

Deformaciones de un frente de onda



**Magdalena Marciano-Melchor, María Aurora Molina-Vilchis y
Ramón Silva-Ortigoza**

*CIDETEC-IPN. Departamento de Posgrado. Unidad Profesional Adolfo López Mateos.
C.P. 07700, México, D.F., México.*

E-mail: mmarciano@ipn.mx

(Recibido el 1 de Agosto de 2008; aceptado el 3 de Septiembre de 2008)

Resumen

Usando ciertas condiciones de la teoría de la óptica geométrica presentamos las ecuaciones analíticas que describen las deformaciones de un frente de onda esférico afectado por la combinación lineal de las aberraciones de Seidel. Además, se muestra la posible evolución geométrica del frente de onda deformado.

Palabras clave: Aberraciones de Seidel, frente de onda, óptica geométrica.

Abstract

Using certain conditions of the theory of the geometric optics we presented the analytical equations that describe the deformations of a spherical wavefront affected by the linear combination of the aberrations of Seidel. In addition, is the possible geometric evolution of the deformed wavefront.

Keywords: Aberrations of Seidel, wavefront, geometric optics.

PACS: 42.15.Fr, 42.15.Dp, 42.15.-i

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La óptica geométrica tiene sus orígenes en las primeras lentes localizadas en Egipto (2600 años AC). Existen trabajos bien documentados en otros momentos y partes del mundo que hacen referencia al descubrimiento de lentes utilizadas para correcciones visuales, por ejemplo lentes encontradas en México y Perú que datan de la época prehispánica [1, 2]. Con los estudios realizados por físicos notables, como Newton, Huyghens, Young y Maxwell, el estudio formal de la óptica geométrica, se practica con la estrecha relación entre las lentes y los rayos de luz que generan las imágenes de los objetos. Así, su desarrollo ha proporcionado un panorama no sólo para el estudio de las lentes, sino de sistemas ópticos sofisticados y del conocimiento de las leyes y principios físicos que rigen a las imágenes que estos producen. De este modo, podemos argumentar que la óptica geométrica tiene como objetivo describir la trayectoria de la luz en los instrumentos ópticos y dar los fundamentos para la construcción más adecuada de los mismos [3]. En la búsqueda de la construcción de sistemas *ópticos perfectos*, es decir, sistemas ópticos con calidad en las imágenes, se presentó en el año de 1860 por medio de Philipp Ludwig von Seidel matemático alemán, la primera caracterización de las deformaciones de las imágenes producidas por los componentes ópticos, tales como lentes o espejos. Las deformaciones que caracterizó Seidel, ahora referidas comúnmente como aberraciones de Seidel o aberraciones geométricas son: aberración esférica, coma, astigmatismo,

curvatura de campo y distorsión, estas han sido abordadas desde el punto de vista tanto físico, como médico, llegando a establecerse criterios de solución para cada una de ellas [4, 5, 6, 7]. Sin embargo, en este trabajo planteamos que en la necesidad de encontrar la mejor imagen formada por un sistema óptico, se obtendrían mayores resultados si conjuntamos las aberraciones, en este caso, apoyados en la teoría de la óptica geométrica, considerando que la evaluación de las imágenes está basada de forma conveniente en términos de las aberraciones del frente de onda que produce el sistema. Cabe aclarar que este trabajo forma parte de un proyecto que conlleva a la necesidad de encontrar la mejor imagen producida por un sistema óptico con miras a la contribución en el campo de la visión artificial [8]. En esta ocasión deseamos expresar de forma analítica la deformación de un frente de onda esférico afectado por las aberraciones de Seidel en un sistema óptico simétrico y mostrar la representación geométrica de esa deformación. Por lo anterior, este trabajo está organizado como sigue. En la sección II, como un caso particular, se plantea la existencia de un sistema óptico simétrico. En la sección III ayudados por la teoría de la óptica geométrica, se hace el planteamiento de las funciones que deformarán un frente de onda esférico. Como resultados, en la sección IV, se muestra geoméricamente la deformación del frente de onda esférico, descrito por las ecuaciones analíticas obtenidas en la sección III. Finalmente, en la sección V se presentan las conclusiones de nuestro trabajo.

