Matrices de Dirac, Transformaciones de Lorentz Y Rotaciones Espaciales vía Cuaterniones

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

J. López-Bonilla, A. Rangel-Merino, Abacut Sebastián-Pérez

ESIME, Instituto Politécnico Nacional,
Anexo Edif. 3, Col. Lindavista, CP 07738, México D.F., México.

Email: jlopezb@ipn.mx

(Recibido el 5 de Junio de 2009; aceptado el 28 de Agosto de 2009)

Resumen
Se estudia cómo generar matrices ortogonales 4x4 mediante un triple producto cuaterniónico, lo cual conduce de manera natural a las matrices de Dirac y al estudio de rotaciones en 3 y 4 dimensiones.

Palabras clave: Cuaterniones, matrices de Dirac, Rotaciones espaciales, Transformaciones de Lorentz.

Abstract
We study how generate orthogonal 4x4 matrix by means of triple quaternionic product, which guide in a natural way to Dirac's matrices and 3 and 4-dimensional rotations.

Keywords: Quaternions, Dirac's matrices, Spatial rotations, Lorentz transformations

PACS: 03.30.+p, 03.65.Ca, 03.50.Kk **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Las unidades cuaterniónicas obedecen el álgebra [1, 2, 3, 4, 5, 6]:

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -1, \quad \mathbf{IJK} = -1, \tag{1}$$

que permiten realizar el producto:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{pF}, \tag{2.a}$$

con

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{I} + F_2\mathbf{J} + F_3\mathbf{K} + F_4, \tag{2.b}$$

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{I} + p_2\mathbf{J} + p_3\mathbf{K} + p_4, \tag{2.c}$$

y la expresión resultante para $\tilde{\mathbf{F}}$ puede escribirse matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \\ p_3 & p_4 & -p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{P}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

El cuadrado de la magnitud de $\mathbf{F}$ está definido por:

$$\left|\mathbf{F}\right|^2 = \mathbf{F}\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{F} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2, \tag{4.a}$$

con

$$\overline{\mathbf{F}} = -F_1\mathbf{I} - F_2\mathbf{J} - F_3\mathbf{K} + F_4, \tag{4.b}$$

notando que para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios:

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{A}}. \tag{4.c}$$

Entonces de (2.a), (3, 4.a) y (4c):

$$\left|\tilde{\mathbf{F}}\right|^2 = \mathbf{p}\left|\mathbf{F}\right|^2\overline{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}\left|\mathbf{F}\right|^2, \quad \det \underset{\sim}{P} = \left(\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}\right)^2, \tag{5.a}$$

en donde es evidente que para $\mathbf{p}$ unitario:

$$\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1, \quad \det \underset{\sim}{P} = 1, \tag{5.b}$$

se conserva la magnitud de $\mathbf{F}$:

$$\tilde{F}_1^2 + \tilde{F}_2^2 + \tilde{F}_3^2 + \tilde{F}_4^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2, \tag{6}$$

equivalente a:

$$\left(\tilde{F}_1\ \tilde{F}_2\ \tilde{F}_3\ \tilde{F}_4\right)\begin{pmatrix}\tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\\ \tilde{F}_3\\ \tilde{F}_4\end{pmatrix}=\left(F_1\ F_2\ F_3\ F_4\right)\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{pmatrix},$$

que en unión de (3) implica el carácter ortogonal de la transformación:

$$\underset{\sim}{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}=\underset{\sim}{\mathrm{I}}_{4\times 4}. \tag{7}$$

Una matriz es ortogonal cuando da la identidad al multiplicarse por su transpuesta, y su principal virtud es que conserva la magnitud de los vectores bajo su acción.
Similarmente, el producto:

$$\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{Fq}, \tag{8.a}$$

tiene la representación matricial:

$$\begin{pmatrix}\tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\\ \tilde{F}_3\\ \tilde{F}_4\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}q_4 & q_3 & -q_2 & q_1\\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2\\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3\\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4\end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{\mathrm{Q}}}\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{pmatrix}, \tag{8.b}$$

y si $\mathbf{q}$ es unitario entonces se verifica (6) y por lo tanto $\underset{\sim}{\mathrm{Q}}$ es ortogonal con $\det\underset{\sim}{\mathrm{Q}}=1$.

