Sobre la existencia del Potencial de Lanczos

César Mora, Rubén Sánchez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Instituto Politécnico Nacional. Av. Legaria 694, Col. Irrigación, CP 11500, México D. F.

E-mail: cmoral@ipn.mx; rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 2 de Junio de 2008; aceptado el 31 de Julio de 2008)

Resumen
En éste artículo discutimos brevemente el problema de integrabilidad del potencial de Lanczos para espacios de Riemann en varias dimensiones. Comentamos que la prueba original de existencia ofrecida por Lanczos era incorrecta, y que posteriormente este error fue corregido, analizado e investigado por Bampi y Caviglia. También hacemos notar cuáles son las ventajas que ofrece el formalismo espinorial en el análisis sobre la existencia de dicho potencial.

Palabras clave: Potencial de Lanczos, tensor de Weyl, espinores.

Abstract
In this article we briefly discuss the trouble of the integrability condition in Lanczos potential for Riemann spaces in several dimensions. We comment about the original flawed proof supplied by Lanczos of the existence of his potential, and how this was analyzed and searched by Bampi and Caviglia. We also emphasize which is the advantage of the espinorial formalism in the espinorial analysis about the existence of this potential.

Keywords: Lanczos' Potential, Weyl's tensor, spinors.

PACS: 45.20.D-, 45.20.dg, 45.50.Dd. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Hace más de 40 años que Cornelius Lanczos [1] propuso un modelo para derivar al tensor de Curvatura conforme de Weyl a partir de un potencial que lleva su nombre.

En 1983 Bampi y Caviglia [2] prueban que la demostración original de Lanczos acerca de la existencia de su potencial estaba equivocada, entonces ellos proponen una demostración alternativa que es de carácter local y que sirve básicamente para espacios analíticos en sólo cuatro dimensiones. Acerca de este hecho, ahora existe un trabajo muy completo e interesante presentado por Dolan y Gerber [3] acerca de la existencia de este potencial en dos, tres y cuatro dimensiones. La novedad aquí, es que Dolan y Gerber incorporan la teoría de Janet y Riquier [10] sobre Jets en haces fibrados diferenciales y hacen un análisis exhaustivo sobre la involución de los sistemas diferenciales que representan el encontrar un potencial de Lanczos en dos, tres y cuatro dimensiones. Así hallan, por ejemplo, que en dos dimensiones el problema es siempre involutivo, desde el punto de vista matemático, lo que trae como consecuencia inmediata, que en el caso de dos dimensiones el problema de integrabilidad del potencial, quede completamente resuelto. En el caso de tres dimensiones el problema no está en involución, de tal forma que para este caso se presentan soluciones que son singulares, como en el caso del espacio de Gödel reducido. Y finalmente, para el caso de cuatro dimensiones, el problema tampoco presenta involución, lo que requiere para la existencia del potencial, una prolongación y dar una condición de integrabilidad, como lo han sugerido Bampi y Caviglia [2]. Illge [4] ha probado en forma espinorial e introduciendo un criterio más amplio acerca de la existencia del potencial como un problema de Cauchy. El formalismo espinorial de Illge ha mostrado ser más simple y sencillo de entender que su contraparte tensorial, cuando se aplica a los modelos de espacio tiempo (estos son variedades diferenciales de clase C^{∞}, y con signatura de Lorentz). También es importante hacer notar, que para la signatura de Lorentz, el potencial de Lanczos satisface la ecuación de onda, y que cuando lo examina como un problema de Cauchy de existencia de solución, en su prueba omite la condición de analiticidad.

También es importante analizar la existencia de super-potenciales, es decir de potenciales que generen mediante la diferenciación correcta al potencial de Lanczos. Nuevamente, aquí el formalismo espinorial gana terreno demostrando cómo un superpotencial de rango 2 puede generar al potencial de Lanczos que resulta ser un tensor de rango 3.

