

Las cargas superficiales y los campos de circuitos simples



Maricel Matar, Reinaldo Welti

Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física, FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Avenida Pellegrini 250, CP 2000, Rosario, Argentina.

E-mail: welti@fceia.unr.edu.ar

(Recibido el 20 de Mayo de 2009; aceptado el 1 de Agosto de 2009)

Resumen

En este trabajo se recurre a la teoría de parámetros distribuidos para encontrar las cargas superficiales sobre un circuito de corriente continua. Luego mediante las ecuaciones del rotor y la divergencia, se calcula el campo eléctrico que rodea al circuito. Este método es relativamente simple y está en el nivel de conocimientos que tienen los alumnos de un curso básico de electricidad.

Palabras clave: Cargas superficiales, campos, circuitos, parámetros distribuidos.

Abstract

This article uses the theory of distributed parameters to find the surface charges in a DC circuit. Subsequently, using the equations of the rotor and the divergence the electric field around the circuit is calculated. This method is relatively simple and is in the skill level of students of a basic course in Electricity.

Keywords: Surface charges, fields, circuits, distributed parameters.

PACS: 01.55.+b, 84.30.Bv, 41.20.Cv

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Pocas veces es apreciado el significado de la densidad superficial de carga eléctrica asociada con un circuito por el que circula una corriente. En general, los hilos resistivos por los que circula una corriente tienen una densidad superficial de carga no uniforme sobre ellos. Estas cargas crean, no solamente el campo eléctrico en el medio alrededor del circuito, sino también el que se necesita en el interior de los hilos para mantener la corriente.

El cálculo exacto de la distribución de las cargas superficiales es bastante difícil, y esto se ha hecho sólo para circuitos con geometrías muy simples. Schafer [1] posiblemente fue el primero en publicar un análisis cuantitativo de las cargas superficiales a lo largo de un hilo por el que circula una corriente. Sommerfeld [2] ha realizado un análisis detallado de un cable coaxial alimentado por una batería en un extremo y cortocircuitado en el otro extremo. Heald [3] ha estudiado un cilindro resistivo circular de longitud infinita con una corriente azimutal. Aguirregabiria *et al.* [4] obtuvieron las cargas superficiales sobre un circuito cuadrado alimentado por un flujo magnético variable. Assis y Mania [5] analizan las cargas superficiales y los campos de un circuito formado por un par de hilos resistivos. Jackson [6] resolvió el problema de las cargas superficiales y el campo de un cable coaxial con placas conductoras en sus extremos y con batería y resistencia concentradas localizadas en diferentes lugares a lo largo del cable. Welti [7] resuelve el problema

de un circuito formado por dos placas paralelas. Preyer [8] presenta los resultados de un procedimiento de cálculo numérico que muestran las cargas superficiales de varios circuitos resistivo-capacitivos simples. Jefimenko [9] construyó un ingenioso dispositivo de demostración que hace visible los campos eléctricos que rodean un circuito.

En los trabajos de Härtel [10, 11] se encuentran diversos conceptos físicos y una gran preocupación sobre las cuestiones pedagógicas relacionadas con las cargas superficiales. En particular, sostiene que éstas no son un aspecto exótico y periférico de los circuitos sino que proporcionan un mecanismo para comprender la causa y el efecto de la circulación de una corriente. Siguiendo las ideas de Härtel, en el texto innovador de Chabay y Sherwood [12] se examina cualitativamente el rol de las cargas superficiales. Sin embargo, hasta el presente, la difusión del enfoque de la carga superficial en los textos y en el aula es muy lento. La mayoría de los materiales didácticos en uso actual no van más allá del modelo de Drude [13] de la corriente eléctrica, y no mencionan el papel que juegan las cargas superficiales en la creación del campo en el interior de los conductores. Una de las razones de este comportamiento podría atribuirse a que, a diferencia del modelo de Drude y de las leyes de Kirchhoff, la presentación de los modelos de carga superficial, aún los cualitativos y de simple geometría, son difíciles, como señalamos al inicio, aún para los propios docentes [3, 4, 14].

