo primera edición, México, 2004).

[14] Sears, F.W. *et al.*, *op. cit.*, cap. 13, pág. 514, problema 13.99.

[15] Sherfinski, J., *A counterintuitive physical pendulum lab*, *Phys. Teach.* **35**, 252 (1997).

[16] Serway, R. *et al.*, *op. cit.*, pág. 332, problema 76.

[17] Tipler P. and Mosca E., *Physics for scientists and engineers* (6th ed., W. H. Freeman, 2005); cap. 14, problema 100.