



Conductividad térmica de una barra de cobre. Estudio experimental del transitorio

José A. Ibáñez, Francisco J. Abellán, Ramón P. Valerdi y José A. García Gamuz
Departamento de Física. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30071 Murcia.

E-mail: jaibanez@um.es

(Recibido el 4 de Julio de 2008, aceptado el 27 de Agosto de 2008)

Resumen

La propagación del calor a lo largo de una barra metálica debe tener en cuenta el proceso de conducción a lo largo de la misma, así como los procesos de pérdidas caloríficas por convección y radiación que tienen lugar a través de su superficie lateral. Se presenta un procedimiento de índole experimental, para determinar la conductividad térmica (k), así como las pérdidas laterales (h), en una barra metálica de sección circular, mediante el seguimiento del transitorio que se desencadena cuando se calienta uno de sus extremos. La aplicación de un método en diferencias finitas permite el manejo sencillo de la información obtenida y conduce a resultados en buen acuerdo con los que aparecen en la literatura.

Palabras clave: Conductividad térmica, diferencias finitas.

Abstract

In the propagation of the heat through a metallic bar, the process of conduction must be considered through itself, as well as the processes of heat loss due to convection and radiation, which take place through its lateral surface. An experimental procedure is shown, to determine the thermal conductivity (k), and the lateral losses coefficient (h) in a circular cross-section metallic bar, by means of the study of the transitory state arising when one of its ends is heated. This study is carried out applying a method of finite differences, that allows us the simple management of the information obtained, leading us to similar results to those cited in the literature.

Keywords: Thermal conductivity, finite differences.

PACS: 01.50.Kw, 01.50.Lc, 01.50.Pa, 01.50.My

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El problema de la conducción del calor en sólidos ha sido ampliamente estudiado, estando disponibles soluciones para el mismo, bajo diversas condiciones de contorno, formas y dimensiones. En éste artículo fijamos nuestra atención sobre un sistema unidimensional (barra de cobre aislada lateralmente) y para él resolvemos numéricamente la ecuación diferencial en derivadas parciales que gobierna el campo térmico en la barra, a lo largo del transitorio que se genera tras poner en contacto uno de sus extremos con un foco de calor. Otros autores, han abordado el problema de forma más elemental [1], mediante el empleo de un procedimiento iterativo que evita el manejo de la ecuación diferencial del campo.

En los laboratorios de prácticas de Termodinámica, es frecuente el estudio de fenómenos de transporte de calor en diferentes sistemas, concretamente en barras metálicas con y sin aislamiento lateral. En el primer caso, se suele suponer el carácter perfecto del aislante prescindiendo por completo de las pérdidas laterales. Nuestro trabajo está orientado a alumnos de un primer curso de Termodinámica en los estudios de la Licenciatura de Física y de las

Ingenierías Industrial y Química y en él se presenta un procedimiento experimental que tiene en cuenta tales pérdidas laterales y permite su evaluación junto con la determinación de la conductividad térmica, sobre la base de un modelo sencillo que aproxima el estudio del transitorio que se genera al calentar uno de los extremos de la barra, mediante aproximaciones con diferencias finitas.

En el apartado II desarrollamos un breve modelo teórico que conduce a la ecuación diferencial que gobierna el campo térmico en una barra de sección circular. En el apartado III se muestra el dispositivo experimental empleado, mientras que en el apartado IV se da cuenta del manejo de las medidas realizadas recurriendo a aproximaciones en diferencias finitas para las derivadas involucradas, mostrando también tablas y gráficos para la temperatura que corresponden al estudio del transitorio. Por último, el apartado V recoge los resultados obtenidos para la conductividad y el coeficiente de pérdidas laterales.

II. MODELO TEORICO

En el estudio de la propagación del calor en una barra metálica se debe tener en cuenta el proceso de

conducción a lo largo de la misma, así como los procesos de pérdidas caloríficas por convección y radiación que tienen lugar a través de su superficie lateral. A tal efecto se considerará un elemento infinitesimal de barra, con volumen dV y espesor dx , siendo su sección constante S , como se muestra en la Figura 1.

La cantidad de calor absorbido por el elemento considerado en un intervalo de tiempo dx , será igual a la diferencia de valores entre el calor que recibe por conducción a través de su sección recta S en x y la que cede a través de su sección recta S en $x+dx$, que de acuerdo con la fórmula de Fourier [1].

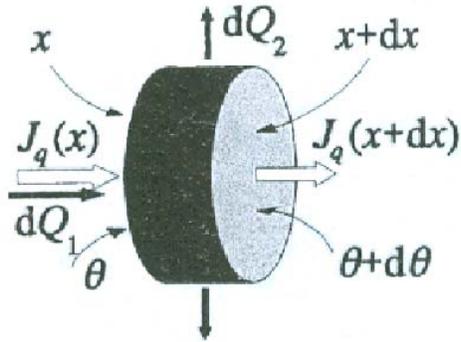


FIGURA 1. Conducción a través de un elemento de barra.

$$\bar{J}_q^* = \frac{dQ}{dt} = -kS \text{grad}\theta, \quad (1)$$

siendo \bar{J}_q^* la corriente calorífica en la dirección longitudinal de la barra en la posición x de la misma, de donde se sigue

$$dQ_1 = -\pi r^2 k \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x+dx} \right] dt, \quad (2)$$

donde k es la conductividad térmica y siendo θ la temperatura en el punto genérico de la barra, de abscisa x (tomando el eje OX a lo largo de la barra y con el origen en el extremo más caliente de la misma) y donde r representa el radio de la misma.

La ecuación (2) mediante desarrollo por la fórmula de Taylor se puede expresar como

$$dQ_1 = \pi r^2 k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_x dx dt. \quad (3)$$

El elemento de volumen considerado experimentará unas pérdidas caloríficas a través de su superficie lateral, por convección y radiación, descritas por la ley empírica de Newton, que para una temperatura del ambiente, θ_a , a la que se encuentra la barra, establece que la cantidad de calor que fluye hacia el exterior a través de las paredes laterales del elemento de volumen dV considerado en un intervalo de tiempo dt , es

$$dQ_2 = -h(\theta - \theta_a) 2\pi r dx dt, \quad (4)$$

siendo h un parámetro que solo depende de la geometría del cuerpo y que recibe el nombre de coeficiente de pérdidas laterales.

La suma $dQ_1 + dQ_2$ representa la energía calorífica neta que recibe el elemento de volumen dV , de modo que si el incremento de temperatura que experimenta el mismo durante un tiempo dt es $d\theta$, se puede escribir

$$dQ_1 + dQ_2 = c\rho\pi r^2 dx d\theta, \quad (5)$$

donde se ha tenido en cuenta que $dV = \pi r^2 dx$, siendo c y ρ el calor específico y la densidad de la barra, respectivamente.

