

# Estrategia EE (Excel-Euler) en la enseñanza de la Física



**Ricardo Buzzo Garrao**

*Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Avenida Brasil 2950, Valparaíso, Chile.*

**E-mail:** rbuzzo@ucv.cl

(Recibido el 18 de Julio de 2007; aceptado el 12 de Agosto de 2007)

## Resumen

Este trabajo pretende mostrar los beneficios en la enseñanza de ciertos tópicos de Física, del uso en conjunto de dos herramientas: un método numérico como el algoritmo de Euler y un programa utilitario como la planilla electrónica Excel. Permite abordar en cursos básicos de Física, interesantes problemas que comúnmente no se tratan por no disponer de las herramientas matemáticas adecuadas. A través de esta metodología se postula la ventaja de tener posibilidad de acceder con facilidad a soluciones que permitan visualizar la evolución temporal de los sistemas estudiados, tratando así de lograr una conceptualización numérica y gráfica.

**Palabras clave:** Enseñanza de la mecánica, Preconcepciones en Física, Métodos numéricos y planillas electrónicas.

## Abstract

This work intends to show the benefits, in the teaching of some topics in Physics, of the joint use of two tools: a numerical method like Euler's algorithm, and a spreadsheet program, like Excel™. This approach makes it possible to study interesting problems that are not usually considered in introductory physics courses because the necessary mathematical tools are not available. By using this methodology we have the advantage of easily accessing solutions that allow visualizing the temporal evolution of the systems under study, thus making possible a numerical and graphical conceptualization.

**Key words:** Teaching mechanics, Preconceptions in Physics, Numerical methods and electronic tables.

**PACS:** 45.10-b, 02.70-c, 01.40.Ha, 01.40.Fk, 01.40.gb, 01.50.H, 02.60.Cb.

ISSN 1870-9095

## I. INTRODUCCIÓN

Una crítica común que se hace a la enseñanza de la Física en la enseñanza media y en cursos básicos de la universidad, es que en ellos se tratan temas demasiado modelados, llenos de restricciones y alejados de los problemas reales que son los que más interesan a los alumnos.

Esto forma en el estudiante la percepción que la Física es una disciplina alejada de las situaciones que se dan en el mundo que los rodea.

¿Por qué esta limitante? La respuesta está en la falta de herramientas matemáticas para el tratamiento analítico de problemas del mundo real.

Problemas como el movimiento de un cuerpo en un medio viscoso o el estudio de oscilaciones amortiguadas y forzadas, exigen de matemáticas que no posee el alumno en los momentos aludidos por nuestro estudio.

Nuestro trabajo postula que esta dificultad queda superada a través del uso de un sencillo método numérico como es el algoritmo de Euler el cual puede ser desarrollado fácilmente utilizando la planilla electrónica Excel.

Adicionalmente creemos que la metodología propuesta puede servir de ayuda a la remoción de preconcepciones tan presentes en el aprendizaje de Física, a través de la visualización de la evolución temporal de los sistemas estudiados

Nuestra propuesta está estructurada de la siguiente manera: primero presentamos algunas propiedades del método numérico utilizado, luego una justificación del por qué usar Excel y finalmente mostramos algunos ejemplos en los cuales queda en evidencia la utilidad del uso de la estrategia EE en la enseñanza de la Física.

## II. EL ALGORITMO DE EULER

Normalmente resolver un problema en Física significa encontrar la solución de una ecuación diferencial.

La técnica estándar para la solución numérica de ecuaciones diferenciales implica la transformación de una ecuación diferencial en una ecuación de diferencias finitas. Esto se puede hacer mediante muchos métodos numéricos de los cuales hemos elegido el algoritmo de Euler fundamentalmente por su simplicidad aunque conscientes

de que no es el método más eficiente en cuanto al arrastre de errores de cálculo y redondeo.

Fundamentalmente el algoritmo de Euler cambia el análisis de una curva (un problema difícil) en el análisis de muchas rectas (muchos problemas fáciles). Por eso es que este método es también llamado de pendiente constante [1].

Los problemas tratados en clases de cursos básicos de Física se modelan de tal forma que la aceleración presente sea constante.