En este trabajo, como sugiere Härtel [11], se tiene especialmente en cuenta el capacitor formado por las superficies de los conductores del circuito. Dado que la teoría de circuitos de parámetros distribuidos ofrece un modelo para estudiar las variaciones espaciales de las distintas magnitudes físicas asociadas con los circuitos, haremos uso de esta teoría para encontrar las cargas superficiales. De este modo las cargas superficiales quedarán asociadas a una capacidad distribuida. Conocidas las mismas, mediante las ecuaciones del rotor y de la divergencia, se calculará el campo eléctrico que rodea al circuito. Estimamos que este procedimiento es más simple y está más relacionado con los conocimientos que los alumnos de un curso básico de electricidad y magnetismo tienen al momento de tratar estos temas.

II. CARGA SUPERFICIAL SOBRE DOS CONDUCTORES RESISTIVOS HOMOGÉNEOS Y PARALELOS

Estudiaremos un circuito formado por un par de conductores resistivos, homogéneos y paralelos como el que se muestra en la Fig.1.

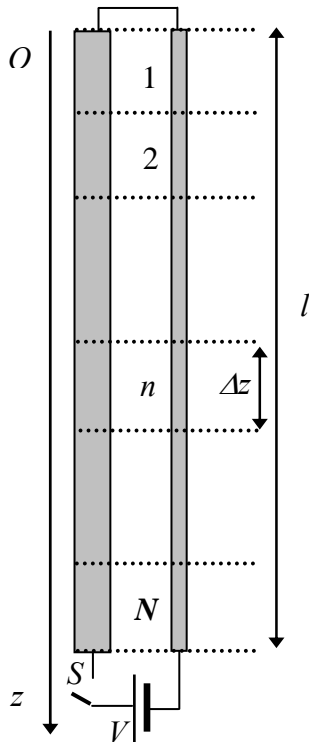


FIGURA 1. Un circuito formado por un par de conductores homogéneos y paralelos.

En los cálculos que haremos en esta sección la forma exacta de estos conductores no es importante, pueden ser dos placas, dos cilindros que no tienen necesariamente el mismo diámetro o un cable coaxial. En este último caso, uno de los conductores, por ejemplo el de la derecha, es un cilindro hueco que rodea completamente al otro. Los conductores resistivos están cortocircuitados en el extremo superior y conectados a una batería de tensión constante en

el inferior. Para calcular las cargas que se distribuyen sobre la superficie de estos conductores, tenemos que tener en cuenta la capacidad del circuito. Pero, como la distribución de carga superficial puede no ser uniforme es conveniente dividir el circuito en muchas secciones como se muestra en la Fig. 1. Si las secciones son todas de la misma longitud, entonces la capacidad de cada sección será la misma. Calculando la carga sobre cada uno de estos capacitores se podrá determinar la carga sobre las superficies de los conductores de dicho tramo.

Antes de hacer una división en N secciones cualesquiera, vamos a considerar una división en tres secciones como la que se muestra en la Fig. 2.

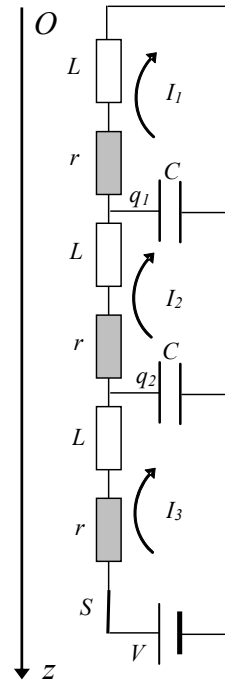


FIGURA 2. División en 3 secciones de igual longitud del circuito de la Fig. 1.

En esta figura r , L y C son la resistencia, la inductancia y la capacidad de cada una de las secciones. Las corrientes de mallas son I_1, I_2 e I_3 , mientras que las cargas en los capacitores son q_1 y q_2 .

