

El fenómeno de la resonancia



José Antonio Peralta, Porfirio Reyes López y Alfredo Godínez Muñoz

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional, Ed. 9, U.P. Adolfo López Mateos, C.P. 07738, México D.F.

E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

(Recibido el 26 de Junio de 2009; aceptado el 31 de Agosto de 2009)

Resumen

Se analiza matemática y cualitativamente el fenómeno de la resonancia; se muestran situaciones de la vida real en la cual puede aparecer este fenómeno; se proponen experimentos para que la resonancia se pueda analizar en los laboratorios básicos de física, y finalmente se muestran algunos dispositivos que de manera económica y no demasiado complicada se pueden armar en los laboratorios para el estudio del fenómeno.

Palabras clave: Resonancia, oscilaciones, frecuencias naturales.

Abstract

We analyse mathematical and qualitatively the resonance phenomenon; it shows real life situations in which can appear this phenomenon; we propose experiments so the resonance can analyse in the basic physical laboratories, and finally show some devices that in an economical way and not too complicated to build in the laboratories, for this phenomenon study.

Keywords: Resonance, oscillations, natural frequencies.

PACS: 87.19.1n, 44.40.Ff, 43.35.+d

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Desgraciadamente es una experiencia común comprobar que no solo a nivel de la enseñanza media superior, sino incluso en estudiantes de licenciatura que han llevado cursos de mecánica, de circuitos y de electromagnetismo, se tiene un conocimiento muy deficiente de lo que es el fenómeno de la resonancia así como del ancho campo de sus aplicaciones. Una posible explicación de este hecho es que libros de texto usuales [1] en la sección de mecánica se limitan a ilustrar el fenómeno con los ejemplos de la resonancia en un resorte, en una cuerda tensa o en tubos, casos que en sí pudieran presentar poco interés para los alumnos ya que en general tienen poca pertinencia en su vida cotidiana. Esto es lamentable porque este fenómeno tiene una gran cantidad de aplicaciones en el mundo de la tecnología, y además está presente en multitud de situaciones de la vida real, tanto a nivel doméstico, como en la vida pública, o en los ámbitos laborales.

Se presenta en este artículo una deducción matemática del fenómeno para un caso sencillo como es el sistema resorte-masa, para luego ir más allá ilustrándolo con una serie de casos en los cuales el fenómeno está presente en la vida real, por ejemplo: en la comunicación entre insectos como los mosquitos al sintonizarse la frecuencia del aleteo de las hembras con las frecuencias naturales de las antenas de los machos, durante la ocurrencia de un sismo cuando la frecuencia de éste coincide con algunas de las frecuencias naturales de los edificios, en la vibración de ventanas cuando las notas musicales coinciden con alguno de los modos de vibración de éstas, en el diseño de los automóviles para

evitar que las frecuencias del motor provoquen indeseables vibraciones en sus partes, y en el cuerpo humano sujeto a vibraciones en ciertas situaciones de la vida laboral. Finalmente, mostramos algunas prácticas y dispositivos que se pueden desarrollar en el laboratorio para inducir a los estudiantes a desarrollar un conocimiento detallado del fenómeno.

II. LA RESONANCIA EN UN SISTEMA SENCILLO

Para ilustrar algunos de los aspectos más relevantes del fenómeno de la resonancia, es conveniente desarrollar el análisis de un sistema sencillo como es el de una masa m ligada a un resorte de constante elástica K , ya que este caso, pese a su sencillez ilustra conceptos básicos del fenómeno que se presentan en casos más complejos.

Para describir la dinámica de una masa acoplada a un resorte se parte de la 2ª Ley de Newton

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky. \quad (1)$$

Se propone como solución para su posición en función del tiempo un movimiento armónico simple

$$y(t) = A \cos \omega_0 t, \quad (2)$$

al sustituir esta función en la ecuación 1 se tiene que la frecuencia angular con que en el estado estacionario se moverá la masa es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (3)$$

Es de hacer notar que la frecuencia angular no depende de la amplitud sino solo de la constante K del resorte y de la masa, por tanto, este sistema tiene una sola frecuencia que “adopta” en forma espontánea en cuanto se le deja oscilar libremente, por ello se le denomina “frecuencia natural del sistema”.