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación (5) se obtiene [2, 3]

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{2h}{kr} (\theta - \theta_a), \quad (6)$$

ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya resolución conduce al campo térmico $\theta = \theta(x, t)$ en una barra de sección circular, con radio r . La ecuación anterior se puede escribir en la forma:

$$Y = KX + H \left\{ \begin{array}{l} Y = T''/T, \text{ con } T'' = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ X = \dot{T}/T, \text{ con } \dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} \end{array} \right\} T = \theta - \theta_a, \quad (7)$$

donde $K = \rho c/k$, y $H = 2h/rk$, con ρ densidad del material de la barra y c calor específico del mismo. El ajuste de los valores de Y frente a los de X , permitirá el cálculo de K y H , y por tanto de k y h .

III. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

En una barra de cobre de 48 cm de longitud, con una sección recta circular de 2 cm de diámetro, se sitúan sensores térmicos tipo semiconductor, cada 6 cm, lo que permite el seguimiento del transitorio que se origina, cuando se calienta uno de los extremos, merced a la acción de una resistencia eléctrica albergada en él, en tanto que el otro extremo penetra en un baño de agua, aislado térmicamente. La lectura de las diferentes temperaturas se visualiza en un dispositivo de medida, con salida digital, que permite la captación y registro de datos, mediante un programa informático, con el que se puede fijar el intervalo de tiempo deseado para el almacenamiento de las medidas (Figura 2). De esta forma, se consigue una recopilación de datos del tipo mostrado en la Tabla I, donde T_{ij} representa la diferencia entre la temperatura en la posición x_j de la barra en el instante t_i , y a la temperatura ambiente θ_a .



FIGURA 2. Montaje experimental en el que puede verse la resistencia calefactora extraída de la barra y colocada sobre el extremo izquierdo de la misma y el vaso Dewar en el que entra el extremo derecho de ésta.

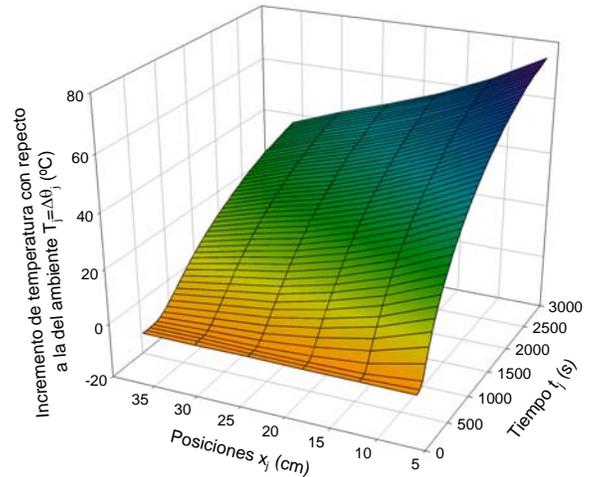


FIGURA 3. Evolución espacio-temporal de la temperatura en una barra de cobre, con aislamiento lateral.

IV. MANEJO DE LAS MEDIDAS

La gráfica de la Figura 3, muestra la evolución espacio-temporal de la temperatura en la barra, cuando ésta se aísla lateralmente con *armaflex* y se hace un seguimiento del transitorio durante 3000 s, con las lecturas registradas cada minuto, recogiéndose en la Tabla I del minuto 15 en adelante.

Para el manejo de la ecuación (7), recurriremos a aproximar las derivadas implícadas, mediante incrementos finitos, y así para cada instante t_j en la posición x_i

$$\left\{ \begin{aligned} T''_{ji} &= \frac{T(x_i + 2\Delta x, t_j) - 2T(x_i + \Delta x, t_j) + T(x_i, t_j)}{(\Delta x)^2}; Y_{ji} = \frac{T''_{ji}}{T_{ji}} \\ \dot{T}_{ji} &= \frac{T(x_i, t_j + \Delta t) - T(x_i, t_j)}{\Delta t}; X_{ji} = \frac{\dot{T}_{ji}}{T_{ji}} \end{aligned} \right. \quad (8)$$

lo que permite construir la Tabla II. El carácter relativo respecto de T_{ij} , de Y_{ij} y X_{ij} , hace que para valores pequeños de T_{ij} , los valores de estas magnitudes se dispersen mucho, lo que se evita prescindiendo de los datos correspondientes a los 15 primeros minutos del experimento (en nuestro caso).

TABLA I. Tabla tipo para la recogida de datos T_{ij} , donde x_j es la distancia entre el punto de registro i -ésimo y el extremo caliente de la barra ($\Delta x = x_{i+1} - x_i = 6 \text{ cm}$).

| Tiempo (s) ↓ | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | ← Posición (cm) | Temp baño (°C) |
|------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|-----------------------------|
| t_i | T_{i1} | T_{i2} | T_{i3} | T_{i4} | T_{i5} | T_{i6} | $T_{\theta} = \theta(x_i, t_i) - \theta_a$ (°C) | θ (H ₂ O) |
| registros para Tabla I (bis) | | | | | | | registros para Tabla VII | |

TABLA I (bis). Valores numéricos de los incrementos térmicos en relación al ambiente en cada uno de los puntos de registro, a partir del minuto 15 desde el inicio. Temperatura ambiente: 21,4 °C y tiempo entre medidas: 60 s.

| Tiempo (t_j) (s) | T_{i1} | T_{i2} | T_{i3} | T_{i4} | T_{i5} | T_{i6} |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 887,0000 | 41,4000 | 32,6000 | 25,7000 | 20,5000 | 17,0000 | 13,0000 |
| 946,0000 | 43,1000 | 34,2000 | 27,4000 | 22,0000 | 18,3000 | 14,1000 |
| 1005,0000 | 44,8000 | 35,9000 | 29,0000 | 23,4000 | 19,6000 | 15,3000 |
| 1064,0000 | 46,4000 | 37,5000 | 30,5000 | 24,8000 | 20,9000 | 16,4000 |
| 1123,0000 | 48,0000 | 39,0000 | 32,0000 | 26,2000 | 22,1000 | 17,5000 |
| 1182,0000 | 49,4000 | 40,3000 | 33,2000 | 27,5000 | 23,3000 | 18,5000 |
| 1241,0000 | 50,9000 | 41,7000 | 34,6000 | 28,8000 | 24,5000 | 19,4000 |
| 1300,0000 | 52,2000 | 43,1000 | 35,8000 | 29,9000 | 25,6000 | 20,4000 |
| 1359,0000 | 53,6000 | 44,4000 | 37,0000 | 31,1000 | 26,6000 | 21,4000 |
| 1418,0000 | 54,9000 | 45,6000 | 38,2000 | 32,1000 | 27,6000 | 22,1000 |
| 1477,0000 | 56,1000 | 46,8000 | 39,4000 | 33,2000 | 28,6000 | 23,0000 |
| 1536,0000 | 57,3000 | 47,8000 | 40,2000 | 34,2000 | 29,5000 | 23,8000 |