Sin embargo en situaciones reales, tendremos aceleraciones explícitamente dependientes del tiempo  $a(t)$ , de la posición  $a(x)$ , de la velocidad  $a(v)$  o en caso más general  $a(t,x,v)$ .

Cualquiera sea el caso, si aplicamos el algoritmo de Euler, el método será el siguiente:

- 1) Dividir el intervalo de tiempo estudiado en  $N$  partes lo que definirá lo que llamaremos paso de tiempo  $DT$ . Mientras más grande sea  $N$  la aproximación numérica se acercará más a la solución analítica del problema.
- 2) Identificar la estructura de la aceleración.
- 3) Considerando las condiciones iniciales establecer los valores iniciales para trabajar.
- 4) Avanzando en el tiempo de acuerdo al paso de tiempo  $DT$  usamos como algoritmo,

$$v_{actual} = v_{anterior} + a_{anterior} * DT, \quad (1)$$

$$x_{actual} = x_{anterior} + v_{actual} * DT. \quad (2)$$

- 5) Efectuar un proceso iterativo hasta llegar al final del intervalo de tiempo estudiado.

### III. ¿POR QUÉ EXCEL?

Hace ya bastante tiempo se ha planteado el uso de métodos numéricos en la enseñanza de la Física [1,2,3].

Sin embargo, estas propuestas contemplaban para el proceso iterativo, el uso de programación a través de un lenguaje computacional.

Esto presenta como dificultad de aplicación, el hecho de que el profesor debe saber programar y el colegio o universidad donde se aplique debe tener el compilador correspondiente al lenguaje usado.

También se puede desarrollar el algoritmo de Euler usando un software como MATHEMATICA, pero con la dificultad de alto costo de todos estos paquetes computacionales.

En EXCEL, los procesos iterativos se pueden hacer con mucha facilidad utilizando la copia de procedimientos y el algebra básica necesaria para el algoritmo. Por lo tanto el profesor y los alumnos no necesitan saber programar para trabajar.

Además, casi todo computador que usa sistema operativo WINDOWS, tiene el paquete utilitario OFFICE, con lo cual EXCEL resulta de muy fácil accesibilidad. De hecho en Chile a través del programa ENLACES del Ministerio de Educación, casi el 100% de los colegios tienen computadores con EXCEL.

## IV. EULER Y EXCEL EN ACCIÓN

### A. Oscilador amortiguado forzado

Un problema importante con muchas aplicaciones en la vida real es aquel de las vibraciones de un oscilador, que resultan cuando aplicamos una fuerza oscilatoria externa a una partícula sometida a una fuerza elástica.

Sea  $F = F_0 \cos \omega_f t$  la fuerza oscilante aplicada, siendo  $\omega_f$  su frecuencia angular. Suponiendo que la partícula está sometida a una fuerza elástica  $-kx$  y a una fuerza de amortiguamiento  $-bv$ , su ecuación de movimiento será:

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega_f t, \quad (3)$$

de donde

$$a = -(k/m)x - (b/m)v + (F_0/m) \cos \omega_f t. \quad (4)$$

Se trata de determinar a partir de esta ecuación,  $x$ ,  $v$ ,  $a$ , en cualquier instante.

Datos de entrada:  $k, m, b, F_0, \omega_f, x_0, v_0, DT$ .

Rutina: Tomar valores iniciales de  $v$  y  $x$ , y con ellos valorizar  $a$ .

$$v_{actual} = v_{anterior} + a_{anterior} * DT, \quad (5)$$

$$x_{actual} = x_{anterior} + v_{actual} * DT, \quad (6)$$

$$t_{actual} = t_{anterior} + DT. \quad (7)$$

Repetir el proceso múltiples veces.