Analicemos ahora el caso de un oscilador forzado, para ello se aplica sobre la masa otra fuerza más la cual tendrá un carácter periódico con una amplitud F , frecuencia angular ω y actuando en la dirección del eje del resorte, tal como se observa en la figura 1.



FIGURA 1. Resorte con oscilación forzada.

Si la fuerza externa periódica tiene la forma $F = F \cos \omega t$, entonces la fuerza total que actúa sobre la masa m es

$$F = -Ky + F \cos \omega t, \quad (4)$$

ahora la segunda ley de Newton toma la forma

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky + F \cos \omega t. \quad (5)$$

Si al igual que el caso anterior se propone como solución de la anterior ecuación $y = A \cos \omega t$, con ω la frecuencia angular de la fuerza externa, al sustituir este valor de y , así como de su segunda derivada respecto al tiempo se tiene que

$$-mA\omega^2 \cos \omega t = -KA \cos \omega t + F \cos \omega t, \quad (6)$$

y al despejar el valor A de la amplitud de la oscilación ésta tiene el valor

$$A = \frac{F}{[K - m\omega^2]}. \quad (7)$$

Pero de acuerdo a (3), $K = m\omega_0^2$, así es que sustituyendo este valor en la anterior relación se obtiene finalmente que

$$A = \frac{F_0}{m[\omega_0^2 - \omega^2]}. \quad (8)$$

Se observa que cuando ω tiende a ω_0 , el valor absoluto de la amplitud A tiende a infinito. En esta situación en que el sistema elástico tiende a oscilar con una máxima amplitud se dice que el sistema entra en un estado de *Resonancia*.

Si nos aproximamos a la frecuencia natural con valores mayores que ω_0 . El valor de la amplitud tendrá valores negativos; para evitar este comportamiento anómalo se introduce en la solución propuesta un ángulo de fase α

$$y = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (9)$$

Tal que α será igual a 0 para valores de ω menores que ω_0 , y π para valores mayores.

Para que este comportamiento sea un modelo más realista se tiene que tomar en cuenta la fricción. Si se supone que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad de la masa, la segunda ley de Newton ahora es

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky + F \cos \omega t - b \frac{dy}{dt}, \quad (10)$$

con b una constante de proporcionalidad, la amplitud resultante (ver referencia [2]) resulta

$$A = \frac{F/m}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2 \right]^{1/2}}, \quad (11)$$

Donde $\gamma = b/m$. Aunque ahora la amplitud máxima ya no ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa es exactamente la frecuencia natural ω_0 , para muchos problemas de interés la diferencia no es considerable.

El fenómeno de la resonancia requiere por tanto:

- De un sistema elástico que presente frecuencias naturales de vibración,
- De una fuerza externa de tipo periódico que actúe sobre el sistema elástico,
- De una coincidencia entre ambos tipos de frecuencia.

¿Qué tan factible es que este tipo de condiciones se presenten en la vida real? La respuesta a esta pregunta permitirá ver el campo de aplicación de este concepto así como su gran capacidad explicativa para el entendimiento de una gran cantidad de fenómenos.

III. LA PRESENCIA DE LAS FUERZAS OSCILANTES, LAS FRECUENCIAS NATURALES Y LA RESONANCIA EN LA VIDA REAL

A. Fuerzas oscilantes

Pese a la apariencia de quietud del suelo que pisamos, de los edificios, de los puentes y de muchas otras estructuras arquitectónicas que nos rodean, en realidad están en continuo

cambio y movimiento, y un tipo especial del movimiento es el debido a las fuerzas mecánicas oscilantes, basta un pequeño repaso mental para enumerar una gran cantidad de ellas:

Los diversos sonidos ambientales son vibraciones de tipo mecánico, ya que son las variaciones periódicas de la presión del aire o de las cosas que nos rodean las que generan los sonidos.