| | | | | | | |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1595,0000 | 58,3000 | 48,8000 | 41,2000 | 35,1000 | 30,2000 | 24,5000 |
| 1654,0000 | 59,3000 | 49,9000 | 42,2000 | 35,9000 | 31,1000 | 25,5000 |
| 1713,0000 | 60,4000 | 50,9000 | 43,0000 | 36,7000 | 32,0000 | 26,2000 |
| 1772,0000 | 61,4000 | 51,8000 | 44,3000 | 37,9000 | 32,9000 | 26,9000 |
| 1832,0000 | 62,6000 | 53,0000 | 44,9000 | 38,9000 | 33,8000 | 27,6000 |
| 1891,0000 | 63,4000 | 54,0000 | 45,9000 | 39,6000 | 34,6000 | 28,4000 |
| 1950,0000 | 64,3000 | 54,8000 | 46,8000 | 40,4000 | 35,4000 | 29,1000 |
| 2009,0000 | 65,1000 | 55,6000 | 47,5000 | 41,3000 | 36,1000 | 29,7000 |
| 2068,0000 | 65,9000 | 56,3000 | 48,4000 | 42,0000 | 36,7000 | 30,3000 |
| 2127,0000 | 66,7000 | 57,2000 | 49,1000 | 42,7000 | 37,4000 | 30,9000 |
| 2186,0000 | 67,4000 | 57,8000 | 49,7000 | 43,4000 | 37,7000 | 31,4000 |
| 2245,0000 | 68,2000 | 58,3000 | 50,4000 | 43,9000 | 38,4000 | 32,0000 |
| 2304,0000 | 68,9000 | 59,1000 | 50,9000 | 44,4000 | 39,1000 | 32,6000 |
| 2363,0000 | 69,8000 | 60,0000 | 51,7000 | 45,2000 | 39,8000 | 33,3000 |
| 2422,0000 | 70,5000 | 60,6000 | 52,2000 | 45,7000 | 40,2000 | 33,5000 |
| 2481,0000 | 70,8000 | 60,9000 | 52,7000 | 46,4000 | 40,7000 | 33,8000 |
| 2540,0000 | 71,5000 | 61,5000 | 53,8000 | 47,2000 | 41,3000 | 34,3000 |
| 2600,0000 | 72,1000 | 62,1000 | 54,4000 | 47,7000 | 41,9000 | 34,8000 |
| 2659,0000 | 72,5000 | 62,6000 | 54,8000 | 48,1000 | 42,3000 | 35,2000 |
| 2718,0000 | 72,7000 | 63,1000 | 55,2000 | 48,5000 | 42,7000 | 35,6000 |
| 2777,0000 | 73,2000 | 63,3000 | 55,9000 | 49,0000 | 43,1000 | 36,1000 |
| 2836,0000 | 73,6000 | 63,8000 | 56,3000 | 49,5000 | 43,4000 | 36,4000 |
| 2895,0000 | 74,2000 | 64,2000 | 56,5000 | 49,7000 | 43,7000 | 36,8000 |
| 2954,0000 | 74,6000 | 64,7000 | 56,6000 | 50,1000 | 44,1000 | 37,3000 |

TABLA II. Valores relevantes de los parámetros Y_{ji} y X_{ji} para el cálculo de los valores de H y K con intervalo $\Delta x=6$ cm.

| | | | | | | |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 |
| t_i | Y_{i1} | Y_{i2} | Y_{i3} | Y_{i4} | | |
| | X_{i1} | X_{i2} | X_{i3} | X_{i4} | X_{i5} | X_{i6} |

TABLA II (bis). Valores numéricos de los parámetros Y_{ji} y X_{ji} correspondientes a cinco minutos de calentamiento, a partir del minuto 15.

| $t(s)$ | cm^{-2} | | | | s^{-1} | | | |
|--------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| | $(T_1^*/T_1) \times 10^3$ | $(T_2^*/T_2) \times 10^3$ | $(T_3^*/T_3) \times 10^3$ | $(T_4^*/T_4) \times 10^3$ | $(\dot{T}_1/T_1) \times 10^3$ | $(\dot{T}_2/T_2) \times 10^3$ | $(\dot{T}_3/T_3) \times 10^3$ | $(\dot{T}_4/T_4) \times 10^3$ |
| 887,0 | 1,2748e-3 | 1,4485e-3 | 1,8374e-3 | -1,5244e-3 | 6,9598e-4 | 8,3186e-4 | 1,1212e-3 | 1,2402e-3 |
| 946,0 | 1,3534e-3 | 1,1371e-3 | 1,7234e-3 | -1,4205e-3 | 6,6853e-4 | 8,4250e-4 | 9,8973e-4 | 1,0786e-3 |
| 1005,0 | 1,2401e-3 | 1,0059e-3 | 1,7241e-3 | -1,3355e-3 | 6,0533e-4 | 7,5539e-4 | 8,7668e-4 | 1,0141e-3 |
| 1064,0 | 1,1375e-3 | 9,6296e-4 | 1,6393e-3 | -1,5121e-3 | 5,8445e-4 | 6,7797e-4 | 8,3356e-4 | 9,5681e-4 |
| 1123,0 | 1,1574e-3 | 8,5470e-4 | 1,4757e-3 | -1,1927e-3 | 4,9435e-4 | 5,6497e-4 | 6,3559e-4 | 8,4099e-4 |
| 1182,0 | 1,1246e-3 | 9,6498e-4 | 1,2550e-3 | -1,3636e-3 | 5,1465e-4 | 5,8880e-4 | 7,1472e-4 | 8,0123e-4 |

La evolución temporal de las temperaturas en puntos equidistantes de la barra de cobre se refleja en la Figura 4 que corresponde a los cortes paralelos a la superficie dada en la Figura 3 en planos paralelos al plano coordenado (T_j, t_i) para las diferentes posiciones x_i ($i=1, \dots, 6$) y para el vaso Dewar. La Figura 5 recoge la evolución temporal de

la temperatura a lo largo de la barra, a intervalos de 10 minutos entre 0 y 50 minutos y corresponde a los cortes de la superficie de la Figura 2 con planos paralelos al plano coordenado (T_j, x_j) , para los instantes indicados, cuyos valores aparecen recogidos en la Tabla III.