La planilla adopta una apariencia como la mostrada a continuación:

TABLA I. Oscilador amortiguado forzado

tiempo	Aceleración	Velocidad	Posición
0.00	0.40	6.00	0.00
0.20	-0.34	6.08	1.22
0.40	-1.08	6.01	2.42
0.60	-1.79	5.79	3.58
0.80	-2.46	5.44	4.66
1.00	-3.06	4.95	5.65
1.20	-3.59	4.33	6.52
1.40	-4.04	3.61	7.24
1.60	-4.39	2.81	7.80
1.80	-4.64	1.93	8.19
2.00	-4.77	1.00	8.39
2.20	-4.80	0.05	8.40
2.40	-4.71	-0.91	8.22
2.60	-4.51	-1.85	7.85
2.80	-4.21	-2.76	7.30
3.00	-3.81	-3.60	6.58
3.20	-3.33	-4.36	5.70
3.40	-2.77	-5.03	4.70
3.60	-2.15	-5.58	3.58
3.80	-1.48	-6.01	2.38
4.00	-0.78	-6.31	1.12

Con ella se puede hacer análisis de datos o construir gráficos como los indicados:

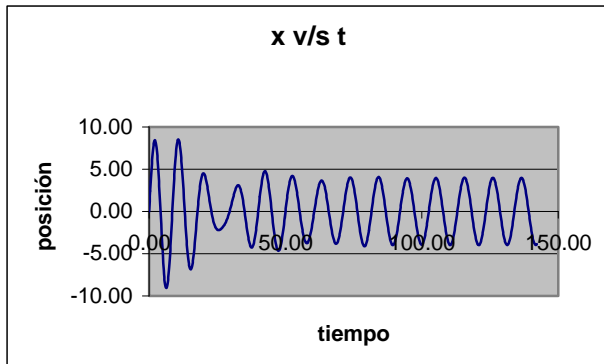


FIGURA 1. Oscilador amortiguado forzado. Gráfico posición v/s tiempo.

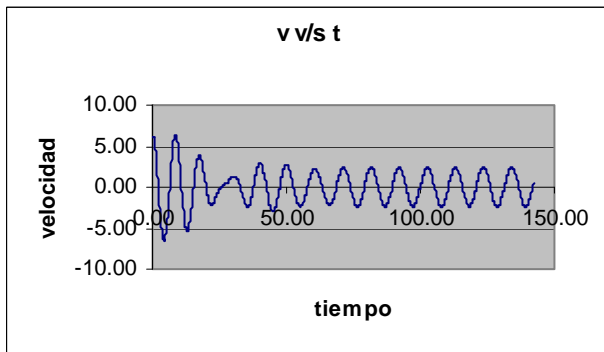


FIGURA 2. Oscilador amortiguado forzado. Gráfico velocidad v/s tiempo.

Dadas las propiedades de Excel, se pueden tratar diferentes situaciones variando solo los datos de entrada, con recálculo automático. Además, al estudiar el sistema desde  $t=0$ , es posible visualizar la etapa transiente (fase que va desde  $t=0$  hasta que se alcanza el régimen estacionario), cosa que no hacen la mayoría de los libros que solo abordan la etapa estacionaria.

**B. Proyectil con roce**

Este problema es el que muestra con mayor evidencia, la fortaleza de la metodología usada ya que si uno utiliza el modelo  $-bv^2$  para el roce del aire, la solución analítica de este problema es muy difícil, a cualquier nivel [4]. Sin embargo usando Euler el tratamiento del problema es el mismo que para otros.

En este caso si en cualquier instante, la velocidad del proyectil forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal las ecuaciones de movimiento serán:

$$ma_x = -bv^2 \cos \theta, \tag{8}$$

$$ma_y = -mg - bv^2 \text{sen} \theta, \tag{9}$$

y como  $v_x = v \cos \theta$  y  $v_y = v \text{sen} \theta$ , la estructura de las componentes de la aceleración es:

$$a_x = -(b/m)vv_x, \tag{10}$$

$$a_y = -g - (b/m)vv_y. \tag{11}$$

Datos de entrada:  $m, b, v_0, \theta_0, x_0, y_0$ ,

$$v_{x,actual} = v_{x,anterior} + a_{x,anterior} * DT, \tag{12}$$

$$v_{y,actual} = v_{y,anterior} + a_{y,anterior} * DT, \tag{13}$$

$$x_{actual} = x_{anterior} + v_{x,actual} * DT, \tag{14}$$

$$y_{actual} = y_{anterior} + v_{y,actual} * DT, \tag{15}$$

$$t_{actual} = t_{anterior} + DT. \tag{16}$$

Repetir el proceso múltiples veces.