Los casos (2.a), (8.a) pueden unificarse en un solo esquema mediante un triple producto cuaterniónico:

$$\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{pFq}, \tag{9.a}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix}\tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\\ \tilde{F}_3\\ \tilde{F}_4\end{pmatrix}=\underset{\sim}{\mathrm{D}}_{4\times 4}\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{pmatrix},\quad \underset{\sim}{\mathrm{D}}=\underset{\sim}{\mathrm{P}}\,\underset{\sim}{\mathrm{Q}}, \tag{9.b}$$

entonces $\left|\tilde{\mathbf{F}}\right|^2=\left(\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}}\right)\left|\mathbf{F}\right|^2$ y así es claro que (6) se satisface para $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ unitarios, con $\underset{\sim}{\mathrm{P}}$ y $\underset{\sim}{\mathrm{Q}}$ ortogonales implicando que $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ también lo es:

$$\underset{\sim}{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}}\underset{\sim}{\mathrm{D}}=\underset{\sim}{\mathrm{I}},\quad \det\underset{\sim}{\mathrm{D}}=1. \tag{9.c}$$

En las siguientes páginas se realizan las aplicaciones de (9.a.b.c): La Sec. II muestra que $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ reproduce las 16 matrices de Dirac [7] si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ coinciden con las unidades cuaterniónicas. La Sec. III considera el caso de relatividad especial porque $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ genera transformaciones de Lorentz cuando $\mathbf{q}=\overline{\mathbf{p}}^*$. La Sec. IV se dedica a rotaciones tridimensionales al pedir que el cuaternión unitario $\mathbf{p}$ sea real ($\mathbf{p}=\overline{\mathbf{p}}^*$), y en consecuencia $\mathbf{q}=\overline{\mathbf{p}}$.

II. MATRICES DE DIRAC

En mecánica cuántica relativista son importantes las 16 matrices de Dirac [7]:

$$\underset{\sim}{\mathrm{I}},\quad \gamma^0=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & \text{-I}\end{pmatrix},\quad \gamma^5=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{I}\\ \mathrm{I} & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^0\gamma^5=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{I}\\ \text{-I} & 0\end{pmatrix},$$

$$\gamma^r=\begin{pmatrix}0 & \sigma_r\\ -\sigma_r & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^r\gamma^5=\begin{pmatrix}\sigma_r & 0\\ 0 & -\sigma_r\end{pmatrix},$$

$$\sigma^{0r}=-\sigma^{r0}=i\begin{pmatrix}0 & \sigma_r\\ \sigma_r & 0\end{pmatrix},\quad r=1,2,3 \tag{10}$$

$\sigma^{jk}=-\sigma^{kj}=\begin{pmatrix}\sigma_l & 0\\ 0 & \sigma_l\end{pmatrix}$, (jkl) es una permutación cíclica de (123), y las σ_j son las matrices de Pauli [7, 8]:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad i=\sqrt{-1}. \tag{11}$$

Ahora en (9.a) pueden seleccionarse a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ como las unidades cuaterniónicas, por ejemplo, si $\mathbf{p}=1$, $\mathbf{q}=\mathbf{K}$, entonces de (9.b) obtenemos que $\underset{\sim}{\mathrm{D}}=i\sigma^{31}$. En forma análoga, si $\mathbf{p}=\mathbf{I}$, $\mathbf{q}=\mathbf{J}$ resulta que $\underset{\sim}{\mathrm{D}}=-\gamma^1\gamma^5$, etc. Así:

TABLA I. Cuaterniones y Matrices de Dirac.

