

Una idea profunda en la comprensión del mundo físico: el principio de superposición de estados



O. Organista, V. Gómez, D. Jaimés y J. Rodríguez

Grupo de Física Matemática, Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional, Calle 73 No. 11-95, Bogotá D. C., Colombia.

E-mail: jorganis@pedagogica.edu.co

(Recibido el 15 de agosto de 2007; aceptado el 10 de septiembre de 2007)

Resumen

Se presenta un conjunto de ejemplos del principio de superposición. Este conjunto se estructura de tal forma que la idea se va desarrollando progresivamente desde nociones elementales hasta la superposición de amplitudes de probabilidad cuánticas. Se muestran relaciones y diferencias entre el uso de esta idea desde los puntos de vista clásico y cuántico.

Palabras claves: Comprensión del concepto de superposición, intuición en mecánica cuántica, ilustraciones del principio de superposición de estados.

Abstract

A group of examples of the superposition principle is presented. This group is structured in such a way that the idea leaves developing progressively from elementary notions until the superposition of quantum probability amplitudes. Relations and differences between the uses of this idea are identified from the classic and quantum points of view.

Key words: Understanding of the superposition concept, intuition in quantum mechanics, illustrations of the superposition principle of states.

PACS: 03.65.Ta, 01.40.gb, 01.50.-i.

I. INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica, provee un esquema racional adecuado para la descripción del mundo microscópico. Esta descripción es necesaria para la comprensión del mundo macroscópico pues la materia y la radiación consisten de partículas subatómicas. Sin embargo, un conjunto de leyes diferentes a las leyes clásicas es requerido.

Este conjunto de leyes se presenta al estudiante que inicia su estudio de la naturaleza desde la teoría cuántica, como una teoría anti-intuitiva [1,2,3,4], cuyos principios resultan de difícil comprensión. Una de las razones por las que sucede esto es porque en mecánica cuántica se tiene un grado de abstracción tal que se pierden las imágenes directas que permiten familiarizarse con los fenómenos [5,6].

Desde el punto de vista de la teoría cognitiva, en particular, de la teoría de Johnson-Laird, las imágenes son un tipo de representaciones que contienen aspectos perceptibles de los objetos. Según dicha teoría “la mente es un sistema de representaciones simbólicas, esta construye símbolos y los utiliza en diferentes procesos cognitivos, como: la percepción, el pensamiento, el lenguaje, etc.” [7]. De esta manera, el uso de imágenes constituye un recurso cognitivo para el pensamiento del ser humano y su

ausencia dificulta la apropiación de una idea y por lo tanto su comprensión.

Uno de los cambios fundamentales y más drásticos para el pensamiento contenido en la teoría cuántica se encuentra presente en el llamado principio de superposición de estados [8,9].

Este principio afirma que la combinación lineal de dos estados posibles del sistema, es también, un estado posible del sistema. Lo cual lleva a pensar que los objetos cuánticos están en todos sus estados posibles, aunque sean estados, que desde el punto de vista de la física clásica, se interpretan como contradictorios [3].

Diversas investigaciones sobre el principio de superposición se presentan en la literatura, con énfasis distintos. En investigaciones en enseñanza de la física se evidencia malos entendidos de este principio, aún desde la teoría clásica [10].

Lynn y Caponigro, por su parte, hacen notar que la interpretación del principio de superposición de estados cuánticos está íntimamente relacionada con los supuestos filosóficos que se asumen, tales como los que subyacen al platonismo, al idealismo y al realismo [9].

Por su parte, Everett propone una nueva interpretación de la teoría cuántica [11]. En su interpretación, el estado de superposición queda determinado por el conjunto de

observaciones (realizaciones) secuenciales realizadas sobre el sistema [3].

Roger Newton, resalta el hecho que los efectos de interferencia producidos por la superposición de estados se deben a la caracterización del estado como un vector de estado y no como un rayo. Newton, señala que es precisamente esta caracterización del estado, “la que conlleva al efecto Aharonov-Bohm, a la fase Berry y a otros fenómenos familiares de entrelazamiento” [12].

En otros estudios, se ha determinado el rango de validez del principio de superposición en la teoría cuántica no relativista. Cisneros, analiza tres reglas que limitan a este principio y que se conocen como reglas de superselección [8].

