Comportamiento dual de la fuerza: como vector y como covector

Yolanda Benítez Trejo[1,2], Zbigniew Oziewicz[1], César Mora[2]
[1] *Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Departamento de Física. Antigua Carretera México-Teoloyucan km 2.5 Col. San Sebastián Xhala. Cuautitlán Izcalli. CP 54714, Estado de México.*
[2] *Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Instituto Politécnico Nacional. Av. Legaria # 694, Col. Irrigación, CP 11500, México D. F.*

E-mail: ybenitez@unam.mx; oziewicz@unam.mx; cmoral@ipn.mx

(Recibido el 2 de Junio de 2008; 29 de Agosto de 2008)

Resumen

En éste artículo se describe la fuerza en la Física con dos diferentes comportamientos: como vector y como covector. La fuerza se comporta como vector (con dirección), en la Segunda Ley de Newton, cuando ésta se encuentra proporcionada con la aceleración. Por otro lado, l*a* fuerza se comporta como covector (sin dirección), si ésta se encuentra relacionada con el escalar de trabajo. Esto forma parte del concepto de dualidad. Para que exista el espacio de vectores, debe existir el espacio de covectores. Cada forma no puede existir por sí sola.

Palabras clave: Fuerza como vector, fuerza como covector, fuerza y trabajo.

Abstract

In this article the force in Physics is described with two different behaviors: like vector and covector. The force behaves like vector (with direction), in the Second Law of Newton, when this one is proportionate with the acceleration. On the other hand, the force behaves like covector (without direction), if this one is related the scalar of work. This is part of the duality concept. So that the space of vectors exists, the convector space must exist. Each form cannot exist by itself.

Keywords: Force like a vector, force like a covector, force and work.

PACS: 45.20.D-, 45.20.dg, 45.50.Dd. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

El principio de *dualidad onda-partícula*, resolvió una aparente paradoja, demostrando que la luz y la materia poseen propiedades de partícula y de onda. De acuerdo con la física clásica existen diferencias entre onda y partícula, una partícula ocupa un lugar en el espacio y tiene masa; mientras que una onda se extiende en el espacio caracterizándose por tener una velocidad definida y masa nula.

Hawking consideró el principio de dualidad onda-partícula como un "*concepto de la mecánica cuántica según el cual no hay diferencias fundamentales entre partículas y ondas: las partículas pueden comportarse como ondas y viceversa.*" [1], hecho comprobado experimentalmente. El físico francés De Broglie [2, 3], en 1924 en su tesis doctoral propuso la existencia de ondas de materia, "*Inspirado por el comportamiento dual onda-corpúsculo de la radiación, De Broglie especuló sobre la posibilidad que también la materia tuviera un comportamiento dual, esto es que las entidades físicas que consideramos como partículas (electrones, átomos, bolas de billar, etc.) pudieran en determinadas circunstancias manifestar propiedades ondulatorias.*"[4].

Esta característica establece que la materia tiene una onda asociada a ella, la cual es una idea revolucionaria. Otras analogías físicas en la naturaleza son: tiempo y espacio, campo eléctrico y magnético, onda y partícula, cantidad de movimiento (o momento) y posición, etc. En forma similar el concepto de fuerza se puede explicar mediante su comportamiento dual: como vector y como un covector. Sin embargo, en ambos comportamientos se usa el mismo nombre de 'fuerza' para dos diferentes conceptos matemáticos. Por eso, es importante discutir la diferencia entre estas dos concepciones. El presente trabajo tiene el objetivo de utilizar el concepto de fuerza para discutir la relación entre vectores y covectores.

El artículo está organizado como sigue, en la Secc. II analizamos la fuerza como vector, luego en la Secc. III se muestran las diferenciales de escalar y de vector. En la Secc. IV mostramos la fuerza y el trabajo mediante formas diferenciales. Finalmente, en la Secc. V mostramos nuestras conclusiones.

II. FUERZA COMO VECTOR

Debido al concepto de dualidad podemos definir a la Fuerza como un vector y a su dual como un covector, así Tendremos dos conceptos de fuerza: uno como vector y otro como covector. Así identificamos matemáticamente a estas dos cantidades y las escribimos como sigue

$$*\mathbf{F} = \mathscr{F} \qquad *^{-1}\mathscr{F} = \mathbf{F}.$$

Donde, como es usual se representa al operador de dualidad indicado con un asterisco $*$ actuando sobre el vector de fuerza $\mathbf{F}$ para producir a su dual $\mathscr{F}$, y posteriormente indicamos a la operación inversa de dualidad $*^{-1}$ que hace exactamente el mapeo inverso.