$\mathbf{p}\backslash\mathbf{q}$	1	**I**	**J**	**K**
1	$\underset{\sim}{\mathrm{I}}$	γ^1	$-\gamma^3$	$i\sigma^{31}$
I	σ^{02}	$-\gamma^3\gamma^5$	$-\gamma^1\gamma^5$	$-\gamma^5$
J	$\gamma^0\gamma^5$	σ^{32}	σ^{12}	$i\gamma^2$
K	$-i\gamma^2\gamma^5$	$i\sigma^{03}$	$i\sigma^{01}$	γ^0

(12)

Si $\underset{\sim}{W}$ denota a cualesquiera de las matrices de esta Tabla, entonces es simple probar que:

$$\underset{\sim}{W}^{-1}=\underset{\sim}{W}^{T}, \quad \underset{\sim}{W}^{*}=\underset{\sim}{W}, \quad \underset{\sim}{W}^{T}=\pm\underset{\sim}{W}, \qquad (13)$$

es decir, son ortogonales, reales y simétricas ó antisimétricas.

III. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

En el espacio de Minkowski [9] las transformaciones de Lorentz relacionan, linealmente, a las coordenadas de un evento visto desde dos marcos de referencia en movimiento relativo uniforme (c es la velocidad de la luz en el vacío):

$$\begin{pmatrix} i\tilde{x} \\ i\tilde{y} \\ i\tilde{z} \\ c\tilde{t} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{D} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix}, \qquad (14.a)$$

que en términos geométricos corresponde a una rotación 4-dimensional manteniendo intacta la magnitud del vector:

$$\left(c\tilde{t}\right)^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = \left(ct\right)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \qquad (14.b)$$

lo cual es exigido por los postulados de la relatividad especial.

Si el cuaternión (2.b) es seleccionado como:

$$\mathbf{F} = ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct, \qquad (15)$$

entonces (6) y (9.b) reproducen (14.b) y (14.a), respectivamente, y (9.a) da:

$$i\tilde{x}\mathbf{I} + i\tilde{y}\mathbf{J} + i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \mathbf{p}\left(ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct\right)\mathbf{q} \qquad (16.a)$$

y al aplicarle la operación $*$:

$$-i\tilde{x}\mathbf{I} - i\tilde{y}\mathbf{J} - i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \mathbf{p}^*\left(-ix\mathbf{I} - iy\mathbf{J} - iz\mathbf{K} + ct\right)\mathbf{q}^*,$$

que a su vez bajo la operación $-$ implica [recuérdese (4.b,c)]:

$$i\tilde{x}\mathbf{I} + i\tilde{y}\mathbf{J} + i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \overline{\mathbf{q}}^*\left(ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct\right)\overline{\mathbf{p}}^*, \qquad (16.b)$$

así la igualdad entre (16.a) y (16.b) se logra si $\overline{\mathbf{q}}^* = \mathbf{p}$, es decir:

$$\mathbf{q} = \overline{\mathbf{p}}^*, \qquad (17)$$

siendo $\mathbf{p}$ unitario. Por lo tanto, (9.a) adquiere la estructura [9, 10, 11, 12, 13]:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{p}\mathbf{F}\overline{\mathbf{p}}^*, \quad \mathbf{p}\overline{\mathbf{p}} = 1, \qquad (18)$$

que en unión de (15) permite generar transformaciones de Lorentz propias y homogéneas verificando (9.c), basta con dar $\mathbf{p}$. En efecto, al sustituir (2.c), (15) en (18), entonces con (14.a) recuperamos las expresiones para $\underset{\sim}{D}$ existentes en la literatura [4, 12-15]. Por ejemplo, si elegimos:

$$\mathbf{p} = -i\,senh\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathbf{K} + cosh\left(\frac{\tau}{2}\right), \ \tau \text{ real}, \qquad (19.a)$$

resultan las conocidas fórmulas de Lorentz:

$$\begin{gathered} \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = \gamma\left(z - vt\right), \quad \tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) \\ \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad tanh\left(\tau\right) = \frac{v}{c} < 1, \end{gathered} \qquad (19.b)$$

para dos observadores moviéndose en la dirección z con velocidad relativa v.