TABLA II. Proyectil con roce. Datos de entrada:  $v_0=30$ [m/s],  $\theta_0=37^\circ, b=0.1$ [Ns<sup>2</sup>/m<sup>2</sup>],  $g=10$ [m/s<sup>2</sup>],  $m=5$ [kg],  $DT=0.01$ [s].

t(s)	a <sub>x</sub> (m/s <sup>2</sup> )	v <sub>x</sub> (m/s)	x(m)	a <sub>y</sub> (m/s <sup>2</sup> )	v <sub>y</sub> (m/s)	y(m)
0.00	-14.38	23.96	0.00	-20.83	18.05	0.00
0.01	-14.17	23.82	0.24	-20.62	17.85	0.18
0.02	-13.98	23.67	0.47	-20.42	17.64	0.35
0.03	-13.79	23.53	0.71	-20.21	17.44	0.53
0.04	-13.60	23.40	0.94	-20.02	17.23	0.70
0.05	-13.41	23.26	1.18	-19.82	17.03	0.87
0.06	-13.23	23.13	1.41	-19.63	16.84	1.04
0.07	-13.05	22.99	1.64	-19.45	16.64	1.21
0.08	-12.88	22.86	1.87	-19.26	16.44	1.37
0.09	-12.71	22.73	2.09	-19.08	16.25	1.53
0.10	-12.54	22.61	2.32	-18.91	16.06	1.69
0.11	-12.37	22.48	2.54	-18.74	15.87	1.85
0.12	-12.21	22.36	2.77	-18.57	15.68	2.01
0.13	-12.05	22.24	2.99	-18.40	15.50	2.16
0.14	-11.90	22.12	3.21	-18.24	15.31	2.32
0.15	-11.75	22.00	3.43	-18.08	15.13	2.47
0.16	-11.60	21.88	3.65	-17.92	14.95	2.62
0.17	-11.45	21.76	3.87	-17.77	14.77	2.77
0.18	-11.30	21.65	4.08	-17.62	14.59	2.91
0.19	-11.16	21.54	4.30	-17.47	14.42	3.06
0.20	-11.02	21.42	4.51	-17.33	14.24	3.20
0.21	-10.89	21.31	4.73	-17.19	14.07	3.34
0.22	-10.75	21.20	4.94	-17.05	13.90	3.48
0.23	-10.62	21.10	5.15	-16.91	13.73	3.62
0.24	-10.49	20.99	5.36	-16.78	13.56	3.75
0.25	-10.36	20.89	5.57	-16.64	13.39	3.89

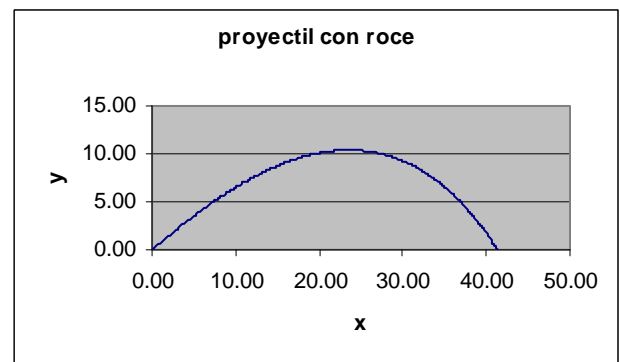


FIGURA 3. Proyectil con roce. Gráfico y v/s x.

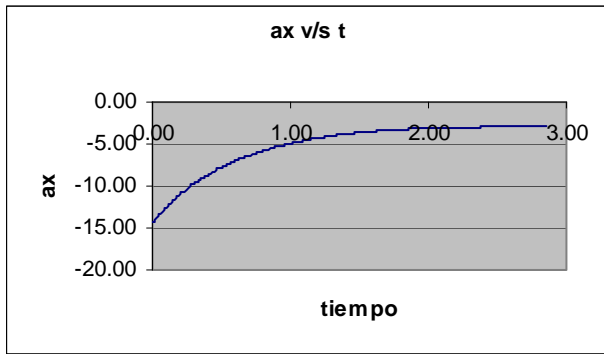


FIGURA 4. Proyectil con roce. Gráfico componente x de la aceleración v/s tiempo.