Los edificios en que habitamos o en que trabajamos son estructuras elásticas que permanentemente están vibrando debido al paso cercano de los automotores pesados o a los mismos impulsos mecánicos producidos por quienes los habitan, al caminar, al bailar, al mover muebles, etc.

El suelo mismo en que nos movemos experimenta movimientos oscilatorios todos los días, tal como nos lo indica el reporte diario del Servicio Sismológico Nacional, simplemente que son de tan pequeña magnitud que en general no los alcanzamos a percibir. Así, del 21 de febrero al 11 de marzo de 2009 se reportaron 93 eventos sísmicos de magnitud mayor a 3 grados en la escala Richter, es decir, casi 3 movimientos oscilatorios del suelo por día [3].

Las vibraciones que parten del motor de los automóviles someten a todas las partes de un auto y a sus ocupantes a continuas oscilaciones mecánicas.

El mundo laboral está lleno de máquinas de diferentes tamaños que van desde los taladros de mano hasta máquinas más potentes que producen toda una variedad de vibraciones mecánicas.

Las mismas fuerzas gravitatorias oscilan, tal como lo muestra el fenómeno de las mareas en que el nivel del mar sube y baja acompañado con el movimiento periódico de la Luna.

B. Estructuras elásticas y frecuencias naturales

La elasticidad es la propiedad que tienen los cuerpos de deformarse bajo la acción de fuerzas externas y de recuperar su forma una vez que desaparecen estas fuerzas; dentro de ciertos rangos la deformación para todos los cuerpos es proporcional a la fuerza deformante aplicada. Por tanto, antes de alcanzar otra vez su estado de equilibrio, los cuerpos desarrollarán un cierto número de oscilaciones; y cada cuerpo, dependiendo de su forma, de su masa, del material de que esté hecho, así como de las restricciones a que esté sometido, oscilará con ciertas frecuencias propias a las que, como se ha indicado, se les denomina *frecuencias naturales*. Un sistema resorte masa tiene una sola frecuencia natural de vibración; una cuerda tensa sujeta por sus dos extremos presenta una cantidad infinita de frecuencias naturales, todas ellas múltiplos de una frecuencia básica; las placas de metal o de vidrio o las membranas de cuero también presentan frecuencias naturales; si bien no todas ellas son múltiplos de una frecuencia básica; estructuras como los puentes también presentan frecuencias naturales.

C. Diversos casos de resonancia

Si estamos en un mundo sometido continuamente a fuerzas oscilantes, y si además estamos rodeados de estructuras elásticas tales como ventanas, puentes, edificios, etc., es

factible que en muchos casos la frecuencia de las fuerzas oscilantes coincida con alguna de las frecuencias naturales de las estructuras elásticas provocando fenómenos de resonancia.

Se mostrarán algunos ejemplos:

1) Cuando decenas o cientos de soldados marchan dando golpes rítmicos de frecuencia muy constante en el piso, al cruzar sobre un puente, que como se ha señalado es una estructura elástica con sus propias frecuencias naturales de vibración, en caso de que conserven su marcha acompañada se corre el peligro de que su frecuencia de golpeteo – aproximadamente de 1 Hz- coincida con alguna de las frecuencias naturales del puente; hay que tomar en cuenta además que la fuerza del golpe colectivo puede alcanzar magnitudes de decenas de miles de N, para evitar ese peligro es que a las formaciones de soldados se les ordena romper la marcha cuando cruzan un puente.