II. EL ESPINOR DE ILLGE

La ecuación espinorial, sobre la que descansa el análisis de Illge [8] es

$$W_{ABCD} = 2\nabla_{(A}{}^{\dot{A}} L_{BCD)\dot{A}}, \quad F_{BC} = \nabla^{A\dot{A}} L_{ABC\dot{A}}. \qquad (1)$$

Donde $W_{(ABCD)} = W_{ABCD}$ es un espinor totalmente simétrico en sus cuatro índices, y que no necesariamente necesita ser el espinor del tensor de Weyl. Vale la pena recalcar que los resultados de Illge, son matemáticamente más generales, y abarcan no nada más a un espinor con las características particular del espinor de curvatura conforme de Weyl. La primera de las ecuaciones (1) se conoce como la ecuación de Weyl-Lanczos y a L_{ABCD} se le llama el potencial espinorial de Lanczos. En cuanto a la segunda ecuación en el sistema (1), a la cantidad F_{AB} se la conoce como el gauge diferencial de L_{ABCD}. En particular si se escoge $F_{AB}=0$, entonces se tiene el gauge de Lanczos.

El trabajo de Illge, también comprende la existencia de potenciales para espinores de índices completamente simétricos, con un número arbitrario de índices punteados y no punteados.

II. EXISTENCIA DEL POTENCIAL

Según Edgar y Höglund [4], la demostración de que el potencial de Lanczos existe en cuatro dimensiones para variedades con signatura de Lorentz, se llevó a cabo para un tensor W_{abcd} de rango 4 con las siguientes propiedades de simetría (la prueba en sí no involucra directamente al tensor de Weyl sino a un posible candidato de tensor de Weyl W_{abcd})

$$\begin{aligned} W_{abcd} &= W_{[ab]cd} = W_{ab[cd]} = W_{cdab}, \\ W^{a}{}_{bad} &= 0, \quad W_{a[bcd]} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

El potencial está dado por un tensor L_{abc} con las propiedades siguientes

$$L_{abc} = L_{[ab]c}, \quad L_{[abc]} = 0. \tag{3}$$

De acuerdo a la siguiente identidad, el tensor W_{abcd} queda generado por el potencial L_{abc}

$$\begin{aligned} W_{abcd} &= 2L_{ab[c;d]} + 2L_{cd[a;b]} - g_{a[c}(L_{|b|}{}^{f}{}_{d];f} \\ &- L_{d]}{}^{f}{}_{b;f} - L_{d]}{}^{f}{}_{f;b}) + g_{b[c}(L_{|a|}{}^{f}{}_{d];f} \\ &- L_{|a|}{}^{f}{}_{f;d]} + L_{d]}{}^{f}{}_{a;f}. \\ &- L_{d]}{}^{f}{}_{f;a}) + \tfrac{4}{3} g_{a[c} g_{d]b} L^{f}{}_{f}{}^{h}{}_{;h}. \end{aligned} \tag{4}$$

Lanczos originalmente impuso las dos condiciones siguientes, que se conocen como la condición algebraica de Lanczos y la condición diferencial del mismo nombre

$$L_{ab}{}^{b} = 0, \qquad L_{ab}{}^{c}{}_{;c} = 0. \tag{5}$$

El sistema constituye el gauge de Lanczos, y no son condiciones fundamentales que debe de cumplir el potencial. La libertad de gauge a la hora de encontrar al candidato de tensor de Weyl se puede escribir [5] como el conjunto de dos ecuaciones

$$L'_{abc} = L_{abc} + \chi_{abc}, \quad W_{abcd}(L') = W_{abcd}(L). \tag{6}$$

Por otro lado, Novello y Velloso [7] proporcionan un método basado en vectores de Killing para encontrar potenciales de Lanczos, y aplican su método a la métrica de Schwarzschild y a la geometría de Kasner.

Brian y Hölung [9] han demostrado el siguiente teorema de existencia del tensor de Lanczos para generar a un tensor de Weyl

Teorema: Un potencial de Lanczos para el tensor de curvatura de Weyl no existe para todos los espacios de dimensión $n \geq 7$.

Lanczos originalmente descubrió el potencial que lleva su nombre a través de un Lagrangiano, que está basado en el doble dual del tensor de Riemann R_{abcd}. De modo que el tensor L_{abc}, surge como un multiplicador de Lagrange para este Lagrangiano. La expresión para el tensor de Weyl C_{abcd}, en términos de ciertos multiplicadores de Lagrange en la forma siguiente

$$\begin{aligned} C_{abcd} &= L_{abc;d} - L_{abd;c} + L_{cda;b} - L_{cdb;a} \\ &+ g_{bc}L_{(ad)} + g_{ad}L_{(bc)} - g_{bd}L_{(ac)} - g_{ac}L_{(bd)} \\ &+ \tfrac{2}{3} L^{rs}{}_{r;s}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \end{aligned} \tag{7}$$