TABLA III. Evolución temporal de los incrementos de temperatura a lo largo de una barra de cobre.

| Posiciones x_j (cm) | Incrementos de temp. T (°C), (tiempo (min)) | | | | | |
|-----------------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|
| | $T(0)$ | $T(10)$ | $T(20)$ | $T(30)$ | $T(40)$ | $T(50)$ |
| 6,0 | -0,9 | 30,6 | 49,4 | 61,4 | 70,5 | 74,6 |
| 12,0 | -0,8 | 22,5 | 40,3 | 51,8 | 60,6 | 64,7 |
| 18,0 | -0,8 | 16,4 | 33,2 | 44,3 | 52,2 | 56,6 |
| 24,0 | -0,6 | 11,9 | 27,5 | 37,9 | 45,7 | 50,1 |
| 30,0 | -0,8 | 9,1 | 23,3 | 32,9 | 40,2 | 44,1 |
| 36,0 | -0,6 | 6,2 | 18,5 | 26,9 | 33,5 | 37,3 |

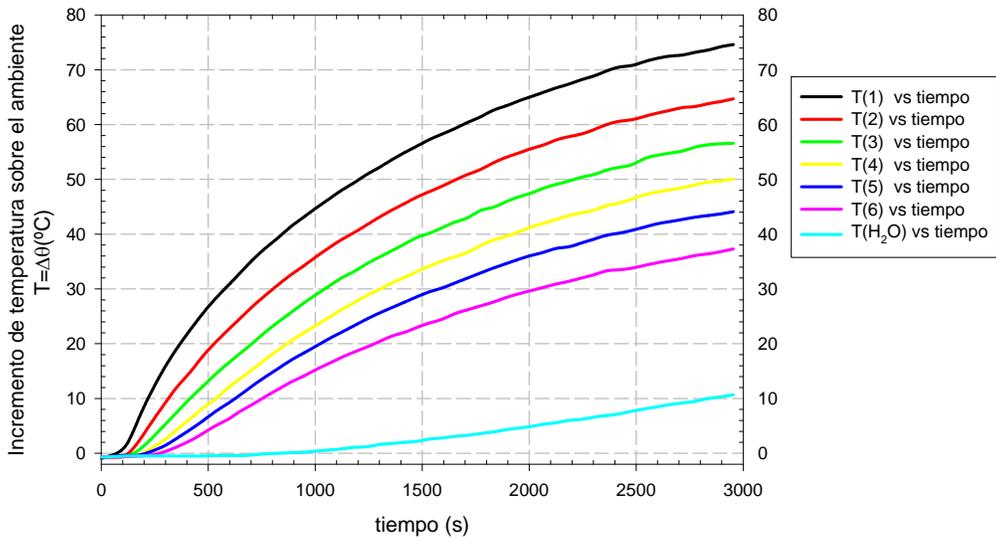


FIGURA 4. Evolución temporal de las temperaturas en puntos equidistantes de una barra de cobre, con aislamiento lateral.

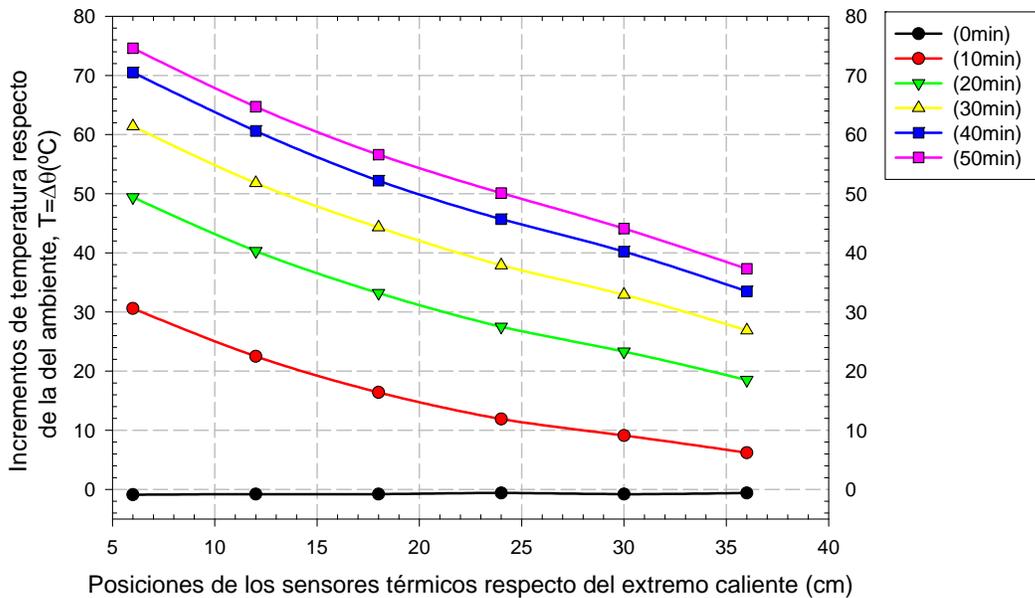


FIGURA 5. Evolución temporal de los incrementos de temperatura a lo largo de una barra de cobre, con aislamiento lateral.

Por otra parte, como los errores de \dot{T}_{ij} y T_{ij}'' son inversamente proporcionales, respectivamente, a Δt y a $(\Delta x)^2$, interesa fijar adecuadamente el valor de estos parámetros. Por este motivo resulta conveniente fijar un intervalo temporal de registro no demasiado pequeño y que en nuestro caso ha sido de 1 min. En cuanto a Δx , el

intervalo de 6 cm fijado “a priori” introduce demasiado error, por lo que se optó por duplicarlo, de modo que los datos a manejar, son los recogidos en las Tablas IV, IV (bis), V y V (bis).