Por su parte, Shapiro ha llevado a cabo la idea de Kobzarev acerca de la posibilidad de mundos cuánticos donde se viole el principio de superposición. Shapiro, presenta una dinámica modificada del vector de estado [3], adicionando un término no lineal a la ecuación de Schrödinger. Muestra que es posible una interpretación probabilística de la función de onda modificada, al igual que la existencia de amplitudes de transición, como de cantidades físicas conservadas [13].

En este artículo presentamos nuestra contribución al esfuerzo por hacer de la teoría cuántica una teoría intuitiva. Se describe un conjunto de ejemplos estructurados como una unidad, que constituyen aportes didácticos para la divulgación y comprensión del principio de superposición en un curso introductorio de mecánica cuántica. Además se muestran relaciones y diferencias entre el principio de superposición desde los puntos de vista clásico y cuántico.

El artículo está organizado como sigue: en la Sección II se ofrece un conjunto de ejemplos sobre el principio de superposición clásico. A partir de estos ejemplos abstraemos cuatro nociones constitutivas del concepto de superposición. En la Sección III se caracteriza el principio de superposición en mecánica cuántica. En la Sección IV se ilustra este principio y en la Sección V se enfatizan los cambios que sufre el concepto de intuición en este nuevo marco teórico, finalmente en la Sección VI presentamos nuestras conclusiones.

II. EJEMPLOS SOBRE EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN CLÁSICO

A. Un sistema visto como superposición de objetos

Un conjunto de objetos que configuran un determinado sistema nos ofrece una primera noción del principio de superposición. Encontramos objetos que conforman el sistema y que no pierden su identidad; sin embargo, el conjunto como un todo genera una percepción global independiente a la percepción de cada uno de sus objetos componentes. Por ejemplo, los elementos que configuran una oficina. Cada uno de los elementos puede conmutarse, cambiarse de posición, pero la noción de oficina se mantiene. Si se quita el computador y luego los escritorios y así sucesivamente la percepción de oficina se va diluyendo, hasta quedar un simple cuarto vacío. En este

primer ejemplo la noción que queremos resaltar, es la de un conjunto de individualidades constituyéndose como un todo.

B. Superposición de luz de colores

Nuestro siguiente ejemplo, es el maravilloso fenómeno de los colores. La luz proveniente del Sol al incidir sobre un prisma, se descompone en un conjunto de colores. Este conjunto de colores, al ser nuevamente combinado en una misma región del espacio se percibe como luz blanca. Además de la individualidad de cada color, resaltamos aquí la idea de separabilidad como noción constitutiva del concepto de superposición. Notemos además que no es posible identificar, a simple vista, en la luz blanca los diferentes colores; se hizo necesario un agente externo, el prisma, para evidenciar el conjunto de individualidades que coexisten en el sistema «luz blanca». Así, es debido a nuestras capacidades ópticas que no podemos, como en el ejemplo de la oficina, identificar en el sistema cada uno de los elementos superpuestos. Posiblemente si tuviéramos «ojos prismas» veríamos en vez de luz blanca una gama de colores.

C. Superposición de movimientos

Nuestro siguiente ejemplo donde se presenta una combinación de entidades que no pierden su individualidad, separables pero que combinadas generan una percepción distinta a la individualidad de cada componente, es la superposición de movimientos. Tomemos como ejemplo el movimiento parabólico: se superpone un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical con aceleración constante generando una trayectoria parabólica. Si se “apaga” el movimiento horizontal, el objeto continua en caída libre. Si se apaga el movimiento de caída libre, el movimiento horizontal perdura. Como en el ejemplo anterior, en este, al apreciar la trayectoria parabólica no se puede a simple vista identificar cada uno de los elementos superpuestos. Sin embargo, si se proyecta el movimiento a dos pantallas ubicadas adecuadamente, sus sombras darían cuenta de las individualidades que componen el estado de superposición.

En estos ejemplos se ha querido enfatizar reiteradamente que la superposición no es mezcla de entidades, en el sentido que en una mezcla se pierde la individualidad de las componentes. Por ejemplo, en la realización de un jugo de fresas, después de licuar las fresas con el agua es imposible restablecer las fresas y el agua por aparte.