2) Es una experiencia común que cuando se escucha música dentro de un cuarto, algunas veces al aparecer sonidos de frecuencia muy baja los vidrios de las ventanas empiezan a vibrar violentamente. Esto ocurre, naturalmente, porque hay un fenómeno de resonancia, ya que en tales casos la frecuencia de los sonidos graves coincide con alguna de las frecuencias naturales de oscilación de los vidrios de las ventanas.

3) Los autos están hechos de muchas partes elásticas, como por ejemplo el volante, la palanca de velocidades, los vidrios de las ventanas, etc.; de hecho, cuando al volante se le da un golpe, se siente inmediatamente su vibración; pues bien, cuando el motor genera vibraciones que coinciden con la frecuencia natural de vibración de algunas de estas partes sucede el fenómeno de resonancia; es por ello que los diseñadores de las carrocerías deben tener en cuenta que la potente fuente de vibraciones del motor no provoque la coincidencia con las frecuencias naturales de los diversos componentes de los automotores.

4) El cuerpo humano está conformado con estructuras elásticas como son los huesos, y es así que en el mundo de la medicina laboral se debe cuidar que la frecuencia de golpeteo de máquinas como los taladros que rompen las capas de pavimento, no coincida con la frecuencia natural de algunas de las partes de la estructura ósea. Cuando el cuerpo humano está sometido a vibraciones de baja frecuencia, éste se mueve como un todo, pero a frecuencias altas la respuesta del cuerpo es específica; así de 4 a 12 Hz las caderas y los hombros comienzan a resonar, entre 20 y 30 Hz es el cráneo el que resuena, a frecuencias más altas de 60 a 90 Hz son los globos oculares los que pueden entrar en resonancia [4].

5) Un caso muy conocido de resonancia es cuando un o una cantante dirigen su voz hacia una copa de cristal; es aparente que la copa es una estructura elástica que vibra a frecuencias claramente reconocibles por el oído humano, por tanto, el afinado oído de los cantantes se entona con esos sonidos y lanza contra la copa un sonido potente de la misma frecuencia, con ello se forman en la copa ondas estacionarias, y si la intensidad y la frecuencia se mantienen el tiempo suficiente, se produce el fenómeno de resonancia hasta que la copa a causa de sus intensas vibraciones se rompe.

6) En el mundo animal se tienen también ejemplos muy hermosos de resonancia; por ejemplo ¿cómo pueden los mosquitos machos detectar a los mosquitos hembras? De acuerdo a H. Schmidt [5], las frecuencias de aleteo de los machos y las hembras son diferentes; los machos aletean a una frecuencia aproximada de 500 Hz, mientras que las hembras lo hacen a una frecuencia aproximada de 300 Hz; pues bien, se encuentra que las antenas de los machos tienen una frecuencia natural de vibración muy cercana a los 300 Hz, por tanto, el aleteo de las hembras provoca en ellos resonancia de sus antenas y es así como se efectúa el reconocimiento (Figura 3).

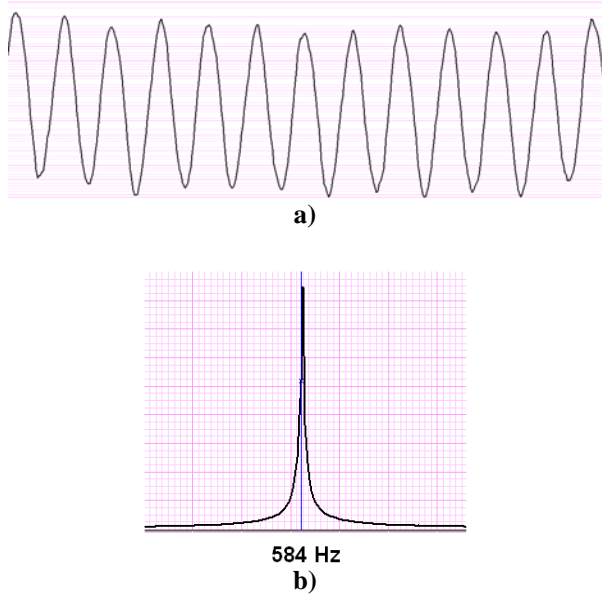


FIGURA 2. En esta figura se muestran: a) en la parte superior la señal acústica producida por una copa, y b) la frecuencia principal de la señal (señales obtenidas por los autores).