Se pueden efectuar dos análisis diferentes para detectar una fuerza: midiendo la aceleración y midiendo el trabajo.

La fuerza se comporta como un vector si y solo si ésta se encuentra relacionada con la aceleración. La segunda ley de Newton [5, 6] relaciona la aceleración del centro de masa de un cuerpo con la fuerza que actúa sobre él, la fuerza se encuentra proporcionada con la aceleración,

$$Fuerza = masa \cdot aceleración\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}\,. \tag{2}$$

De forma común diversos autores expresan la fuerza $\mathbf{F}$ como $\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}}$ [5, 6], donde las componentes escalares de la fuerza son F_x, F_y, F_z.

La posición de una partícula describe una trayectoria como se ilustra en la figura 1, en donde se muestra un desplazamiento del punto 1 al punto 2. La posición de la partícula en un instante de tiempo se representa por medio del vector de posición

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{3}$$

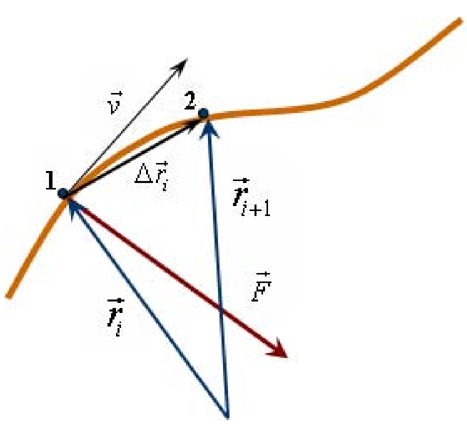

FIGURA 1. Los vectores fuerza y desplazamiento asociados a una partícula en movimiento.

En los instantes de tiempo t_1 y t_2, la partícula se encuentra en los puntos 1 y 2 respectivamente, el vector de desplazamiento (cambio de posición), se escribe como:

$$\Delta\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\,, \tag{4}$$

en donde $\Delta\mathbf{r}_i$ es un incremento pequeño, en el vector de desplazamiento i-ésimo , en donde

$$\mathbf{r}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}\,, \tag{5}$$

y

$$\mathbf{r}_{i+1} = x_{i+1}\hat{\mathbf{i}} + y_{i+1}\hat{\mathbf{j}} + z_{i+1}\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{6}$$

Por lo tanto,

$$\Delta\mathbf{r}_i = \left(\Delta x_i\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\Delta y_i\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\Delta z_i\right)\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{7}$$

El trabajo realizado por la fuerza sobre una trayectoria se obtiene mediante el producto punto o producto escalar $\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}_i$ como

$$\text{Trabajo}=\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}_i = Escalar\,, \tag{8}$$

$$U = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}_i = F\left(\Delta r_i\right)\cos\theta\,, \tag{9}$$

en donde F es la magnitud de la fuerza, $\Delta\mathbf{r}$ es la magnitud del desplazamiento y el ángulo θ lo forman los dos vectores $\mathbf{F}$ y $\Delta\mathbf{r}_i$.

Aplicando el producto punto a $\mathbf{F}$ y $\Delta\mathbf{r}_i$ se obtiene:

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}_i = \left(F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\hat{\mathbf{k}}\right), \tag{10}$$

$$U = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}_i = F_x\left(\Delta x\right) + F_y\left(\Delta y\right) + F_z\left(\Delta z\right), \tag{11}$$

en donde Δx, Δy y Δz son números pequeños (escalares).

Así, se entiende que el producto punto aplicado a dos vectores nos da un escalar.

Por otro lado, el trabajo total realizado por varias fuerzas es la suma del trabajo efectuado por cada una de ellas, así tenemos

$$\text{Trabajo total} = U_{total} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n\,, \tag{12}$$

$$U_{total} = \sum_{i=1}^{n} Fuerza_i\cdot\left(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\right). \tag{13}$$

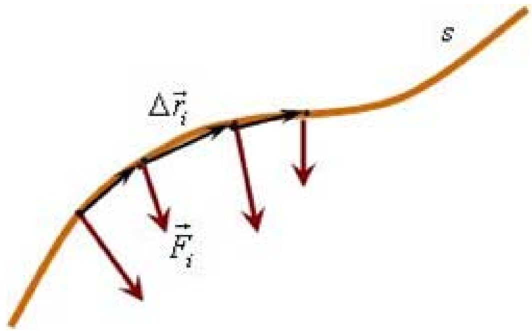

FIGURA 2. Desplazamiento de la partícula a lo largo de una trayectoria.