Después de cerrar el interruptor, en $t = 0$, las ecuaciones para las corrientes y las cargas vienen dadas por

$$\begin{aligned} L \frac{dI_1}{dt} + rI_1 &= \frac{q_1}{C}, \\ L \frac{dI_2}{dt} + rI_2 + \frac{q_1}{C} &= \frac{q_2}{C}, \\ L \frac{dI_3}{dt} + rI_3 + \frac{q_2}{C} &= V, \end{aligned} \tag{1}$$

mientras tanto la ecuación de conservación de la carga impone que

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= I_2 - I_1, \\ \frac{dq_2}{dt} &= I_3 - I_2. \end{aligned} \quad (2)$$

En el régimen permanente, a partir de las ecuaciones (1) y (2), se encuentra que

$$I_3 = I_2 = I_1 = I = \frac{V}{3r} = \frac{V}{R}, \quad (3)$$

donde $R = 3r$ es la resistencia total del circuito. En estas condiciones, las ecuaciones (1) resultan

$$\begin{aligned} I \frac{R}{3} &= \frac{q_1}{C}, \\ I \frac{R}{3} + \frac{q_1}{C} &= \frac{q_2}{C}, \\ I \frac{R}{3} + \frac{q_2}{C} &= V. \end{aligned} \quad (4)$$

De estas ecuaciones se deduce que:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{CV}{3}, \\ q_2 &= \frac{2CV}{3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Si dividimos al circuito en cuatro secciones se obtiene:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{CV}{4}, \\ q_2 &= \frac{2CV}{4}, \\ q_3 &= \frac{3CV}{4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Es fácil generalizar este resultado para una división del circuito en N secciones de longitud Δz . Para las cargas en los $N-1$ capacitores se tiene:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{CV}{N}, \\ q_2 &= \frac{2CV}{N}, \\ &\dots\dots\dots \\ q_{N-1} &= \frac{(N-1)CV}{N}. \end{aligned} \quad (7)$$

La carga en el n -ésimo capacitor (ver Fig. 1) es

$$q_n = n \frac{CV}{N}. \quad (8)$$

La superficie de uno de los conductores de esta sección de longitud Δz es $\Delta S = \alpha \Delta z$ donde α es un factor de proporcionalidad, de dimensiones de longitud, que depende de la forma del conductor.

En el límite $N \rightarrow \infty$ y $\Delta z \rightarrow 0$ se tiene que $n\Delta z = z$ y $N\Delta z = l$ donde l es la longitud total del circuito.

En este límite, la carga superficial del conductor es

$$\frac{q_n}{S} = \frac{nCV}{N\alpha\Delta z} \rightarrow \sigma(z) = \frac{cVz}{\alpha l}, \quad (9)$$

donde $c = C/\Delta z$ es la capacidad por unidad de longitud del circuito. Como $V = RI$ podemos escribir la carga superficial en función de la corriente I .

$$\sigma(z) = \frac{cRIz}{\alpha l}. \quad (10)$$

Esta dependencia lineal de la carga superficial sobre los elementos resistivos de un circuito ha sido encontrada por numerosos autores [2, 5, 6, 7] para determinadas geometrías. Sin embargo, la ecuación (10) es válida para dos conductores resistivos homogéneos paralelos cualquiera sea su sección transversal.

En la próxima sección, utilizando este método, encontraremos la carga superficial para tres casos particulares.

A. Carga superficial sobre un par de placas resistivas

En este ejemplo, los conductores son dos placas paralelas idénticas de espesor e , ancho w y longitud l , que están separadas por una distancia d como se muestra en la Fig. 3. Las placas tienen una resistividad ρ , están cortocircuitadas en un extremo y en el otro, se aplica una tensión continua V . Para esta geometría $\alpha = w$. Además, si $w \gg d$, la capacidad por unidad de longitud es

$$c = \epsilon_0 \frac{w}{d}, \quad (11)$$

Por otro lado, la resistencia total del circuito es

$$R = \frac{2\rho l}{S},$$

donde $S = we$ es la sección transversal de las placas.