TABLA IV. Valores relevantes de los parámetros Y_{ji} y X_{ji} para el cálculo de los valores de H y K con intervalo $\Delta x=12$ cm (posiciones impares).

| | | | | | | |
|-------|----------|----------|-------|----------|-------|----------|
| | x_1 | | x_3 | | x_5 | |
| t_i | Y_{i1} | X_{i1} | | X_{i3} | | X_{i5} |

TABLA IV (bis). Valores numéricos de los parámetros Y_{ji} y X_{ji} para el cálculo de los valores de H y K con intervalo $\Delta x=12$ cm, a partir del minuto 15 (posiciones impares).

| $t(s)$ | $(T_1^-/T_1) \times 10^3$ (cm ⁻²) | $(\dot{T}_1/T_1) \times 10^3$ (s ⁻¹) | $(\dot{T}_3/T_3) \times 10^3$ (s ⁻¹) | $(\dot{T}_5/T_5) \times 10^3$ (s ⁻¹) |
|-----------|---|--|--|--|
| 887,0000 | 1,1742e-3 | 6,8438e-4 | 1,1025e-3 | 1,2745e-3 |
| 946,0000 | 1,0634e-3 | 6,5739e-4 | 9,7324e-4 | 1,1840e-3 |
| 1005,0000 | 9,9206e-4 | 5,9524e-4 | 8,6207e-4 | 1,1054e-3 |
| 1064,0000 | 9,4289e-4 | 5,7471e-4 | 8,1967e-4 | 9,5694e-4 |
| 1123,0000 | 8,8252e-4 | 4,8611e-4 | 6,2500e-4 | 9,0498e-4 |
| 1182,0000 | 8,8563e-4 | 5,0607e-4 | 7,0281e-4 | 8,5837e-4 |
| 1241,0000 | 8,4589e-4 | 4,2567e-4 | 5,7803e-4 | 7,4830e-4 |
| 1300,0000 | 8,2482e-4 | 4,4700e-4 | 5,5866e-4 | 6,5104e-4 |
| 1359,0000 | 8,0328e-4 | 4,0423e-4 | 5,4054e-4 | 6,2657e-4 |
| 1418,0000 | 7,7160e-4 | 3,6430e-4 | 5,2356e-4 | 6,0386e-4 |
| 1477,0000 | 7,3034e-4 | 3,5651e-4 | 3,3841e-4 | 5,2448e-4 |
| 1536,0000 | 7,7564e-4 | 2,9087e-4 | 4,1459e-4 | 3,9548e-4 |
| 1595,0000 | 7,2661e-4 | 2,8588e-4 | 4,0453e-4 | 4,9669e-4 |
| 1654,0000 | 7,0264e-4 | 3,0916e-4 | 3,1596e-4 | 4,8232e-4 |
| 1713,0000 | 7,3584e-4 | 2,7594e-4 | 5,0388e-4 | 4,6875e-4 |
| 1772,0000 | 6,4468e-4 | 3,2573e-4 | 2,2573e-4 | 4,5593e-4 |
| 1832,0000 | 7,3216e-4 | 2,1299e-4 | 3,7120e-4 | 3,9448e-4 |
| 1891,0000 | 6,7911e-4 | 2,3659e-4 | 3,2680e-4 | 3,8536e-4 |
| 1950,0000 | 6,5880e-4 | 2,0736e-4 | 2,4929e-4 | 3,2957e-4 |
| 2009,0000 | 6,6138e-4 | 2,0481e-4 | 3,1579e-4 | 2,7701e-4 |
| 2068,0000 | 6,1120e-4 | 2,0233e-4 | 2,4105e-4 | 3,1789e-4 |
| 2127,0000 | 6,1428e-4 | 1,7491e-4 | 2,0367e-4 | 1,3369e-4 |
| 2186,0000 | 5,8729e-4 | 1,9782e-4 | 2,3474e-4 | 3,0946e-4 |
| 2245,0000 | 5,9058e-4 | 1,7107e-4 | 1,6534e-4 | 3,0382e-4 |
| 2304,0000 | 6,2490e-4 | 2,1771e-4 | 2,6195e-4 | 2,9838e-4 |
| 2363,0000 | 6,1684e-4 | 1,6714e-4 | 1,6119e-4 | 1,6750e-4 |
| 2422,0000 | 6,2057e-4 | 7,0922e-5 | 1,5964e-4 | 2,0730e-4 |
| 2481,0000 | 5,9832e-4 | 1,6478e-4 | 3,4788e-4 | 2,4570e-4 |
| 2540,0000 | 5,0505e-4 | 1,3986e-4 | 1,8587e-4 | 2,4213e-4 |
| 2600,0000 | 5,0085e-4 | 9,2464e-5 | 1,2255e-4 | 1,5911e-4 |
| 2659,0000 | 4,9808e-4 | 4,5977e-5 | 1,2165e-4 | 1,5760e-4 |
| 2718,0000 | 4,7761e-4 | 1,1463e-4 | 2,1135e-4 | 1,5613e-4 |
| 2777,0000 | 4,2691e-4 | 9,1075e-5 | 1,1926e-4 | 1,1601e-4 |
| 2836,0000 | 4,1516e-4 | 1,3587e-4 | 5,9207e-5 | 1,1521e-4 |
| 2895,0000 | 4,5860e-4 | 8,9847e-5 | 2,9499e-5 | 1,5256e-4 |
| 2954,0000 | 5,1199e-4 | -- | -- | -- |

TABLA V. Valores relevantes de los parámetros Y_{ji} y X_{ji} para el cálculo de los valores de H y K con intervalo $\Delta x=12$ cm (posiciones pares).

| | x_2 | | x_4 | | x_6 | |
|-------|----------|----------|-------|----------|-------|----------|
| t_i | Y_{i2} | X_{i2} | | X_{i4} | | X_{i6} |

TABLA V (bis). Valores numéricos de los parámetros Y_{ji} y X_{ji} para el cálculo de los valores de H y K con intervalo $\Delta x=12$ cm, a partir del minuto 15 (posiciones pares).

| $t(s)$ | $(T_2^-/T_2) \times 10^3$ (cm ⁻²) | $(\dot{T}_2/T_2) \times 10^3$ (s ⁻¹) | $(\dot{T}_4/T_4) \times 10^3$ (s ⁻¹) | $(\dot{T}_6/T_6) \times 10^3$ (s ⁻¹) |
|-----------|---|--|--|--|
| 887,0000 | 9,7989e-4 | 8,1800e-4 | 1,2195e-3 | 1,4103e-3 |
| 946,0000 | 8,7313e-4 | 8,2846e-4 | 1,0606e-3 | 1,4184e-3 |
| 1005,0000 | 8,5113e-4 | 7,4280e-4 | 9,9715e-4 | 1,1983e-3 |
| 1064,0000 | 7,9630e-4 | 6,6667e-4 | 9,4086e-4 | 1,1179e-3 |
| 1123,0000 | 7,3006e-4 | 5,5556e-4 | 8,2697e-4 | 9,5238e-4 |
| 1182,0000 | 6,5481e-4 | 5,7899e-4 | 7,8788e-4 | 8,1081e-4 |
| 1241,0000 | 5,8287e-4 | 5,5955e-4 | 6,3657e-4 | 8,5911e-4 |
| 1300,0000 | 5,9616e-4 | 5,0271e-4 | 6,6890e-4 | 8,1699e-4 |
| 1359,0000 | 5,6306e-4 | 4,5045e-4 | 5,3591e-4 | 5,4517e-4 |
| 1418,0000 | 5,3302e-4 | 4,3860e-4 | 5,7113e-4 | 6,7873e-4 |