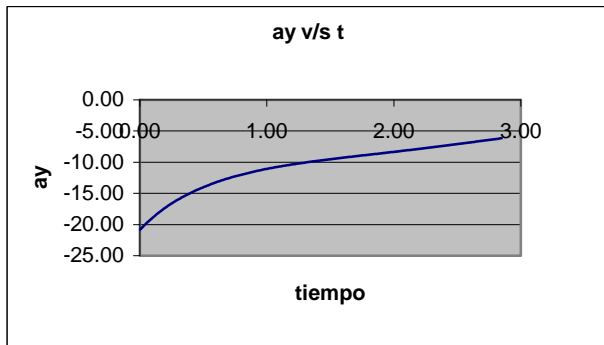


FIGURA 5. Proyectil con roce. Gráfico componente y de la aceleración v/s tiempo.

### III. ¿CÓMO PUEDE AYUDAR ESTA METODOLOGÍA A LA REMOCIÓN DE PRECONCEPTOS?

En el desarrollo del curso Física General Mecánica de prestación de servicio a los primeros años de las carreras de Ingeniería o sea un curso de nivel introductorio, se decidió realizar un problema en el cual estuviera presente una fuerza constante, una fuerza elástica y una fuerza de roce. El problema elegido fue el siguiente:

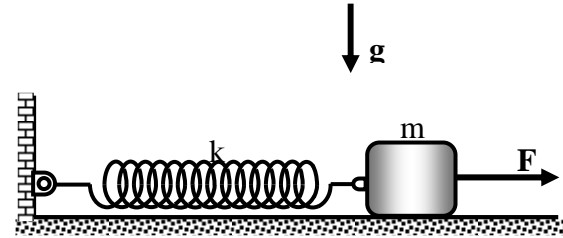


FIGURA 6. Masa sometida a una fuerza elástica, fuerza de roce y fuerza constante en la dirección horizontal.

$m$  está en reposo y el resorte está inextendido. De pronto se aplica una fuerza  $F$  horizontal constante. Determinar la distancia máxima que recorre  $m$  y la máxima velocidad que alcanza.  $k=100$  N/m,  $m=2$  kg,  $\mu=0.3$ ,  $F=90$  N.

Realizada la pauta de corrección, nos pareció un problema tradicional, sin mayores problemas, pero al momento de ver las soluciones de los alumnos, surgían algunas ideas erradas coincidentes como las siguientes: 1) Existiendo una fuerza  $F$  constante sobre el cuerpo, éste no se detendrá jamás. 2) El cuerpo se detiene cuando la fuerza

neta es cero. 3) La mayoría no sabía como calcular la velocidad máxima.

Consultando con otros colegas, respecto a una posible causa para que se repitiera con tanta insistencia la situación recién planteada, vimos que una posible explicación estaría en el hecho de que el método de balance de energía acostumbra a usar puntos extremos entre los cuales se hace el balance, sin considerar la evolución temporal de lo que sucede entre esos dos puntos. El estudiante en los niveles introductorios queda preparado en gran parte para solucionar un problema, cuando es capaz de formarse en la mente una película con la situación planteada, o sea cuando es capaz imaginarse una solución cualitativa del problema a través de la evolución temporal del sistema.

Gran parte de los preconceptos en Física, se generan justamente en que el alumno imagina para un sistema, un desarrollo temporal diferente al real. De ahí la importancia de que el alumno sea capaz de conocer la solución que permita conocer el estado de un sistema instante a instante. Si aplicamos la estrategia Excel-Euler al problema planteado, la estructura de la aceleración será:

$$a = (F / m) - (k / m)x - \mu g , \tag{17}$$

generando la siguiente tabla donde el alumno podrá ver la distancia máxima recorrida y la máxima velocidad alcanzada.

TABLA II. Oscilador amortiguado. Datos de entrada:  $F=90$ [N],  $m=2$ [kg],  $k=100$ [N/m],  $\mu=0.3$ ,  $x_0=0$ [m],  $v_0=0$ [m/s],  $DT=0.005$ [s].