Reemplazando estos valores en (10) se obtiene

$$\sigma(z) = \epsilon_0 \frac{2\rho Iz}{Sd}, \quad (12)$$

para la densidad superficial de cargas sobre la placa que está conectada al borne positivo de la batería. La otra placa tiene una densidad de carga de igual magnitud y signo opuesto. La ecuación (12) coincide con la expresión para la carga superficial que se deduce en [7].

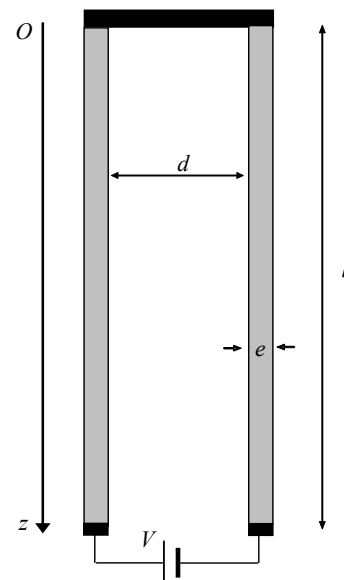


FIGURA 3. Circuito formado por dos placas resistivas de longitud l , espesor e y ancho w (perpendicular al plano del papel). El conductor perfecto está coloreado en negro y el resistivo en gris.

B. Cargas superficiales en un cable coaxil

En la Fig. 4 se muestra un cable coaxil de longitud l , radio interno a y externo b . El conductor interno es macizo y tiene una resistividad ρ mientras que el externo es perfectamente conductor. Uno de sus extremos está cortocircuitado, mientras que el otro está conectado a una tensión continua V .

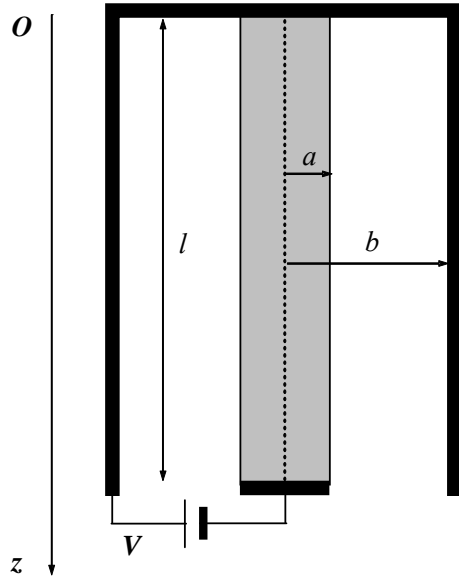


FIGURA 4. Cable coaxil de longitud l formado por un conductor interno resistivo de radio a , y un conductor externo perfecto de radio b .

Para esta geometría, se tiene $\alpha = 2\pi a$, y si $l \gg b$ la capacidad por unidad de longitud es

$$c = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

La resistencia total del circuito es

$$R = \frac{\rho l}{\pi a^2}$$

Reemplazando estos valores en (10) obtenemos

$$\sigma_a(z) = \frac{\rho\epsilon_0 I z}{\pi a^3 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}, \tag{13}$$

que coincide con el resultado encontrado por Sommerfeld [2]. En (13) el subíndice a en σ es para indicar que se trata de la densidad superficial de cargas en el conductor interno de radio a .

C. Carga superficial en un par de hilos

Consideremos ahora dos conductores cilíndricos de resistividad ρ , longitud l y radio a , con sus ejes separados una distancia d . Los dos conductores están cortocircuitados en uno de sus extremos y conectados, en el otro, a una fuente de tensión constante V como se muestra en la Fig. 5.

En este circuito, la carga superficial σ , además de depender de z , depende del ángulo azimutal alrededor del eje de los cilindros porque la atracción entre las cargas de diferentes signos produce una mayor concentración de cargas sobre sus superficies internas. Sin embargo si $d \gg a$, la densidad de carga superficial depende solamente de z y se puede utilizar la ecuación (9) para calcular la densidad de carga superficial puesto que en su deducción se supuso que σ depende solamente de z .