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1477,0000 | 5,0451e-4 | 3,5613e-4 | 5,0201e-4 | 5,7971e-4 |
| 1536,0000 | 4,6490e-4 | 3,4868e-4 | 4,3860e-4 | 4,9020e-4 |
| 1595,0000 | 4,4114e-4 | 3,7568e-4 | 3,7987e-4 | 6,8027e-4 |
| 1654,0000 | 5,0100e-4 | 3,3400e-4 | 3,7140e-4 | 4,5752e-4 |
| 1713,0000 | 5,0480e-4 | 2,9470e-4 | 5,4496e-4 | 4,4529e-4 |
| 1772,0000 | 3,8878e-4 | 3,8610e-4 | 4,3975e-4 | 4,3371e-4 |
| 1832,0000 | 3,6688e-4 | 3,1447e-4 | 2,9991e-4 | 4,8309e-4 |
| 1891,0000 | 4,1152e-4 | 2,4691e-4 | 3,3670e-4 | 4,1080e-4 |
| 1950,0000 | 3,9284e-4 | 2,4331e-4 | 3,7129e-4 | 3,4364e-4 |
| 2009,0000 | 3,3723e-4 | 2,0983e-4 | 2,8249e-4 | 3,3670e-4 |
| 2068,0000 | 3,2070e-4 | 2,6643e-4 | 2,7778e-4 | 3,3003e-4 |
| 2127,0000 | 3,2780e-4 | 1,7483e-4 | 2,7322e-4 | 2,6969e-4 |
| 2186,0000 | 2,8835e-4 | 1,4418e-4 | 1,9201e-4 | 3,1847e-4 |
| 2245,0000 | 2,9779e-4 | 2,2870e-4 | 1,8983e-4 | 3,1250e-4 |
| 2304,0000 | 3,4076e-4 | 2,5381e-4 | 3,0030e-4 | 3,5787e-4 |
| 2363,0000 | 3,3565e-4 | 1,6667e-4 | 1,8437e-4 | 1,0010e-4 |
| 2422,0000 | 3,0941e-4 | 8,2508e-5 | 2,5529e-4 | 1,4925e-4 |
| 2481,0000 | 2,1666e-4 | 1,6420e-4 | 2,8736e-4 | 2,4655e-4 |
| 2540,0000 | 1,5808e-4 | 1,6260e-4 | 1,7655e-4 | 2,4295e-4 |
| 2600,0000 | 1,6774e-4 | 1,3419e-4 | 1,3976e-4 | 1,9157e-4 |
| 2659,0000 | 1,7749e-4 | 1,3312e-4 | 1,3860e-4 | 1,8939e-4 |
| 2718,0000 | 1,8709e-4 | 5,2826e-5 | 1,7182e-4 | 2,3408e-4 |
| 2777,0000 | 1,5359e-4 | 1,3165e-4 | 1,7007e-4 | 1,3850e-4 |
| 2836,0000 | 1,3062e-4 | 1,0449e-4 | 6,7340e-5 | 1,8315e-4 |
| 2895,0000 | 1,7307e-4 | 1,2980e-4 | 1,3414e-4 | 2,2645e-4 |
| 2954,0000 | 1,9320e-4 | -- | -- | -- |

Los valores recogidos en la Tabla VI corresponden a las siguientes magnitudes, cuyas cuantías se obtienen de los valores registrados en las Tablas IV (bis) y V (bis)

| | |
|--|---|
| columna 2: derivada segunda espacial relativa de T | Promedio de los valores de esta magnitud en Tablas IV(bis) y V(bis) |
| columna 3: derivada primera temporal relativa de T | Promedio por filas de los valores de esta magnitud en Tabla IV(bis) |
| columna 4: derivada primera temporal relativa de T | Promedio por filas de los valores de esta magnitud en Tabla V(bis) |
| columna 5: valor medio de la derivada primera temporal relativa de T | Promedio por filas de las columnas 3 y 4 anteriores (Tabla VII) |

TABLA VI. Valores numéricos de los promedios de los parámetros Y_{ji} y X_{ji} para el cálculo de los valores de H y K con intervalo $\Delta x=12$ cm, a partir del minuto 15.

| $t(s)$ | $Y=(T''/T) \times 10^3$ (cm ⁻²) | $(\dot{T}/T)_{(media1)} \times 10^3$ | $(\dot{T}/T)_{(media2)} \times 10^3$ | $X=(\ddot{T}/T) \times 10^3$ (s ⁻¹) |
|-----------|---|--------------------------------------|--------------------------------------|---|
| 887,0000 | 1,0770e-3 | 1,0205e-3 | 1,1493e-3 | 1,0849e-3 |
| 946,0000 | 9,6828e-4 | 9,3820e-4 | 1,1025e-3 | 1,0203e-3 |
| 1005,0000 | 9,2160e-4 | 8,5425e-4 | 9,7940e-4 | 9,1683e-4 |
| 1064,0000 | 8,6959e-4 | 7,8377e-4 | 9,0847e-4 | 8,4612e-4 |
| 1123,0000 | 8,0629e-4 | 6,7203e-4 | 7,7830e-4 | 7,2517e-4 |
| 1182,0000 | 7,7022e-4 | 6,8908e-4 | 7,2589e-4 | 7,0749e-4 |
| 1241,0000 | 7,1438e-4 | 5,8400e-4 | 6,8508e-4 | 6,3454e-4 |
| 1300,0000 | 7,1049e-4 | 5,5223e-4 | 6,6287e-4 | 6,0755e-4 |
| 1359,0000 | 6,8317e-4 | 5,2378e-4 | 5,1051e-4 | 5,1714e-4 |
| 1418,0000 | 6,5231e-4 | 4,9724e-4 | 5,6282e-4 | 5,3003e-4 |
| 1477,0000 | 6,1743e-4 | 4,0646e-4 | 4,7928e-4 | 4,4287e-4 |
| 1536,0000 | 6,2027e-4 | 3,6698e-4 | 4,2582e-4 | 3,9640e-4 |
| 1595,0000 | 5,8387e-4 | 3,9570e-4 | 4,7861e-4 | 4,3715e-4 |
| 1654,0000 | 6,0182e-4 | 3,6914e-4 | 3,8764e-4 | 3,7839e-4 |
| 1713,0000 | 6,2032e-4 | 4,1619e-4 | 4,2832e-4 | 4,2225e-4 |
| 1772,0000 | 5,1673e-4 | 3,3580e-4 | 4,1985e-4 | 3,7783e-4 |
| 1832,0000 | 5,4952e-4 | 3,2622e-4 | 3,6582e-4 | 3,4602e-4 |
| 1891,0000 | 5,4532e-4 | 3,1625e-4 | 3,3147e-4 | 3,2386e-4 |