D. Otros ejemplos

Las visualizaciones de superposiciones de ondas en cuerdas, en membranas, en el agua [14], permiten deleitarse con la percepción de la superposición. Además es bien conocido el uso del concepto de superposición de fuerzas, de campos eléctricos, de campos magnéticos, etc.

Ahora, vale la pena presentar la idea de superposición en otros escenarios. La teoría de series nos ayuda a ver los números en términos de extrañas superposiciones. Por ejemplo los números irracionales se pueden ver como superposición de números racionales:

$$\pi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2}, \quad \pi^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{90}{n^4} . \quad (1)$$

El análisis de Fourier resuelve la cuestión de cuándo una función $f(t)$ puede ser superposición (suma o integral) de exponenciales $\exp(i\omega t)$. Por ejemplo,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (2)$$

en donde c_n son coeficientes reales y ω representa la frecuencia de la función. Nótese que en este caso las individualidades son las funciones exponenciales de la forma $e^{in\omega t}$.

Los desarrollos en series de Taylor de una función,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \quad (3)$$

donde k indica la k -ésima derivada de $f(x)$, permiten descomponer una función en términos de polinomios, en este caso las individualidades son los polinomios de la forma x^k .

Estos ejemplos evidencian otra noción constitutiva de la idea de superposición, la idea de contribución; esta nos da cuenta del aporte de cada individualidad al estado de superposición. Este aporte (análogo al peso estadístico) no altera la naturaleza individual de los elementos superpuestos. En los ejemplos de las series de Fourier y de Taylor la contribución de cada individualidad se manifiesta en los coeficientes c_n y $f^{(k)}(x_0)/k!$, respectivamente. En los casos perceptibles de superposición de ondas se sabe que las contribuciones pueden ser en fase, en desfase o en amplitudes (intensidad).

E. El principio de superposición clásico

El concepto de superposición surge para expresar concisamente los resultados de este gran número de ejemplos. Las ideas de individualidad, separabilidad, percepción como un todo y contribución, se formalizan en la estructura algebraica conocida como espacio vectorial [15]. Esta formalización asocia el concepto de superposición con el concepto de operación aditiva. La individualidad queda formalizada en los elementos del espacio vectorial (los vectores, cada vector es en sí mismo una individualidad), la separabilidad en la idea de combinación linealmente independiente, la percepción como un todo con la definición unívoca de los coeficientes (amplitudes de probabilidad) de los estados en una base determinada y la contribución, en la multiplicación de un

escalar por una individualidad (por un vector). Por ejemplo, el desplazamiento es una magnitud vectorial y cada desplazamiento (cada individualidad) se puede escribir como combinación de otros desplazamientos. Normalmente se escribe como:

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k} . \quad (4)$$

De esta manera, un desplazamiento puede ser pensado como una magnitud tres dimensional. Este caso se puede generalizar para considerar superposiciones de magnitudes n -dimensionales. En este sentido, las cantidades vectoriales de la física como velocidad, momentum, aceleración, fuerza, campo eléctrico, campo magnético, etc., ilustran el concepto de superposición.

El principio de superposición clásico establece entonces, que existen entidades físicas y matemáticas que se pueden expresar como una combinación de "elementos" que coexisten conservando su individualidad.

Desde el punto de vista cognitivo, una característica de los ejemplos clásicos que hemos enunciado, es que de todos ellos fácilmente existe una imagen [7]. En algunos casos la imagen es concreta, sustancial, como en los ejemplos de la oficina, de ondas en una cuerda o de ondas en el agua; en otros casos existen imágenes gráficas como en la superposición de movimientos y en otros casos las expresiones matemáticas evidencian el principio de superposición. Así las imágenes mentales se convierten en un recurso del pensamiento para la comprensión de un concepto, para su familiarización y su uso [16].

III. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN EN MECÁNICA CUÁNTICA

Hemos ilustrado el principio de superposición desde el punto de vista clásico y este esfuerzo nos ha llevado a proponer cuatro nociones que fundamentan este principio: individualidad, separabilidad, percepción como un todo y contribución. Se sabe que la mecánica cuántica exige una nueva organización conceptual para la descripción de los fenómenos atómicos y con frecuencia se dice que el principio de superposición está en el corazón de esta nueva organización conceptual. Así que la cuestión que interesa es: ¿qué cambios sufre el principio de superposición clásico en la mecánica cuántica?