Si $d \gg a$, la capacidad por unidad de longitud de este circuito [15] es

$$c = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a}\right)} \tag{14}$$

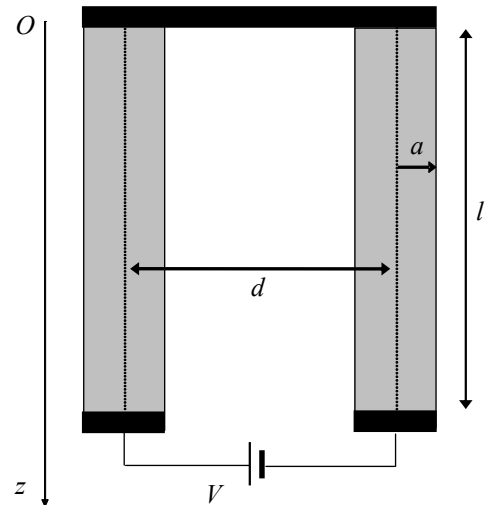


FIGURA 5. Circuito formado por dos conductores resistivos cilíndricos idénticos, de longitud l y de radio a , separados por una distancia d .

Reemplazando (14) en (10) y teniendo en cuenta que, en este ejemplo, $\alpha = 2\pi a$, obtenemos

$$\sigma_i = \epsilon_0 \frac{V(z/l)}{a \ln\left(\frac{d}{a}\right)}, \tag{15}$$

para la densidad de carga superficial del cilindro de la izquierda.

En [5] se deduce la carga superficial para un circuito similar al de la Fig. 5. Si hacemos el límite $d \gg a$ y un cambio en el origen de coordenadas, la ecuación (7) de [5] es idéntica a (15).

La resistencia total del circuito es

$$R = \frac{2\rho l}{\pi a^2}$$

y como $V = RI$, la densidad de carga superficial (15), en función de la corriente que circula por el circuito es

$$\sigma_i = \frac{2\rho\epsilon_0 I z}{\pi a^3 \ln\left(\frac{d}{a}\right)}. \tag{16}$$

III. CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR LAS CARGAS SUPERFICIALES

En esta sección vamos a mostrar cómo, a partir del conocimiento de las cargas superficiales, se calcula el campo eléctrico de cada uno de los circuitos de las secciones anteriores. Estos cálculos, como lo mostraremos a continuación, son relativamente simples para los circuitos estudiados en las secciones 3A y 3B. Para el circuito de la sección 3C, el cálculo es relativamente largo y complejo y no lo mostraremos aquí dado que pretendemos mantener la discusión de estos temas en un nivel relativamente simple.

A. Campo eléctrico de un circuito formado por dos placas resistivas

Las fuentes de los campos electrostáticos son las cargas eléctricas. Las densidades de cargas superficiales, dadas por la ecuación (12) son, por lo tanto, las que crean el campo eléctrico en el espacio entre las placas y en el interior de las mismas.

En la sección 3A encontramos que la densidad de carga superficial sobre la superficie $y=0$ de la placa izquierda es

$$\sigma(z) = \epsilon_0 \frac{2\rho I z}{Sd},$$

y de signo contrario sobre la superficie $y=d$ de la placa derecha. En la deducción de esta ecuación, en particular cuando usamos la expresión (11) para la capacidad por unidad de longitud, se ha supuesto que el ancho de cada placa es mucho mayor que la distancia entre ellas. Entonces, si σ varía lentamente con z , es razonable suponer que la componente del campo eléctrico perpendicular a las placas, E_y , se puede expresar aproximadamente por

$$E_y = \frac{\sigma(z)}{\epsilon_0} = \frac{2\rho I z}{Sd}. \quad (17)$$

Como E_y es dependiente de z , para satisfacer la ecuación $\nabla \times \vec{E} = 0$, debe existir una componente E_z del campo eléctrico, de modo que

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (18)$$

Reemplazando (17) en (18) se tiene,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\sigma}{dz} = \frac{2\rho I}{Sd}.$$

Integrando, obtenemos

$$E_z = \frac{2\rho I y}{Sd} + C,$$

donde C es una constante.