III. DIFERENCIAL DE UNA MAGNITUD ESCALAR Y DIFERENCIAL DE UN VECTOR

Si $\mathbf{r}$ es un vector, entonces ¿qué es $d\mathbf{r}$ [7, 8]?, para poder contestar esta pregunta, primero se explicará que $d\mathbf{r}$ no es $\Delta\mathbf{r}$.

Si se obtiene la diferencial de un escalar, el resultado es un covector, si se obtiene la diferencial de un vector, el resultado es un tensor (Fig. 3).

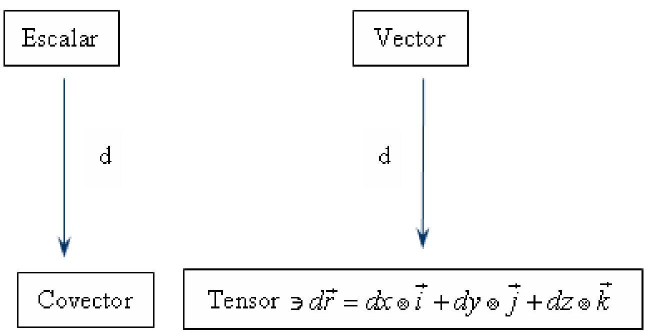

FIGURA 3. Diferencial de escalar y diferencial de vector.

Consideremos el vector de posición $\mathbf{r}$ y su diferencial

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\,, \tag{14}$$

$$d\mathbf{r} = d\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right), \tag{15}$$

$$d\mathbf{r} = d\left(x\hat{\mathbf{i}}\right) + d\left(y\hat{\mathbf{j}}\right) + d\left(z\hat{\mathbf{k}}\right), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} = {}& dx\otimes\hat{\mathbf{i}} + x\otimes d\hat{\mathbf{i}} + dy\otimes\hat{\mathbf{j}} \\ & + y\otimes d\hat{\mathbf{j}} + dz\otimes\hat{\mathbf{k}} + z\otimes d\hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Suponiendo que $d\hat{\mathbf{i}}, d\hat{\mathbf{j}}, d\hat{\mathbf{k}} = 0$, entonces tenemos que

$$d\mathbf{r} = dx\otimes\hat{\mathbf{i}} + dy\otimes\hat{\mathbf{j}} + dz\otimes\hat{\mathbf{k}}\,. \tag{19}$$

Este resultado muestra que $d\mathbf{r}$ es un (1,1)-tensor.

IV. FUERZA Y TRABAJO CON FORMAS DIFERENCIALES

La fuerza se comporta como un covector si y solo si ésta se encuentra relacionada con la integral de trabajo. Recordemos que si existen dos vectores, $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ el producto punto entre ellos es

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = Escalar\,, \tag{20}$$

pero, de acuerdo a la notación

$${}^{*}\mathbf{F}\left(\Delta\mathbf{r}\right) = Escalar\,, \tag{21}$$

$$^{*}\mathbf{F} = \text{covector} = \mathscr{F}\,, \tag{22}$$

en donde $\mathscr{F}$ es la fuerza como covector. Esto quiere decir que la fuerza como covector se aplica a un vector y como resultado se obtiene un escalar.

$$\left(\text{covector}\right)\left(\text{vector}\right)\text{=escalar}\,, \tag{23}$$

$$\mathscr{F}\left(\Delta\mathbf{r}\right) \in \mathscr{R}\,. \tag{24}$$

Pero si se tienen un vector y un tensor, el producto punto entre ellos es un covector

$$(\text{vector})\cdot\left((1,1)\ \text{tensor}\right) = \text{covector}\,. \tag{25}$$

El producto punto para la expresión $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ expresa la fuerza como covector:

$$\mathscr{F} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\,. \tag{26}$$

Sustituyendo los valores de $\vec{F}$ y de $d\vec{r}$, obtenemos

$$\mathscr{F} = \left(F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(dx\otimes\hat{\mathbf{i}} + dy\otimes\hat{\mathbf{j}} + dz\otimes\hat{\mathbf{k}}\right), \tag{27}$$

$$\mathscr{F} = F_x dx\left(\hat{\mathbf{i}}\otimes\hat{\mathbf{i}}\right) + F_y dy\left(\hat{\mathbf{j}}\otimes\hat{\mathbf{j}}\right) + F_z dz\left(\hat{\mathbf{k}}\otimes\hat{\mathbf{k}}\right), \tag{28}$$

$$\mathscr{F} = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,. \tag{29}$$

La integral de $\int_{ruta} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula (Fig. 1) cuando ésta se desplaza del punto 1 al punto 2, esto es,

$$Trabajo = \int_{ruta} \mathscr{Fuerza\ como\ covector}\,, \tag{30}$$

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \qquad (31)$$

Una curva se puede aproximar como la suma de vectores. Por lo tanto, la integral sobre la curva se puede aproximar como la suma de valores de fuerza (como covector) sobre los vectores que aproximan la curva (Fig. 4).