Inicialmente vale la pena preguntarse si en la teoría cuántica es posible pensar en magnitudes n -dimensionales, como en el caso de las magnitudes vectoriales clásicas. La respuesta es contundente: sí. Todas las magnitudes que especifican un atributo de una entidad física (polarización, espín, localización, traslación, momentum, energía, etc.) se deben pensar como n -dimensionales en la teoría cuántica y se denominan vectores de estado.

En mecánica clásica los atributos de un objeto son pensados como existentes *a priori*. Atributos tales como forma (extensibilidad), dureza, transparencia, localizabilidad, movilidad, etc., se asumen como determinados objetivamente aún si no se miden. Mientras que en mecánica cuántica, siguiendo la interpretación

ortodoxa de Copenhagen [3], cada magnitud física que representa un atributo se debe pensar como una superposición de las n dimensiones que la constituyen. Estas n dimensiones representan los posibles valores (posibilidades) que puede tomar la magnitud. Estas posibilidades se manifiestan en el momento de la medición, así que los atributos que caracterizan un determinado sistema físico dependen del observador. Este cambio que propone la mecánica cuántica en cuanto a cómo se conciben los atributos nos lleva directamente a introducir el principio de superposición, ya que el vector de estado se debe considerar como una superposición de posibilidades (antes de la medición).

El uso del concepto de superposición de estados, en donde las individualidades son las posibilidades de ser o de estar de un sistema, se adecua con las cuatro nociones que propusimos en el caso clásico. El cambio drástico se da en cuanto a la interpretación de una de las nociones presentadas, la noción de contribución, ya que los coeficientes que acompañan a las individualidades¹ no representan información directa del sistema. Para saber la contribución (número real) de cada individualidad es necesario calcular el cuadrado de la norma del coeficiente; este resultado se interpreta como la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado correspondiente al ser observado (medido).

Presentamos a continuación un conjunto de ejemplos para ilustrar esta idea.

IV. EJEMPLOS SOBRE EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE ESTADOS

A. El gato de Schrödinger (experimento mental)

Un gato dentro de una caja cerrada con átomos radiactivos constituye nuestro primer ejemplo de superposición de estados. Si se considera que con la desintegración del 50% de los átomos el gato muere, y después de un determinado tiempo se ha desintegrado esta cantidad de la muestra, si no se abre la caja, aunque un observador no podría decir nada acerca del estado en el que se encuentra el gato, vivo o muerto, podría decir que el gato tiene dos posibilidades de estar, el estar vivo o el estar muerto, así que como no está observando en cual está, se dice que el gato se encuentra en un estado de superposición de estas dos posibilidades. Simbólicamente esta situación se representa como:

$$|\text{estado del gato}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{vivo}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{muerto}\rangle. \quad (5)$$

Así la probabilidad de que el gato esté vivo es:

$$p(\text{vivo}) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

y la probabilidad de que esté muerto es:

$$p(\text{muerto}) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Nótese que la suma de probabilidades es uno puesto que el gato sólo tiene dos posibilidades de estar: vivo o muerto.

B. Posición de una partícula

Otro ejemplo de superposición de estados lo encontramos en las posibles posiciones, dentro de ciertos límites, en las que se encuentra una partícula. El estado de superposición implica que existe una probabilidad distinta de cero de encontrar la partícula dentro de esos límites, se denota de la forma:

$$|\text{posición partícula}\rangle = a_1|\text{posición } x_1\rangle + \dots + a_N|\text{posición } x_N\rangle. \quad (8)$$

La expresión anterior representa una suma de estados posibles, cada uno de ellos contribuyendo de distinta forma al estado total. Se debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^N |a_i|^2 = 1, \quad (9)$$

donde x_1 y x_N son los límites donde se encuentra la partícula.

C. Polarización de fotones

Se asume que un fotón polarizado oblicuamente puede ser visto como estando parcialmente en el estado de polarización paralelo y parcialmente en el estado de polarización perpendicular [17]. Por lo tanto, el estado de polarización oblicuo puede ser considerado como el resultado de algún tipo de proceso de superposición aplicado a los dos estados, paralelo y perpendicular. Esto implica un cierto tipo de vínculo, de relación entre los distintos estados de polarización, un vínculo similar al de haces polarizados en óptica clásica, pero que ahora es aplicado, no a los haces, sino a los estados de polarización de un fotón particular [17]. Este vínculo permite que cualquier estado de polarización sea expresado como una superposición de cualquier par de estados de polarización mutuamente perpendiculares.