II. CONDICIONES PARA EL PROBLEMA

Para comenzar consideraremos dentro de la óptica geométrica, un caso particular, la existencia de un sistema óptico simétrico, es decir, un sistema que alinea el eje óptico con el eje coordenado z , ver Figura 1, donde (ξ, η) son las coordenadas de la fuente puntual sobre el plano objeto y el punto con coordenadas (x_0, y_0, z_0) se encuentra sobre el frente de onda esférico, a $\Delta(x_0, y_0)$ se le conoce como función de aberración que para este trabajo la consideraremos como la diferencia entre el frente de onda real y el frente de onda esférico.

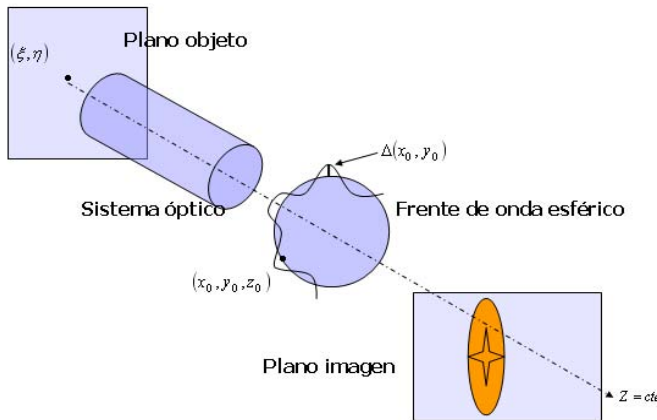


FIGURA 1. Sistema óptico simétrico.

III. PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Consideraremos las ecuaciones que dentro del límite de la óptica geométrica y en la mayoría de las aplicaciones se asumen [9]:

$$|\Delta(x_0, y_0)| \ll R_0, \quad z_0 \cong -R_0, \quad \frac{z_0}{R_0} \ll 1, \quad (1)$$

donde R_0 es el radio del frente de onda esférico que debe cumplir con tales aproximaciones. Las expresiones del mapeo que representa la evolución del frente de onda aberrado, utiliza las Ecs. (1) para encontrar que el frente de onda estará deformado como en [10]:

$$\begin{aligned} x(x_0, y_0, z) &= -\frac{zx_0}{R_0} + R_0 \frac{\partial \Delta(x_0, y_0)}{\partial x_0}, \\ y(x_0, y_0, z) &= -\frac{zy_0}{R_0} + R_0 \frac{\partial \Delta(x_0, y_0)}{\partial y_0}, \\ z(x_0, y_0, z) &= z, \end{aligned} \quad (2)$$

Por otra parte, para encontrar la forma analítica de la ecuación que involucra a las aberraciones de Seidel, haremos el siguiente desarrollo en serie de potencias a cuarto orden de una función $f: R^3 \rightarrow R$ el cual está dado por

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x=0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x=0} x_i x_j + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Big|_{x=0} x_i x_j x_k + \\ &+ \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \Big|_{x=0} x_i x_j x_k x_l + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

en nuestro caso debido a la simetría del sistema óptico alrededor del eje Z , la función de aberración $\Delta(x_0, y_0)$ únicamente puede depender de los siguientes invariantes

$$(\xi, \eta) \cdot (\xi, \eta), \quad (x_0, y_0) \cdot (x_0, y_0), \quad (\xi, \eta) \cdot (x_0, y_0),$$

donde (ξ, η) como ya mencionamos denota la posición de la fuente puntual en el plano objeto y (x_0, y_0) son las coordenadas x y y de un punto sobre el frente de onda aberrado inicial. Si $|(\xi, \eta)| = \tilde{h}$, $|(x_0, y_0)| = \rho$ y $\text{Cos}((\xi, \eta) \cdot (x_0, y_0)) = \text{Cos} \psi$, entonces la función de aberración debe ser una función de ρ^2, \tilde{h}^2 y $\rho \tilde{h} \text{Cos} \psi$. Aplicando la Ec. (3) a la función $\Delta(x_1, x_2, x_3) = \Delta(\rho, \tilde{h}, \text{Cos} \psi)$ se obtiene [11]:

$$\begin{aligned} \Delta(\rho, \tilde{h}, \text{Cos} \psi) &= a_0 + b_0 \tilde{h}^2 + b_1 \rho^2 + b_2 \tilde{h} \rho \text{Cos} \psi + c_0 \tilde{h}^4 + c_1 \rho^4 + \\ &+ c_2 \tilde{h}^2 \rho^2 \text{Cos}^2 \psi + c_3 \tilde{h}^2 \rho^2 + c_4 \tilde{h}^3 \rho \text{Cos} \psi + c_5 \tilde{h} \rho^3 \text{Cos} \psi + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