Debido a la simetría del problema,

$$E_z(y=d/2) = 0,$$

entonces $C = -\rho I / S$ y, finalmente

$$E_z = \frac{2\rho I}{S} \left(\frac{y}{d} - \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

Las cargas superficiales y los campos que rodean un circuito eléctrico

Observemos que la existencia de esta componente es una consecuencia de la variación de la densidad de cargas superficiales con z .

Las componentes tangenciales del campo eléctrico en las superficies $y=0$ e $y=d$ son

$$E_z(y=0) = -\frac{\rho I}{S}, \quad E_z(y=d) = \frac{\rho I}{S}.$$

Debido a la continuidad de la componente tangencial, estos son los campos en el interior de las placas, izquierda y derecha, respectivamente. Observemos que, de acuerdo a la ley de Ohm ($\vec{J} = \vec{E} / \rho$, donde \vec{J} es la densidad de corriente), estos campos son los necesarios para mantener la corriente I en cada una de las placas.

Las ecuaciones (17) y (19) para las componentes y y z del campo eléctrico son las soluciones del problema, pues satisfacen las ecuaciones $\text{rot } \vec{E} = 0$ y $\text{div } \vec{E} = 0$, las condiciones de borde sobre las superficies $y=0$ e $y=d$ de las placas resistivas y sobre la superficie perfectamente conductora, $z=0$, donde $E_z = 0$.

Las líneas de fuerza del campo eléctrico (en el plano yz) satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (20)$$

Reemplazando (17) y (19) en (20) obtenemos,

$$\frac{dy}{\frac{2\rho I z}{Sd}} = \frac{dz}{\frac{2\rho I}{S} \left(\frac{2y}{d} - 1 \right)}, \quad (21)$$

donde, para simplificar la escritura, hicimos $\rho I / S = 1$

La solución de (21) es la familia de hipérbolas

$$z^2 - y^2 + dy = C. \quad (22)$$

donde C es una constante de integración.

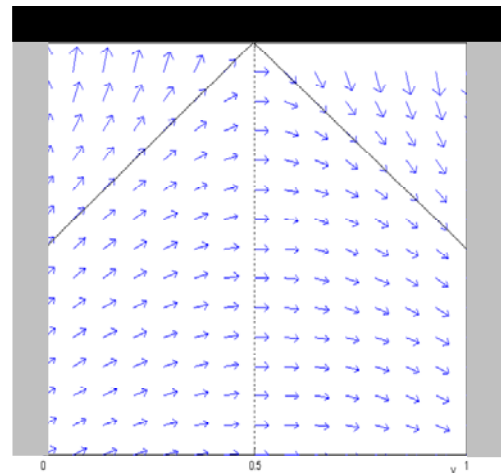


FIGURA 6. Líneas de fuerzas asociadas al campo dado por sus componentes (17) y (19).

En la Fig. 6 se muestran las líneas de fuerza. En esta figura las longitudes están medidas en unidades de d (la distancia entre las placas) La línea de fuerza para $C = d^2/4$ son dos líneas rectas que parten de los puntos, $y=0, z=-d/2$ y de $y=1, z=d/2$.

$= d, z = -d/2$ y terminan en $y = d/2, z = 0$. Este último punto está sobre la superficie perfectamente conductora, por lo tanto, el valor del campo en ese punto debe ser cero. Las líneas de fuerza que están arriba de la recta que está a la izquierda nacen en la placa resistiva de la izquierda y mueren sobre la superficie perfectamente conductora, mientras que las líneas de fuerza que están sobre la recta de la derecha nacen en la superficie perfectamente conductora y mueren en la placa resistiva de la derecha. Las líneas de fuerza debajo de estas rectas nacen en el conductor resistivo de la izquierda y mueren en el conductor resistivo de la derecha.