$t(s)$	$a(m/s^2)$	$v(m/s)$	$x(m)$
0.000	42.060	0.000	0.000
0.005	42.007	0.210	0.001
0.010	41.902	0.420	0.003
0.015	41.745	0.630	0.006
0.020	41.535	0.839	0.010
0.025	41.274	1.046	0.016
0.030	40.961	1.253	0.022
0.035	40.596	1.457	0.029
0.040	40.181	1.660	0.038
0.045	39.716	1.861	0.047
0.050	39.201	2.060	0.057
0.055	38.637	2.256	0.068
0.060	38.025	2.449	0.081
0.065	37.365	2.639	0.094
0.070	36.658	2.826	0.108
0.075	35.906	3.009	0.123
0.080	35.109	3.189	0.139
0.085	34.268	3.364	0.156
0.090	33.384	3.536	0.174
0.095	32.458	3.703	0.192
0.100	31.492	3.865	0.211
0.105	30.486	4.022	0.231
0.110	29.442	4.175	0.252

Generando los siguientes gráficos:

#### IV. CONCLUSIÓN

Basado en los buenos resultados obtenidos en la aplicación de esta metodología por varios años en la asignatura Informática Educativa aplicada a la Enseñanza de la Física, en la formación de profesores de Física en el Instituto de Física de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, como también en talleres de capacitación de profesores [5], creo que la estrategia EE es un real aporte para lograr aprendizaje en Física, permitiendo abordar problemas reales a cualquier nivel y ayudando a la remoción de preconceptos a través de la conceptualización numérica y gráfica.

#### REFERENCIAS

- [1] Gould, H. and Tobochnik, J. (*Computer Simulation Methods*, Addison-Wesley, 1988).
- [2] Buzzo, R., *Caderno Catarinense de Ensino de Física* **9**, 143-146, (1992).
- [3] <http://www.sc.ehu.es/sWEB/fisica/default.htm>, Agosto 2007.
- [4] Parker, G., *Projectile motion with air resistance quadratic in the speed*, *Am. J. Phys.* **45**, (1977).
- [5] Buzzo, R., *Taller "Física con Microcomputador, una nueva forma de hacer y enseñar Física"*, REFIX, Salta, Argentina, (1995).

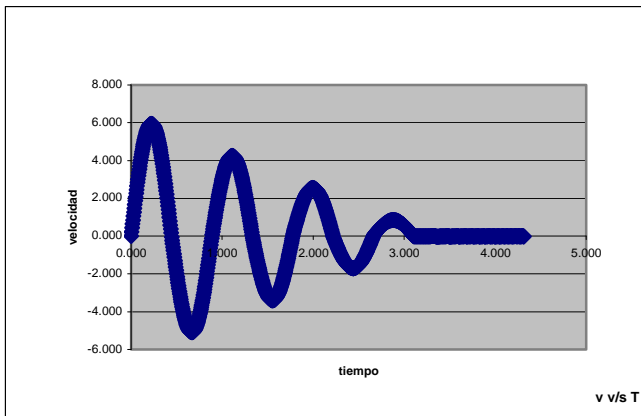


FIGURA 7. Gráfico velocidad v/s tiempo.

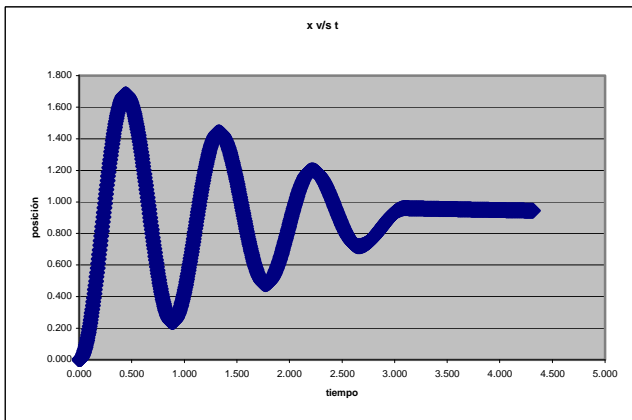


FIGURA 8. Gráfico posición v/s tiempo.