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1950,0000 | 5,2582e-4 | 2,6207e-4 | 3,1941e-4 | 2,9074e-4 |
| 2009,0000 | 4,9930e-4 | 2,6587e-4 | 2,7634e-4 | 2,7110e-4 |
| 2068,0000 | 4,6595e-4 | 2,5376e-4 | 2,9141e-4 | 2,7258e-4 |
| 2127,0000 | 4,7104e-4 | 1,7076e-4 | 2,3925e-4 | 2,0500e-4 |
| 2186,0000 | 4,3782e-4 | 2,4734e-4 | 2,1822e-4 | 2,3278e-4 |
| 2245,0000 | 4,4419e-4 | 2,1341e-4 | 2,4368e-4 | 2,2854e-4 |
| 2304,0000 | 4,8283e-4 | 2,5935e-4 | 3,0399e-4 | 2,8167e-4 |
| 2363,0000 | 4,7624e-4 | 1,6528e-4 | 1,5038e-4 | 1,5783e-4 |
| 2422,0000 | 4,6499e-4 | 1,4595e-4 | 1,6235e-4 | 1,5415e-4 |
| 2481,0000 | 4,0749e-4 | 2,5279e-4 | 2,3270e-4 | 2,4275e-4 |
| 2540,0000 | 3,3157e-4 | 1,8929e-4 | 1,9404e-4 | 1,9166e-4 |
| 2600,0000 | 3,3429e-4 | 1,2471e-4 | 1,5518e-4 | 1,3994e-4 |
| 2659,0000 | 3,3779e-4 | 1,0841e-4 | 1,5370e-4 | 1,3106e-4 |
| 2718,0000 | 3,3235e-4 | 1,6070e-4 | 1,5291e-4 | 1,5681e-4 |
| 2777,0000 | 2,9025e-4 | 1,0878e-4 | 1,4674e-4 | 1,2776e-4 |
| 2836,0000 | 2,7289e-4 | 1,0343e-4 | 1,1833e-4 | 1,1088e-4 |
| 2895,0000 | 3,1583e-4 | 9,0634e-5 | 1,6346e-4 | 1,2705e-4 |
| 2954,0000 | 3,5259e-4 | -- | -- | -- |

$$k=1,08\pm 0,04 \text{ cal s}^{-1}\text{cm}^{-1}\text{K}^{-1},$$

$$h=1,6\times 10^{-4} \text{ cal s}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{K}^{-1}.$$

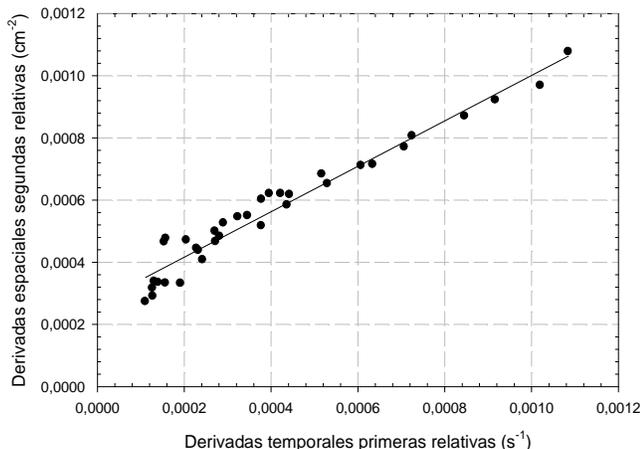


FIGURA 6. Ajuste de los datos correspondientes a la Tabla VII

V. RESULTADOS Y DISCUSION

La representación gráfica de los datos de Y frente a X recogidos en la Tabla VI (Figura 6) y el subsiguiente ajuste por mínimos cuadrados conduce a los siguientes resultados

$$K = \frac{\rho c}{k} = 0,7308 \frac{\text{cm}^{-2}}{\text{s}},$$

$$H = \frac{2h}{rk} = 2,7032 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2},$$

con un coeficiente de correlación $r=0,98$. Con estos resultados y habida cuenta de que para una temperatura ambiente media de $22,3 \text{ }^\circ\text{C}$ ($295,45 \text{ K}$), el valor de la densidad del cobre es $\rho=8,96 \text{ g/cm}^3$ y su calor específico sigue la fórmula [4] $c_p=22,6+10^{-2}T \text{ (J mol}^{-1}\text{K}^{-1}\text{)}$, considerando que el peso atómico del cobre es $63,55 \text{ g/mol}$, se obtiene los siguientes resultados

El primer valor muestra un acuerdo que podemos considerar aceptable, con una discrepancia frente al valor tabulado [5] ($0,97 \text{ cal s}^{-1}\text{cm}^{-1}\text{K}^{-1}$) de un 10%, mientras que el segundo muestra unas pérdidas laterales prácticamente despreciables.

El valor de k también se puede deducir de la evolución térmica del agua del baño en contacto con la barra, habida cuenta que, el correspondiente balance calorífico en ausencia de pérdidas laterales, puede escribirse de forma aproximada como

$$Sk \frac{\Delta\theta}{L} = (mc + k^*) \frac{\Delta\theta_{(H_2O)}}{\Delta t}, \quad (9)$$

donde $\Delta\theta=T(1)-T(6)$ que corresponde a la diferencia de temperatura entre los puntos 1 y 6 de la barra en cierto instante t_i , L la longitud de la misma y S su sección recta, siendo m la masa del agua del baño (700 g), c su calor específico, con k^* el equivalente del conjunto calorimétrico (15 g), e $\Delta\theta_{(H_2O)}$ el cambio térmico del baño en el intervalo de tiempo Δt_i .

Conocido éste, siempre es posible para cada uno de los instantes considerados, determinar el cociente incremental en la forma

$$\frac{\Delta\theta_{(H_2O)}}{\Delta t} = \frac{\theta_{(H_2O)}(t + \Delta t) - \theta_{(H_2O)}(t)}{\Delta t}. \quad (10)$$

De ésta manera, para cada instante se puede obtener un valor de k , y proceder luego al promediado de los valores obtenidos. Los resultados correspondientes se recogen en la Tabla VII. El valor medio encontrado para k es $1,05 \text{ cal s}^{-1}\text{cm}^{-1}\text{K}^{-1}$ en buen acuerdo con el resultado antes obtenido.