IV. ROTACIONES ESPACIALES

Aquí se consideran transformaciones de Lorentz que no alteran la coordenada temporal:

$$\tilde{t} = t, \qquad (20)$$

lo cual corresponde a rotaciones tridimensionales. Si en (16.a) sustituimos (20) es claro que t puede eliminarse idénticamente (para así solo dejar variables espaciales) si $\mathbf{pq} = 1$, que en virtud de (17) da $\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}^* = 1$, equivalente a $\mathbf{p}^*\overline{\mathbf{p}} = 1$ que para ser compatible con (5.b) impone la condición:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^*, \qquad (21)$$

es decir, las matrices de Lorentz generan 3-rotaciones cuando en (9.a) se emplea $\mathbf{p}$ unitario y real. Entonces (14.a) adopta la expresión:

$$\begin{pmatrix} i\tilde{x} \\ i\tilde{y} \\ i\tilde{z} \\ c\tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \underset{\sim}{R}_{3\times3} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix},$$

implicando (20) y:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{R}^{T}=\underset{\sim}{I}, \quad \det \underset{\sim}{R}=1, \qquad (22.a)$$

respetándose la invariancia (14.b) en la forma pitagórica $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Con (9.a), (17), (21) es inmediato obtener la estructura de la $\underset{\sim}{R}$ reportada en la literatura [13]:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 1-2\left(p_2^2+p_3^2\right) & 2\left(p_1p_2-p_3p_4\right) & 2\left(p_1p_3+p_2p_4\right) \\ 2\left(p_1p_2+p_3p_4\right) & 1-2\left(p_1^2+p_3^2\right) & 2\left(p_2p_3-p_1p_4\right) \\ 2\left(p_1p_3-p_2p_4\right) & 2\left(p_1p_4+p_2p_3\right) & 1-2\left(p_1^2+p_2^2\right) \end{pmatrix} \tag{22.b}$$

teniéndose así, con (22.a), (22.b), un proceso sistemático para producir rotaciones espaciales, basta con dar un cuarteto de valores reales p_j cumpliendo (5.b).

REFERENCIAS

[1] Kronsbein, J., *Kinematics-quaternions-spinors-and Pauli's spin matrices*, Am. J. Phys. **35**, 335-342 (1967).

[2] van der Waerden, B. L., *Hamilton's discovery of quaternions*, Math. Mag. **49**, 227-234 (1976).

[3] McAllister, L. B., *A quick introduction to quaternions*, Pi Mu Epsilon J. **9**, 23-25 (1989).

[4] Penrose, R., *The road to reality*, (Jonathan Cape, London, 2004).

5. Hamdan, N., Guerrero, I., López-Bonilla, J. and Rosales, L., *On the Faraday's complex vector*, The Icfai Univ. J. Phys. **1**, 52-56 (2008).

[6] Martínez-Sierra, G. and Benoit-Poirier, P. F., *Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**, 201-208 (2008).

[7] Leite-Lopes, J., *Introduction to quantum electrodynamics*, (Ed. Trillas, Mexico, 1970).

[8] Pauli, W., *Uber das wasserstoffspektrum vom standpunkt der neuen quantenmechanik*, Zeits. für Physik **37**, 263-277 (1926).

[9] Synge, J. L., *Relativity: the special theory*, (North-Holland Pub., Amsterdan, 1965).

[10] Lanczos, C., *The variational principles of mechanics*, (University of Toronto Press, Canada, 1970).

[11] De Leo, S., *Quaternions and special relativity*, J. Math. Phys. **37**, 2955-2968 (1996).

[12] Acevedo, M., López-Bonilla, J. and Sánchez, M., *Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformations*, Apeiron **12**, 371-384 (2005).

[13] Guerrero I., López-Bonilla, J. and Rosales, L., *Rotations in three and four dimensions via 2x2 complex matrices and quaternions*, The Icfai Univ. J. Phys. **1**, 7-13 (2008).

[14] López-Bonilla, J., Morales, J. and Ovando, G., *On the homogeneous Lorentz transformation*, Bull. Allahabad Math. Soc. **17**, 53-58 (2002).

15. Carvajal-Gámez, B. E., Galaz, M. and López-Bonilla, J., *On the Lorentz matrix in terms of Infeld-van der Waerden symbols*, Scientia Magna **3**, 56-57 (2007).