D. Estado de Localización

Tomemos de nuevo fotones. Tratemos esta vez con su posición y su momentum en vez de la polarización. Si preparamos un haz monocromático, entonces sabemos algo sobre la localización en el espacio y el momentum de

¹ Estos coeficientes se conocen como amplitudes de probabilidad y en general son números complejos.

los fotones asociados. Sabemos que cada uno de los fotones está en algún sitio del espacio por donde va el haz. Si consideramos el haz formado por un solo fotón y lo hacemos pasar por una pantalla con dos rendijas, debido al fenómeno de interferencia, es necesario pensar la localización del fotón como superposición de las localizaciones de cada una de las dos rendijas, es decir, el estado de localización del fotón es la superposición de los estados de localización de las rendijas:

$$|\text{trayectoria del fotón}\rangle = a_1|\text{rendija 1}\rangle + a_2|\text{rendija 2}\rangle. \quad (10)$$

Asumir el estado de localización de esta forma permite reproducir los patrones de interferencia al otro lado de la pantalla [1].

E. Estado de espín

El estado de espín debe ser pensado como una magnitud n -dimensional según el sistema microscópico. Si una partícula es de espín $\frac{1}{2}$, el espacio de estados corresponde a un espacio vectorial 2-dimensional. Si es de espín 1, el espacio de estados correspondiente es 3-dimensional. Si es de espín $\frac{3}{2}$ el espacio de estados correspondiente es 4-dimensional, etc. [17].

V. SOBRE LA INTUICIÓN QUE EXIGE LA TEORÍA CUÁNTICA

Los ejemplos mostrados anteriormente se pueden sintetizar diciendo que un sistema cuántico es descrito por un vector de estado, el cual puede ser expandido en una superposición de estados particulares (auto-estados) de algún observable,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |\psi_i\rangle, \quad (11)$$

donde N representa la dimensionalidad del espacio de estados y donde los coeficientes c_i son amplitudes de probabilidad. La probabilidad de que un observador (medidor de un atributo) encuentre al sistema en un estado ψ_i , está dada por $|c_i|^2$.

La característica básica del principio de superposición de la teoría cuántica es que las amplitudes de probabilidad puedan interferir y esta característica no tiene análogo clásico [12]. Es esta característica la que genera una gran cantidad de fenomenología novedosa: estados entrelazados, teleportación de estados, criptografía cuántica, computación e información cuántica, etc. [18].

El acostumbrarse a pensar en superponer amplitudes de probabilidad (posibilidades de estar) nos ayuda a apropiarnos de la nueva idea propuesta por la teoría cuántica. El considerar que algo es posible si se ajusta con un modelo explicativo coherente es un recurso que exige la teoría cuántica al pensamiento. Por ejemplo, el espín se hace posible gracias a que la teoría del momento angular

(modelo explicativo) lo engloba, es decir, el espín es considerado como una clase de momento angular [19].

Desde el punto de vista cognitivo este recurso se convierte en una herramienta que trasciende el uso de imágenes sustancialistas, puesto que, aunque las imágenes ayudan a familiarizarnos con una determinada teoría no son necesarias para la coherencia de ésta [1,7,16].

Es importante tener en cuenta que para lograr llegar al nivel de abstracción que exige la teoría cuántica es necesario además de ampliar la noción de imagen, cambiar el concepto de intuición [20]. Ahora la intuición debe complementarse con las representaciones matemáticas del mundo microscópico [6,21].

La intuición es la capacidad que tenemos de predecir lo que va a suceder y se ajusta a nuestra percepción sensorial [22]. La teoría cuántica trabaja a una escala microscópica que no percibimos directamente a través de nuestros sentidos, por lo tanto no es posible dar una predicción de lo que sucederá solo con la observación del sistema, por esto se dice que es anti-intuitiva. Desarrollar intuición en mecánica cuántica no es pretender poder observar directamente a esta escala atómica, y así dar predicciones, la idea es reformular o ampliar el concepto de intuición. Es la noción de probabilidad la que permite interpretar el principio de superposición de estados, es por esto que la mecánica cuántica exige otro tipo de intuición: la existencia de un modelo explicativo (por su puesto abstracto) debe ser parte básica de la intuición. La dificultad entonces se va diluyendo si nos acostumbramos a pensar de esta manera.