7) Finalmente, un ejemplo muy drástico de los efectos destructivos que pueden producirse en caso de resonancia, se presenta cuando una ciudad es afectada por un sismo; la ciudad está llena de estructuras elásticas de gran escala, tales como edificios y puentes; la frecuencia de los sismos, es decir, la frecuencia con que se mueve el suelo, está ante todo en el rango de los 0.5 -2 Hz, son frecuencias relativamente bajas, pero las grandes masas de los edificios de más de 5 pisos de altura por su propia inercia tienden a tener frecuencias bajas y propician por tanto la ocurrencia del fenómeno de resonancia. En este caso la amplitud de las oscilaciones mecánicas de los edificios tiende a crecer tanto en cada ciclo que pueden llegar al punto de ruptura, tal como sucedió con muchos edificios en el gran terremoto de la ciudad de México en 1985.

IV. LA RESONANCIA EN EL LABORATORIO

En los párrafos anteriores se ha tratado de mostrar la importancia de analizar detalladamente el fenómeno de la resonancia ya que como se ha indicado, tal fenómeno se presenta en muchos casos de la vida cotidiana, por estas

razones es que es muy importante que en un laboratorio de enseñanza se le dedique la mayor atención posible a éste fenómeno.

A. Resonancia en cuerdas tensas

Como sabemos, una cuerda tensa sujeta por sus dos extremos es un sistema elástico que a diferencia del sistema resorte masa presenta no una sino varias –de hecho teóricamente un número infinito– de frecuencias naturales.

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (12)$$

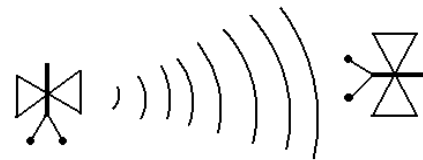
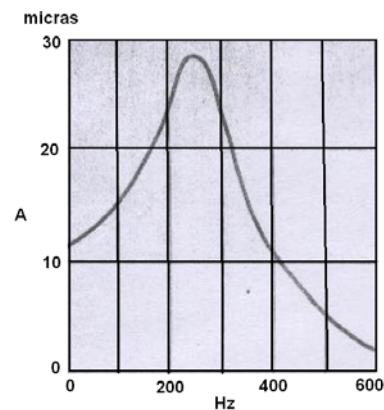


FIGURA 3. En el eje vertical se muestra la amplitud de oscilación de las antenas del mosquito macho, y en el eje horizontal la frecuencia de oscilación a la que han sido sometidas. Se observa cómo la frecuencia de aleteo de los mosquitos hembras (300 Hz), casi coincide con la frecuencia natural de vibración de las antenas de los mosquitos macho (la gráfica ha sido tomada del libro citado de H. Schmidt).

Donde n es un número entero, L la longitud de la cuerda, F la tensión, y ρ la densidad lineal de masa. Cuando se estimula uno de los extremos de la cuerda con un pivote que oscila con pequeña amplitud y frecuencia variable, mientras que el otro extremo de la cuerda descansa sobre una polea y se le aplica una tensión mediante un porta pesas (ver figura 4), se puede observar claramente como a determinadas frecuencias la cuerda oscila con gran amplitud. Para este experimento se puede utilizar un equipo comercial marca Pasco. Si no se tiene la posibilidad de comprarlo se puede construir uno acoplando el chip XR-2206 a un amplificador de potencia (en el mercado los hay de muy bajo precio como los de la marca MITZU), un electroimán (ver figura 5) se conecta a la salida del amplificador para que haga oscilar a una pequeña placa de metal atada a un extremo de la cuerda tensa. La configuración del chip se puede conseguir en internet, y con tan solo un condensador y dos resistencias

variables se pueden obtener señales senoidales de diferente frecuencia y amplitud.