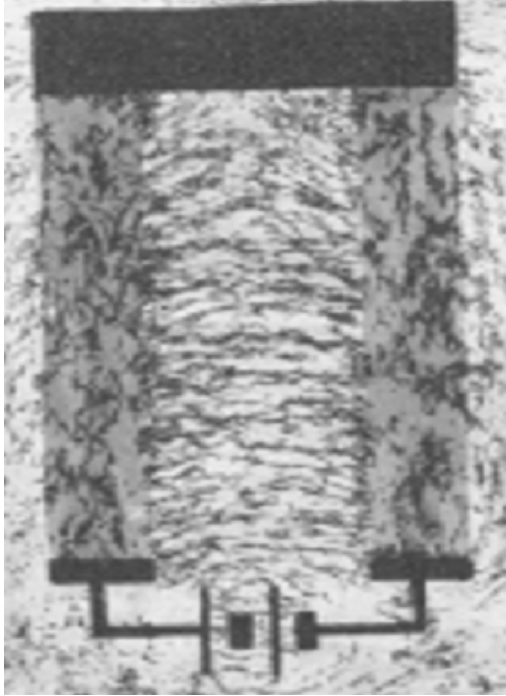


FIGURA 7. Campo eléctrico de una línea de transmisión simétrica cortocircuitada. Esta fotografía se encuentra en [5].

Jefimenko [5] utilizando tinta conductora imprimió los circuitos sobre placas de vidrio. Distribuyendo diminutos hilos de seda, que se comportaban como pequeños dipolos, se pudieron observar las líneas de campo eléctrico que rodeaban al circuito. En la Fig. 7 se muestra la fotografía del campo eléctrico de un circuito similar al que estudiamos en esta sección. A pesar de que la fotografía presenta zonas borrosas se puede observar la similitud de las líneas de campo eléctrico, de las Figs. 6 y 7, en el espacio entre las dos placas resistivas.

B. Campos en el interior de un cable coaxil

Podemos encontrar el campo eléctrico en el interior del coaxil, a partir del conocimiento de la carga superficial en sus superficies, mediante un procedimiento idéntico al que utilizamos en la sección anterior. Si $\sigma(z)$ es la densidad de carga superficial sobre el conductor coaxil de la Fig. 4, entonces, proponemos para el campo eléctrico radial la siguiente expresión:

$$E_r = \frac{\lambda(z)}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma(z)a}{\epsilon_0 r}, \quad a \leq r \leq b,$$

donde $\lambda = 2\pi a\sigma$ y σ es la densidad superficial de carga, que viene dada por la ecuación (13). Entonces,

$$E_r = \frac{2\rho I z}{\pi a^2 \ln(b/a)} \frac{1}{r}, \quad a \leq r \leq b. \quad (23)$$

Utilizando la ecuación del rotor obtenemos:

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{a}{\epsilon_0 r} \frac{d\sigma}{dz} = \frac{2\rho I}{\pi a^2 \ln(b/a)} \frac{1}{r}.$$

Integrando

$$E_z(r) = \frac{2\rho I}{\pi a^2 \ln(b/a)} \ln r + C.$$

Como $E_z(r = b) = 0$, obtenemos finalmente

$$E_z(r) = \frac{2\rho I}{\pi a^2 \ln(b/a)} \ln\left(\frac{r}{b}\right), \quad a \leq r \leq b. \quad (24)$$

Las ecuaciones (23) y (24) coinciden con las componentes del campo encontradas por Sommerfeld [2].

CONCLUSIONES

En este trabajo calculamos las cargas superficiales en conductores por los que circula una corriente con un procedimiento diferente del utilizado en los trabajos que hemos examinado [2, 3, 4, 5, 6, 7]. En éstos se calcula la carga superficial después de haber encontrado el campo eléctrico que rodea al circuito resolviendo la ecuación de Laplace con condiciones de borde apropiadas. Aún para los circuitos geoméricamente más simples, los cálculos involucrados son difíciles y complejos. Por este motivo es difícil introducir el tema, de esa manera, en los cursos iniciales de física de nivel universitario.