La información que requerimos está contenida en los términos que se relacionan con c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5 a los que se conoce como coeficientes de aberración de Seidel asociados con: aberración esférica, astigmatismo, curvatura de campo, distorsión y coma, respectivamente. Por otra parte, si se considera $(\xi, \eta), (x_0, y_0)$ y se renombra a los coeficientes asociados con las aberraciones de Seidel la función de aberración toma la siguiente forma [9]

$$\begin{aligned} \Delta(x_0, y_0) &= \frac{1}{4} B(x_0^2 + y_0^2)^2 - F(x_0^2 + y_0^2)(\xi x_0 + \eta y_0) + C(\xi x_0 + \eta y_0)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} D(\xi^2 + \eta^2)(x_0^2 + y_0^2) - E(\xi^2 + \eta^2)(\xi x_0 + \eta y_0), \end{aligned} \quad (5)$$

finalmente, si la fuente puntual está dada por $(\xi, \eta) = (0, \eta_0)$, donde η_0 es una constante, la función de aberración es

$$\Delta(\rho, \psi) = C_1 \rho^4 + C_2 \rho^3 \text{Cos} \psi + C_3 \rho^2 \text{Cos}^2 \psi + C_4 \rho^2 + C_5 \rho \text{Cos} \psi, \quad (6)$$

donde las c_i $i=1, \dots, 5$ son constantes y las coordenadas polares (ρ, ψ) varían en $0 \leq \psi \leq 2\pi$ y $0 \leq \rho \leq a$, siendo a el radio de la pupila de salida del sistema óptico.

Una vez obtenida la función de aberración como una combinación lineal de las aberraciones de Seidel, se muestra que para este caso el mapeo de las Ecs. (2) que representará la evolución del frente de onda aberrado es:

$$\begin{aligned}
 x(\rho, \psi, z) &= -\left(\frac{z}{R_0}\right)\rho \text{Sen} \psi + 2R_0(2C_1\rho^2 + C_2\rho \text{Cos} \psi + C_4)\text{Sen} \psi \\
 y(\rho, \psi, z) &= -\left(\frac{z}{R_0}\right)\rho \text{Cos} \psi + \\
 &\quad + R_0[2(2C_1\rho^2 + C_3 + C_4)\rho \text{Cos} \psi + C_2\rho^2(2 + \text{Cos} 2\psi) + C_5] \\
 z(\rho, \psi, z) &= z.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

IV. RESULTADOS

Para tener una aproximación geométrica de la evolución del frente de onda aberrado descrito por las Ecs. (7) nos apoyamos en el programa de *Mathematica*, donde consideramos a las $C_i = 1$ con unidad de medida $1/m^3$ y donde el valor de a se considera $\rho = 0.124224 m$ y sin pérdida de generalidad $-50 < Z < 50$. En la Figura 2 se muestra la evolución del frente de onda aberrado representado por las Ecs. (7) con los parámetros mencionado