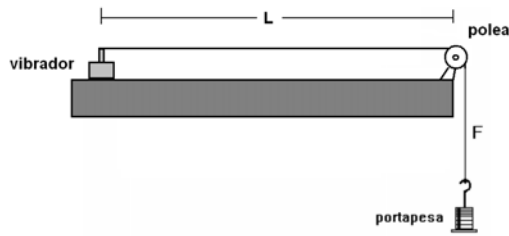


FIGURA 4. Arreglo experimental para inducir la resonancia en una cuerda tensa; la longitud, la tensión F, y la densidad longitudinal de la cuerda determinan las frecuencias naturales de ésta.

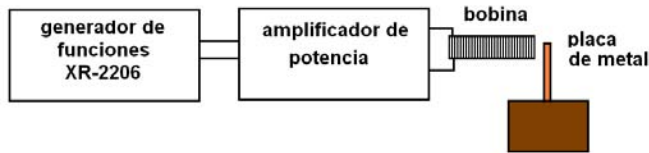


FIGURA 5. Dispositivo electrónico para estimular con señales senoidales la placa metálica atada a la cuerda.

B. Resonancia en vigas voladizas

De acuerdo a Feynman [6], el desplazamiento vertical del extremo libre de una viga voladiza a la cual se le aplica una fuerza en este extremo está dado por

$$W = \left[\frac{3YI}{L^3} \right] Z. \quad (13)$$

Donde W es el peso aplicado, Y el módulo de Young, I el momento de inercia de la sección transversal, L su longitud y Z el desplazamiento del extremos libre; si hacemos que $K = \frac{3YI}{L^3}$, entonces

$$W = KZ. \quad (14)$$

Es claro que esta relación para la fuerza de restauración de una viga nos permite afirmar que una masa acoplada a su extremo desarrollará un movimiento armónico simple, y que por tanto si se le aplica a la placa una fuerza periódica de frecuencia adecuada entrará en resonancia.

Para visualizar el fenómeno recurrimos a un montaje experimental como el de la figura 6; como viga voladiza se utilizará una placa alargada de metal (en este experimento se ha utilizado una segueta de arco). Los pulsos de fuerza periódicos se aplican con un electroimán conectado a un generador de pulsos de fuerza magnética como el descrito más adelante, o también utilizando el equipo comercial mencionado anteriormente.

Para medir la frecuencia natural de oscilación de la placa para diferentes longitudes, hay 3 opciones: a) se le agrega un pequeño imán colocado a la mitad de su longitud, y enfrente del imán se coloca una bobina; se amplifica la señal de la

bobina y se visualizan las señales de voltaje en un osciloscopio cuando se hace oscilar la placa; esto nos permite medir el período de las oscilaciones y por tanto su frecuencia natural para una longitud dada; b) otra opción es adherirle a la placa una pequeña pantalla opaca que interrumpa la luz que incide sobre una celda solar; la señal de la celda solar se amplifica y se visualiza igualmente con un osciloscopio, y c) usar luz estroboscópica hasta alcanzar una frecuencia en que la varilla casi parezca detenida.

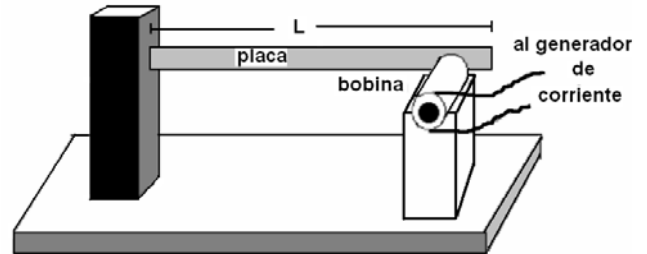


FIGURA 6. Arreglo experimental para visualizar la resonancia en una placa elástica.