VI. CONCLUSIONES

Se ha ilustrado, por medio de ejemplos, el principio de superposición clásico. A partir de estos ejemplos se ha logrado abstraer cuatro nociones constitutivas de este principio: individualidad, separabilidad, percepción como un todo y contribución.

Estas nociones se hacen independientes de la naturaleza de las entidades que se superponen y es en este sentido que consideramos que las cuatro nociones estructuran el principio de superposición. Esta estructura permite analizar el principio de superposición en mecánica cuántica. Esto se llevó a cabo realizando las siguientes relaciones: las individualidades con las posibilidades de estar de un sistema (estados del sistema), la separabilidad con la idea de una combinación linealmente independiente de los estados, la percepción como un todo con la definición unívoca de los coeficientes (amplitudes de probabilidad) de los estados en una base determinada (auto-estados), y las contribuciones, con el cuadrado del valor absoluto de las amplitudes de probabilidad.

REFERENCIAS

- [1] Dirac, P. (*The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, 4a. Edición, Oxford, 1958).

- [2] Tipler, P. (*Physics for scientist and engineers*, Reverté, 4a. Edición, Barcelona, 1999).
- [3] Laloë, F., *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems*, Am. J. Phys. **69**, 656 (2001).
- [4] Mohrhoff, U., *What quantum mechanics is trying to tell us?*, Am. J. Phys. **68**, 728 (2000).
- [5] Redish, E., *Implications of cognitive studies for teaching physics*, Am. J. Phys. **62**, 796 (1994).
- [6] Bao, L. and Redish, E., *Understanding probabilistic interpretations of physical systems: A prerequisite to learning quantum physics*, Am. J. Phys. **70**, 210 (2002).
- [7] Greca, I. y Moreira, M., *Un Estudio Piloto sobre Representaciones Mentales, Imágenes, Proposiciones y Modelos Mentales respecto al concepto de Campo Electromagnético en alumnos de Física General, estudiantes de postgrado y físicos profesionales* Revista Enseñanza de las Ciencias **16**, 289 (1998).
- [8] Cisneros, C., Martínez-y-Romero, R. P., Nunez-Yepez, H. N. and Salas-Brito, A. L., *Limitations on the superposition principle: superselection rules in non-relativistic quantum mechanics*, Eur. J. Phys. **19**, 237 (1998).
- [9] Lynn, H. and Caponigro, M., *Quantum Formalism: Brief Epistemological Considerations*, e-print [quant-ph/0610228].
- [10] Sengören, S. and Tanel, R. and Kavcar, N., *Drawings and ideas of physics teacher candidates relating to the superposition principle on a continuous rope*, Phys. Educ. **41**, 453 (2006).
- [11] Everett, H., "Relative State" Formulation of Quantum Mechanics", Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957).
- [12] Newton, R., *What is a state in quantum mechanics?*, Am. J. Phys. **72**, 348 (2004).
- [13] Shapiro, I., *Quantum theory without the superposition principle*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **16**, 197 (1972).
- [14] French, A. (*Vibraciones y Ondas* Reverté, Barcelona, 1974).
- [15] Nakos, G., Joyner, D. (*Álgebra lineal*, International Thomson Editors, Mexico, 1999).
- [16] Redish, E., *Implications of cognitive studies for teaching physics*, Am. J. Phys. **69**, 796 (1994).
- [17] Lévy-Leblond, J. and Balibar, F. (*Quantics*, North-Holland, 1990).
- [18] Zeilinger, A. Ekert, A. Bouwmeester, D. (*The Physics of Quantum Information*. Springer, 1a. Edición, Germany, 2001).
- [19] Feynman, R. (*Física vol.3*, Pearson Education, Mexico, 1963).
- [20] Keeports, D., *Addressing Physical Intuition—A First-Day Event*, Phys. Teach. **38**, (2000).
- [21] Lévy-Leblond, J. (*Conceptos Contrarios o el Oficio del Científico*, Tusquets, 1a. Edición, España, 2002).
- [22] Singh, C., *When physical intuition fails*, Am. J. Phys. **70**, 1103 (2002).