donde se define

$$L_{ab} = L_{a}{}^{r}{}_{b;r} - L_{a}{}^{r}{}_{r;b}. \tag{8}$$

Si imponemos las restricciones (5), en esta ecuación encontramos la siguiente simplificación

$$\begin{aligned} C_{abcd} &= L_{abc;d} - L_{abd;c} + L_{cda;b} - L_{cdb;a} \\ &- g_{bc}L^{r}{}_{ad;r} - g_{ad}L^{r}{}_{bc;r} \\ &+ g_{bd}L^{r}{}_{ac;r} + g_{ac}L^{r}{}_{bd;r}. \end{aligned} \tag{9}$$

Brinis [11] ha querido derivar al mismo tensor de Riemann a partir de un potencial similar al de Lanczos $\tilde{L}_{abc}$, originando así, otro problema de existencia similar, llamado el problema de Riemann–Lanczos. Las relaciones matemáticas que describen cómo el potencial $\tilde{L}_{abc}$ genera el tensor de Riemann son

$$R_{abcd} = \tilde{L}_{abc;d} - \tilde{L}_{abd;c} + \tilde{L}_{cda;b} - \tilde{L}_{cdb;a}. \tag{10}$$

Bampi y Caviglia demostraron lo siguiente:

1. El problema de existencia del potencial de Lanczos o problema de Weyl-Lanczos descrito por las ecuaciones (7) y (9) tiene soluciones no singulares para las dimensiones de espacio tiempo $n = 4, 5$.
2. Para $n = 4$, el problema de Riemann-Lanczos representado por la ecuación (10) tiene soluciones no singulares, lo cual significa que los caracteres de Cartan no adoptan sus valores máximos.

3. La condición diferencial de gauge (dada en la segunda ecuación del sistema (5), no tiene efecto sobre la existencia de solución del potencial de Lanczos.

Hay que mencionar que el problema de Weyl-Lanczos es siempre una involución, y que el problema de Riemann-Lanczos, *no* lo es. Por lo que, en el segundo caso sólo se pueden hallar soluciones singulares, siempre y cuando el problema *no* es modificado. Sin embargo, Bampi y Caviglia [2] han sugerido una prolongación del problema de Riemann-Lanczos para hacer a su ecuación diferencial una involución.

REFERENCIAS

[1] Lanczos, C., *The splitting of Riemann tensor*, Rev. Mod. Phys. **34**, 379-389 (1962).

[2] Bampi, F. and Caviglia, G., *Third-order tensor potentials for the Riemann and Weyl tensors*, Gen. Rel. and Grav. **15**, 375-386 (1983).

[3] Andersson, F. and Edgar, S. B., Local Existence of Spinor and Tensor Potentials, arXIv:gr-qc/9902080 v2, (2000).

[4] Edgar, S. B. and Hölung, A., *The Lanczos potential for the Weyl curvature tensor: existence, wave equation and algorithms*, Proc. R. Soc. Lond. A **453**, 835-851 (1997).

[5] Dolan, P. and Kim, C. W., *Some Solutions of the Lanczos vacuum wave equation*, Proc. R. Soc. Lond. A. **447**, 577-585 (1994).

[6] Dolan, P. and Kim, C. W., *The wave equation for the Lanczos potential* I, Proc. R. Soc. Lond. A. **447**, 557-575 (1994).

[7] Novello, M. and Velloso, L., *The Connection Between General Observers and Lanczos Potential*, Gen. Rel. Grav. **19**, 1251-1265 (1987).

[8] Illge, R., *On potentials for several classes of spinor and tensor fields in curved spacetimes*, Gen. Rel. Grav. **31**, 551-564 (1999).

[9] Brian, E. S. and Hölung, A., *The non-existence of a Lanczos potential for the Weyl Curvature tensor in dimensions* $n \geq 7$, arXiv:gr-qc/0202081 v1, (2000).

[10] Dolan, P. and Gerber, A., *Exterior differential systems, Janet-Riquier theory and the Riemann-Lanczos problems in two, three and four dimensions*, J. Math. Phys. **44,** 3013-3034 (2003).

[11] Brinis, E. U., Mech. Fis. Mat. Instituto Lombardo (rend. Sc.) **111** (1977), p. 466.