Para analizar este caso se ha diseñado y construido un generador de pulsos de fuerza magnética a partir de un generador de pulsos de frecuencia variable como el mostrado en la figura 7. Los pulsos de voltaje abren y cierran un interruptor digital como el mostrado en la figura 8 que conecta un electroimán a la línea. El circuito original reportado en [7] se ha modificado agregando un diodo a la salida de la bobina.

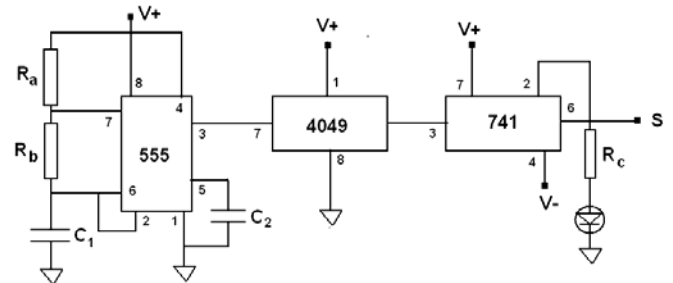


FIGURA 7. Generador de pulsos; los valores seleccionados para inducir resonancia en la placa son los siguientes: Ra= Pot. de 50kΩ, Rb= 1kΩ, Rc=500Ω, C1=10μF, C2=0.01 μF, +V= 9 V, -V=-9V, la variación de la resistencia Ra permite variar la frecuencia de los pulsos de salida.

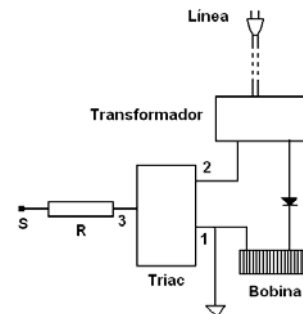


FIGURA 8. La salida S del circuito generador de pulsos se conecta a un interruptor digital de la corriente que alimenta a la bobina la cual produce los pulsos de fuerza magnética. El valor de R es de 500 Ω y el Triac utilizado fue el 2N6073B.

Se muestra en la figura 9 las oscilaciones naturales de la placa, así como su frecuencia. Para hacer estas mediciones se ha utilizado una tarjeta de captura de National Instruments, así como un programa hecho en LabVIEW, y asimismo en la figura 10 se observa cómo se amplifican progresivamente las oscilaciones cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural.

IV. CONCLUSIONES

Es de hacer notar que la fórmula que usualmente se les muestra a los alumnos en la que se observa que cuando las frecuencias son iguales la amplitud de la oscilación tiende a infinito, o que adquiere su máximo valor en el caso de que exista fricción, es para describir solamente el estado estacionario, cuando esto es así y no se consideran las etapas transitorias a menudo se puede crear la impresión de que este valor máximo de la amplitud se adquiere instantáneamente; la observación experimental detallada del fenómeno, sin embargo, nos muestra que el crecimiento es paulatino y que solo después de transcurridos un cierto número de ciclos se alcanza el valor máximo de la amplitud, que por tanto, aún cuando se exponga el sistema elástico a una fuerza periódica con una amplitud igual a la de la resonancia, si esta exposición no es suficientemente duradera no se alcanzará la amplitud máxima.

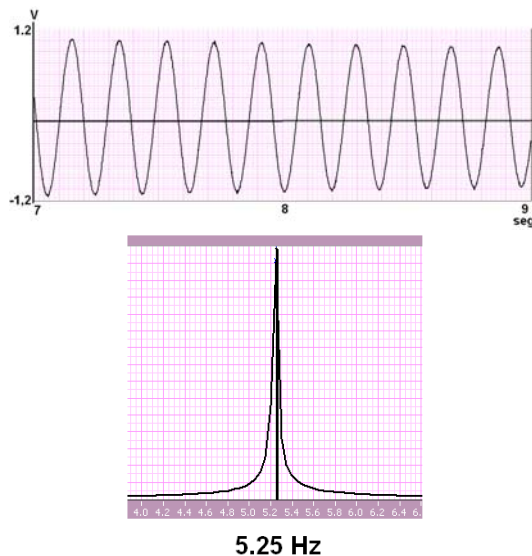


FIGURA 9. Oscilaciones y frecuencia natural de la placa.