TABLA VII. Valores obtenidos para los parámetros de la ecuación (10) correspondientes al calentamiento a partir del minuto 15, mostrando los valores de k para cada instante de tiempo.

| t (s) | T_1 (°C) | T_6 (°C) | $(\Delta Q/L)*S$ (°C cm) | $\theta(H_2O)$ (°C) | $\Delta\theta(H_2O)/\Delta t$ (°C/s) | k_{fila} (cal s ⁻¹ cm ⁻¹ K ⁻¹) |
|-----------|------------|------------|--------------------------|---------------------|--------------------------------------|--|
| 887,0000 | 41,4000 | 13,0000 | 2,9740 | 22,1000 | 3,3333e-3 | 0,8014 |
| 946,0000 | 43,1000 | 14,1000 | 3,0369 | 22,3000 | 3,3333e-3 | 0,7848 |
| 1005,0000 | 44,8000 | 15,3000 | 3,0892 | 22,5000 | 3,3333e-3 | 0,7715 |
| 1064,0000 | 46,4000 | 16,4000 | 3,1416 | 22,7000 | 3,3333e-3 | 0,7586 |
| 1123,0000 | 48,0000 | 17,5000 | 3,1939 | 22,9000 | 5,0000e-3 | 1,1193 |
| 1182,0000 | 49,4000 | 18,5000 | 3,2358 | 23,2000 | 1,6667e-3 | 0,3683 |
| 1241,0000 | 50,9000 | 19,4000 | 3,2987 | 23,3000 | 6,6667e-3 | 1,4450 |
| 1300,0000 | 52,2000 | 20,4000 | 3,3301 | 23,7000 | 3,3333e-3 | 0,7157 |
| 1359,0000 | 53,6000 | 21,4000 | 3,3720 | 23,9000 | 5,0000e-3 | 1,0602 |
| 1418,0000 | 54,9000 | 22,1000 | 3,4348 | 24,2000 | 3,3333e-3 | 0,6939 |
| 1477,0000 | 56,1000 | 23,0000 | 3,4662 | 24,4000 | 6,6667e-3 | 1,3752 |
| 1536,0000 | 57,3000 | 23,8000 | 3,5081 | 24,8000 | 5,0000e-3 | 1,0191 |
| 1595,0000 | 58,3000 | 24,5000 | 3,5395 | 25,1000 | 5,0000e-3 | 1,0100 |
| 1654,0000 | 59,3000 | 25,5000 | 3,5395 | 25,4000 | 5,0000e-3 | 1,0100 |
| 1713,0000 | 60,4000 | 26,2000 | 3,5814 | 25,7000 | 5,0000e-3 | 0,9982 |
| 1772,0000 | 61,4000 | 26,9000 | 3,6128 | 26,0000 | 5,0000e-3 | 0,9895 |
| 1832,0000 | 62,6000 | 27,6000 | 3,6652 | 26,3000 | 6,6667e-3 | 1,3005 |
| 1891,0000 | 63,4000 | 28,4000 | 3,6652 | 26,7000 | 5,0000e-3 | 0,9754 |
| 1950,0000 | 64,3000 | 29,1000 | 3,6861 | 27,0000 | 5,0000e-3 | 0,9699 |
| 2009,0000 | 65,1000 | 29,7000 | 3,7071 | 27,3000 | 6,6667e-3 | 1,2858 |
| 2068,0000 | 65,9000 | 30,3000 | 3,7280 | 27,7000 | 5,0000e-3 | 0,9590 |
| 2127,0000 | 66,7000 | 30,9000 | 3,7490 | 28,0000 | 6,6667e-3 | 1,2715 |
| 2186,0000 | 67,4000 | 31,4000 | 3,7699 | 28,4000 | 5,0000e-3 | 0,9483 |
| 2245,0000 | 68,2000 | 32,0000 | 3,7909 | 28,7000 | 6,6667e-3 | 1,2574 |
| 2304,0000 | 68,9000 | 32,6000 | 3,8013 | 29,1000 | 5,0000e-3 | 0,9405 |
| 2363,0000 | 69,8000 | 33,3000 | 3,8223 | 29,4000 | 6,6667e-3 | 1,2471 |
| 2422,0000 | 70,5000 | 33,5000 | 3,8746 | 29,8000 | 6,6667e-3 | 1,2302 |
| 2481,0000 | 70,8000 | 33,8000 | 3,8746 | 30,2000 | 6,6667e-3 | 1,2302 |
| 2540,0000 | 71,5000 | 34,3000 | 3,8956 | 30,6000 | 6,6667e-3 | 1,2236 |
| 2600,0000 | 72,1000 | 34,8000 | 3,9060 | 31,0000 | 6,6667e-3 | 1,2203 |
| 2659,0000 | 72,5000 | 35,2000 | 3,9060 | 31,4000 | 6,6667e-3 | 1,2203 |
| 2718,0000 | 72,7000 | 35,6000 | 3,8851 | 31,8000 | 5,0000e-3 | 0,9202 |
| 2777,0000 | 73,2000 | 36,1000 | 3,8851 | 32,1000 | 8,3333e-3 | 1,5336 |
| 2836,0000 | 73,6000 | 36,4000 | 3,8956 | 32,6000 | 5,0000e-3 | 0,9177 |
| 2895,0000 | 74,2000 | 36,8000 | 3,9165 | 32,9000 | 6,6667e-3 | 1,2171 |
| 2954,0000 | 74,6000 | 37,3000 | 3,9060 | 33,3000 | -- | -- |

VI. CONCLUSIONES

El procedimiento expuesto para el estudio del transitorio en una barra metálica, calentada por uno de sus extremos, ha permitido la determinación simultánea del coeficiente de pérdidas laterales y de la conductividad térmica de la misma y se ha basado en la elaboración de una Tabla de temperaturas en puntos adecuadamente espaciados de la misma, para intervalos de tiempo suficientemente amplios. El manejo de los datos, mediante expresiones en incrementos finitos, permite reducir el problema a un simple ajuste lineal por mínimos cuadrados, de cuya pendiente y ordenada en el origen, se deduce la información deseada.

REFERENCIAS

- [1] Kinsler, M., Kinzel, E., *The Physics Teacher* **45**, 382-385 (2007).
- [2] Ortega, M. R., Ibáñez, J. A., *Lecciones de Física. Termología I* (DM, Murcia, 2003).
- [3] Díaz-Gilera, A., *Am. J. Phys.* **58**, 779-780 (1990).
- [4] DeHoff, R. T., *Thermodynamics in Materials Science*, (McGraw Hill, New York, 1993).
- [5] Benenson, W. *et al.*, *Handbook of Physics*, (Springer, New York, 2002).