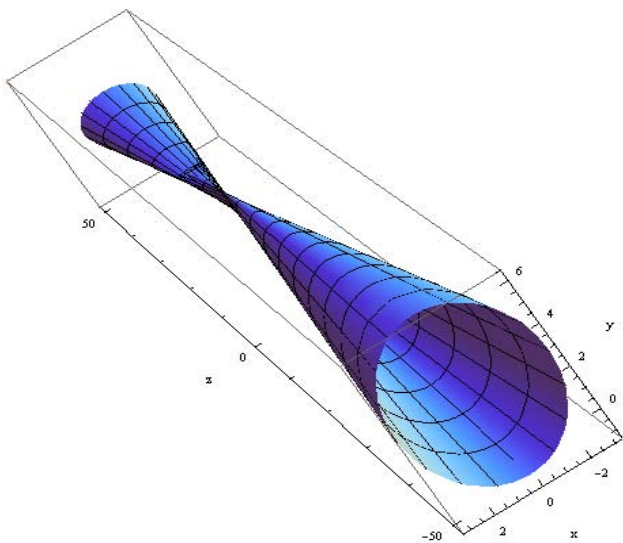
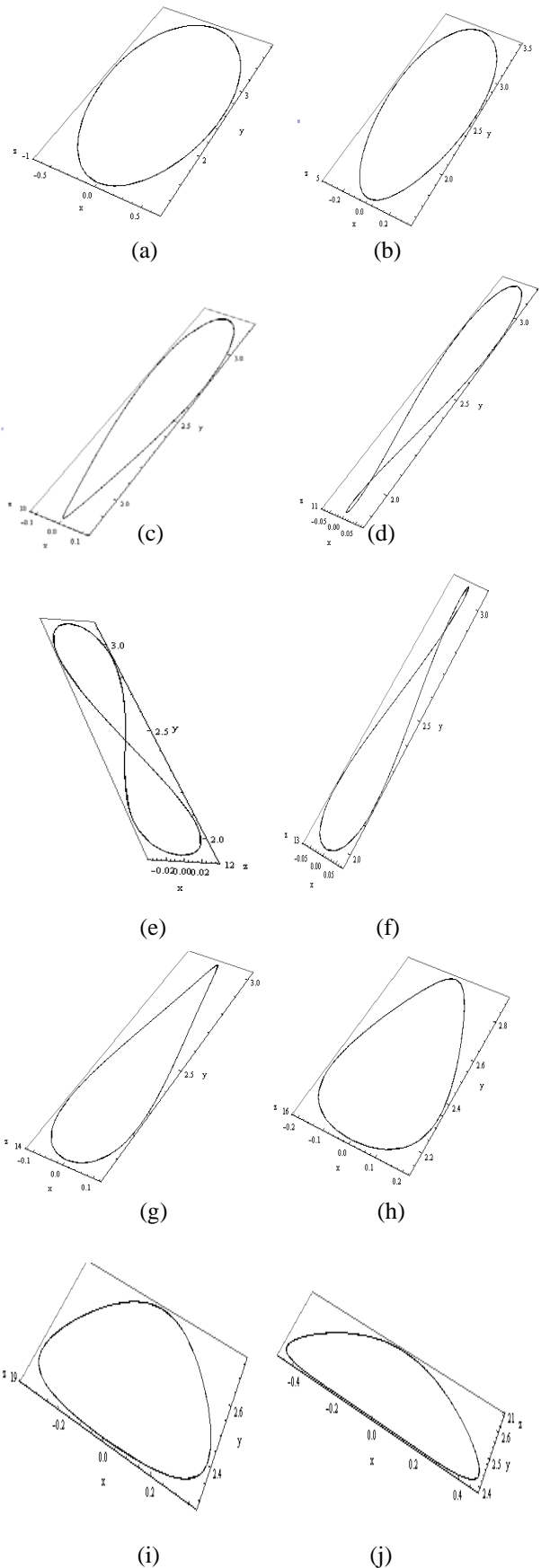


FIGURA 2. Mapeo asociado con un frente de onda deformado por la combinación lineal de las aberraciones de Seidel, Ecs. (7), cuando $\rho = 0.124224m, C_i = 1/m^3$ y $-50 < Z < 50$.

Para visualizar lo ocurrido con el frente de onda esférico deformado en la Figura 3 se muestra una secuencia de 17 imágenes generadas por intersecciones de planos $Z =cte$, en las cuales se aprecia un contorno circular representativo para puntos $Z > -1$, ver Figura 3(a), el contorno circular comienza a deformarse en puntos $5 < Z < 10$, ver Figuras 3(b) y 3(c), y en puntos $11 < Z < 13$ se generan intersecciones en dicho contorno, ver Figuras 3(d) – 3(f), finalmente en los puntos $Z > 14$ las intersecciones del contorno han desaparecido de tal manera que en el proceso este contorno casi llega a convertirse en línea recta, hasta que nuevamente evoluciona en forma de contorno circular, ver Figuras 3(g) – 3(q).