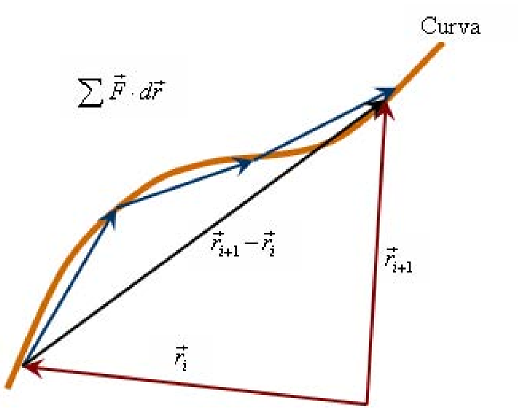

FIGURA 4. Representación del trabajo total.

$$Trabajo \approx \mathscr{Fuerza}\left(desplazamiento\right), \qquad (32)$$

$$U = \left(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\right)\left(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\right), \qquad (33)$$

$$\mathscr{F} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \,, \qquad (34)$$

$$U = \mathscr{F}\left(\Delta\mathbf{r}\right), \qquad (35)$$

en donde $\mathscr{F} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$ Fuerza como covector, sin desplazamiento, porque $d\mathbf{r}$ es un (1,1)-tensor, y $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$ es un desplazamiento. En este caso la fuerza actúa como un covector [8], entonces:

$$\mathscr{F} = g\mathbf{F} = {*}\mathbf{F} \,, \qquad (36)$$

en donde g es el potencial gravitacional. *La dualidad consiste en que; para que exista el espacio de vectores, debe existir el espacio de covectores*.

V. CONCLUSIONES

Cuando el físico Francés De Broglie publicó su trabajo sobre la radiación de la materia, aún no se había observado el comportamiento ondulatorio asociado con el movimiento de una partícula, aunque el tema había sido investigado en varias ocasiones, de Broglie afirmó: *"toda la materia presenta características tanto ondulatorias como corpusculares comportándose de uno u otro modo dependiendo del experimento específico"* [2]. En forma similar se ha mostrado que el comportamiento de la fuerza, asociado a una masa posee una naturaleza dual: su comportamiento como vector y como covector, dependiendo del experimento a que nos refiramos. La fuerza se comporta como vector cuando se encuentra relacionada con la segunda Ley de Newton y se comporta como covector cuando se puede medir a través del trabajo.

La medida del trabajo es una medición de curvas (superficies), el trabajo en dirección de una curva de potencial es cero; es decir, no es sensible a la dirección del movimiento, se observa que el trabajo de una partícula para desplazarse de un punto a otro es independiente de la trayectoria.

AGRADECIMIENTOS

C. Benitez y Z. Oziewicz recibieron apoyo de la cátedra de Investigación "Tecnología Informática para la Investigación Educativa y la enseñanza de la Mecánica" y del proyecto del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica de la UNAM, IN 104908. C. Mora es becario COFAA y EDI-IPN, y recibió apoyo mediante los proyectos de investigación SIP-20082788 y CONACYT-91335.

REFERENCIAS

[1] Hawking, S. Wave/particle Duality. Available on <http://www.hawking.org.uk/activity/acindex.html>, Consultado el 1 de junio de 2008.

[2] De Broglie, L. V., *Recherches sur la théorie des quanta* (Researches on the quantum theory), Thesis, Paris, 1924.

[3] De Broglie, L. V., *The wave nature of the electron*, (1929). Disponible en http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1929/broglie-lecture.pdf. Consultado el 1 de junio de 2008.

[4] De Broglie, L. V., *Propiedades ondulatorias de la materia*, (1929). Disponible en <http://www.lfp.uba.ar/Julio_Gratton/cuantica/06.DeBroglie.pdf> Consultado el 1 de junio de 2008.

[5] Beer F., Johnston E. Jr., Eisenberg E., *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica.* (Editorial Mc. Graw Hill. 8ava Edición, México, pp. 697-699, 2007).

[6] Hibbeler R. C., *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*, (Editorial Pearson Educación 10a edición, México, 2004). <www.pearsoneducacion.net/hibbeler>.

[7] Flanders, H., *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. (Dover Publications, INC. New York, 1989)).

[8] Oziewicz, Z., *350 Años de controversias en Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral*, Material Didáctico para el Taller de Enseñanza de la Matemática y la Física, Universidad Jesuita de Guadalajara, Jalisco. México. p 56. (2005).