El método de cálculo de las cargas superficiales, que se presenta en este trabajo, se basa en nociones de la teoría de circuitos pero destacando la idea que éstos tienen una inductancia y una capacidad. Si se desea relacionar los campos eléctricos y magnéticos con los circuitos, estos dos conceptos son indispensables. En efecto, si hay un campo magnético que rodea al circuito este debe tener una inductancia y si hay un campo eléctrico debe tener una capacitancia. Sin embargo, como las cargas superficiales sobre los conductores varían a lo largo de su longitud, se debe ir un poco más allá introduciendo el concepto de capacidad distribuida. Habitualmente los parámetros distribuidos sólo se utilizan cuando la longitud de onda es comparable o menor que las dimensiones del circuito, porque en esta situación la corriente sobre los conductores y, la tensión entre los mismos, varían espacialmente. Sin embargo, como mostramos en este trabajo, para encontrar las variaciones espaciales de las cargas superficiales en un circuito, aún de corriente continua, corresponde introducir el concepto de capacidad distribuida.

Con este método encontramos las cargas superficiales sobre circuitos que tienen una geometría relativamente simple: un circuito formado por dos placas, un coaxil y dos cables paralelos homogéneos. Estos circuitos tienen la

geometría de las líneas de transmisión que se utilizan en alta frecuencia.

Conocidas las cargas superficiales calculamos el campo eléctrico que rodea al circuito utilizando la ecuación del rotor. Como el campo así calculado, satisface la ecuación de la divergencia y las condiciones de borde, es la solución del problema. Estos cálculos son relativamente simples y constituyen de por sí una muy buena aplicación de la teoría de campos en la teoría de circuitos.

REFERENCIAS

- [1] Schaefer, C., *Einfuehrung in die theoretische Physik*, (Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 1932).
- [2] Sommerfeld A., *Electrodynamics*, (Academic Press, New York, 1952).
- [3] Heald, M. A., *Electric fields and charges in elementary circuits*, Am. J. Phys. **52**, 522-526, (1984).
- [4] Aguirregabiria, J. M., Hernandez, A. and Rivas, M., *An example of surface charge distribution on conductors carrying steady currents*, Am. J. Phys. **60**, 138-141, (1992).
- [5] Assis, A. K. T. y Mania, A. J., *Surface charges and electric fields in a two-wire resistive transmission line*, Rev. Bras. de Ens. de Fís. **21**, 469-475 (1999).

Las cargas superficiales y los campos que rodean un circuito eléctrico

- [6] Jackson, J.D., *Surface charges on circuit wires and resistors play three roles*, Am. J. Physics **64**, 855-870 (1996).
- [7] Welti, R., *Las cargas superficiales y el flujo de energía en un circuito simple*, Rev. Bras. de Ens. de Fís. **27**, 577-582 (2005).
- [8] Preyer, N. W., *Surface charges and fields of simple circuits*, Am. J. Physics **68**, 1002-1006 (2000).
- [9] Jefimenko, O., *Demonstration of the electric fields of current-carrying conductors*, Am. J. Phys. **30**, 19-21 (1962).
- [10] Haertel, H., *The electric voltage*, in Aspects of understanding electricity: Proceedings of an international conference, edited by R. Duit, W. Jung, and C. von Rhöneck (IPN/Schmidt & Klaunig, Kiel, Germany, 1985).
- [11] Härtel, H., *A qualitative approach to electricity*, Report #IRL87-0001 (Institute for Research on Learning Palo Alto, CA, 1987).
- [12] Chabay, R. and Sherwood, B., *Electric and Magnetic Interactions*, (Wiley, New York, 1995).
- [13] Drude, P., *Zur Elektronentheorie der metalle*, Annalen der Physik **308**,566 (1900).
- [14] Galili, I. and Goihbarg, E., *Energy transfer in electrical circuits: A qualitative account*, Am. J. Phys. **73**, 141-144 (2005).
- [15] Clemmow, P., *An introduction to electromagnetic theory*, (University Press, Cambridge, 1973).