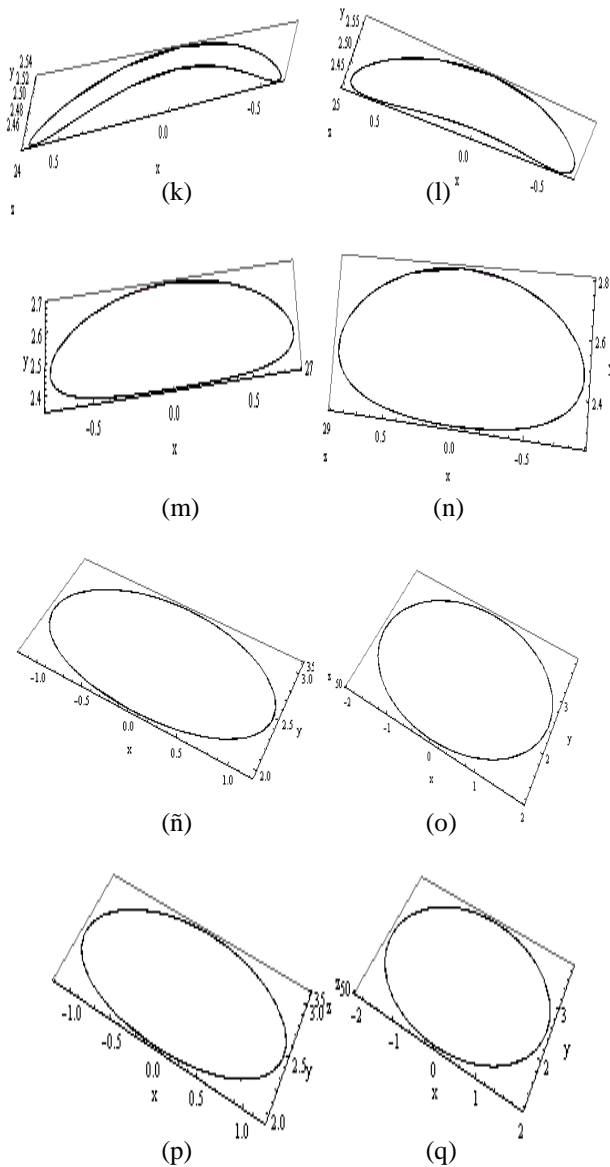


FIGURA 3. Cortes transversales para $Z = \text{cte.}$ de la evolución del frente de onda deformado por la combinación lineal de las aberraciones de Seidel.

Podemos observar, que al menos en teoría existe una representación aproximada de la deformación de un frente de onda esférico deformado por las aberraciones de Seidel.

V. CONCLUSIONES

Usualmente el tema de aberraciones ha sido tratado, como mencionamos en la introducción, por otros autores y con otros enfoques. Sin embargo, utilizando la óptica geométrica y fundamentos matemáticos nosotros concluimos de acuerdo a los resultados de las secciones II, III y IV de este trabajo, que para un frente de onda esférico en un sistema óptico simétrico puede hallarse de forma

aproximada la representación geométrica de la deformación que produce la combinación de las aberraciones de Seidel. Dichos resultados a pesar de ser teóricos consideramos que pueden ser aplicables a frentes de onda y sistemas ópticos no simétricos, con el propósito de encontrar la mejor imagen formada por un sistema óptico.

AGRADECIMIENTOS

M. Marciano-Melchor agradece el apoyo recibido por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN (SIP-IPN), a través del proyecto 20080161 y del programa EDI, así como del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), México. **M. A. Molina-Vilchis** agradece el apoyo recibido por los programas EDD y de exclusividad del IPN. **R. Silva-Ortigoza** agradece el soporte económico recibido por la SIP-IPN, y del programa EDI, así como al SNI.

REFERENCIAS

[1] Lunazzi, J., *Optica precolombina del Perú* Rev. Cub. de Física **24**, 170-174 (2007).
 [2] Sánchez, A., <http://gavab.escet.urjc.es>. Consultado el 07 de Mayo de 2008.
 [3] Calvo, M. and Enoch, J., *Introduction to the history of lenses and visual corrections: a reference to Spain and the spanish colonies in the new world (XV-XVI C.)*, Revista Cubana de Física **22**, 3-12 (2005).
 [4] Voss, K., *Análisis de Imágenes de Objetos Tridimensionales* (Instituto Politécnico Nacional, México, 2006).
 [5] Thibos, N., <http://research.opt.indiana.edu/Library/wavefronts/index.htm>. Consultado el 19 de febrero de 2008.
 [6] Wyant, J. and Creat, K., *Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology*, Applied Optics And Optical Engineering **XI**, 1-53 (1992).
 [7] Nio, K. and Jansonius, M., *Spherical and irregular aberrations are important for the optimal performance of the human eye*, Ophthal Physiol. Opt. **22**, 103-112 (2002).
 [8] Harris, F., *Astigmatism*, Ophthal Physiol. Opt. **20**, 11-30 (2000).
 [9] O'Neil, E., *Introduction to Statistical Optics* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1963).
 [10] Silva, G. and Marciano, M., *Exact computation of the caustic associated with the evolution of an aberrated wavefront*, Journal of Optics A: Pure and Applied Optics **4**, 358-365 (2002).
 [11] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics* (Cambridge University Press, New York, 2006).