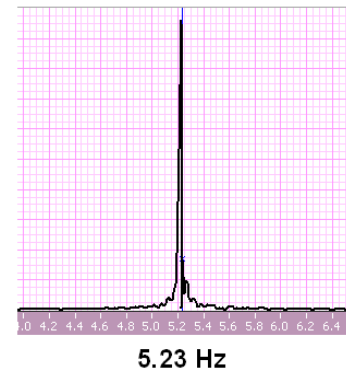
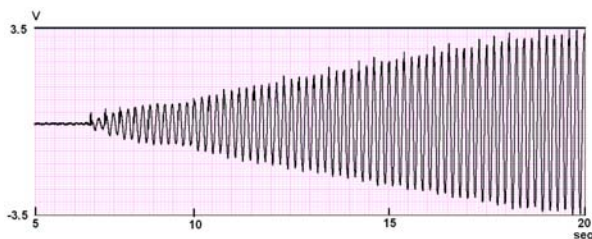


FIGURA 10. En estas figuras se muestra el crecimiento paulatino de la amplitud de la oscilación en la placa, así como la frecuencia a la cual ocurre este comportamiento.

El experimento nos indica también que otra forma de describir a la resonancia es que es un estado en el cual hay en cada ciclo del pulso de la fuerza externa una transferencia de energía que se va acumulando en el sistema elástico, por tanto, si hay una adecuada sincronización entre la fuerza externa y la oscilación del sistema se puede lograr esta progresiva transferencia de energía pese a que no haya coincidencia de las frecuencias, por ejemplo, dando pulsos de fuerza cada 2 ciclos de oscilación del sistema elástico. Esta situación, aunque en un tiempo mayor, también nos conduce a un estado estacionario en que la amplitud alcanza un máximo.

Una vez que los alumnos han palpado mediante experimentos apropiados el fenómeno de la resonancia su mente está más abierta para entender el papel que la resonancia juega en diferentes esferas de la vida, no solo a nivel mecánico, sino también, por ejemplo, en la detección de ondas electromagnéticas, ya que la sintonización en el mundo de la radio, la televisión, los teléfonos celulares, etc. se basa justamente en la respuesta de circuitos resonantes a las ondas de determinada frecuencia que inundan el medio ambiente.

Sin el uso del fenómeno de la resonancia, nuestra vida no sería lo que es.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la COFAA el apoyo dado para la realización de este trabajo, asimismo agradecemos la cooperación de los técnicos del Laboratorio de Física II de la ESFM, Lic. Patricia Sánchez Cruz y Santiago Macias Navarro, por su apoyo a la realización de los experimentos.

REFERENCIAS

- [1] Resnick, R. y Halliday, D., *Física*, (Compañía Editorial Continental, México, 1984).
- [2] French, A. P., *Vibraciones y Ondas*, (Reverté, España, 1982).
- [3] <http://www.ssn.unam.mx/jsp/principal.jsp>, Consultado el 20 de Marzo de 2009.

[4] <http://www.fio.unicen.edu.ar/usuario/segumar/Laura/material/Vibraciones.pdf>, Consultado el 21 de Marzo de 2009.

[5] Schmid, H., *Cómo se comunican los animales*, (Salvat, España, 1986).

[6] Feynman, R., *Física: Electromagnetismo y materia*, Vol. II, (Addison-Wesley Iberoamericana, E. U. A. 1972).

[7] Peralta, J. A. y Miller, C. G., *Resonancia en placas delgadas*, *Caderno Catarinense de Ensino de Física* **14**, 209-217 (1997).