

Estudio simplificado del timbre de cuerdas percutidas, punzadas y pulsadas



Michel Picquart, Lidia Jiménez

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa,
San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, 09340 México, DF, México.*

E-mail: mp@xanum.uam.mx

(Recibido el 6 de Mayo de 2010; aceptado el 29 de Mayo de 2010)

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio simplificado del timbre de algunos instrumentos de cuerdas como piano, clavecín, arpa y guitarra. Este estudio se hace a partir de la ecuación unidimensional de d'Alembert sin tomar en cuenta efectos de amortiguamiento, gravedad o rigidez de la cuerda. Se calculan la amplitud de los ocho primeros armónicos y se comparan con mediciones en instrumentos reales. Se muestra la importancia de las condiciones iniciales sobre la secuencia de armónicos producidos.

Palabras clave: Vibración de cuerdas, armónicos.

Abstract

In this work we present a simplified study of the tone of some string instruments as piano, harpsichord, harp and guitar. The study is done from the unidimensional d'Alembert equation without damping, gravity and string rigidity effects. The amplitude of the eight first harmonics is calculated and compared with real instruments. The importance of the initial conditions on the produced harmonic is shown.

Keywords: String vibration, harmonics.

PACS: 07.64.+z, 43.20.+g, 43.40.+s, 43.75.+a.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La más débil oscilación de presión detectada por nuestro sistema auditivo (de amplitud $\delta p = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa o 0 dB) puede producir placer y emoción a través de la música. Los instrumentos musicales son las principales herramientas de este arte y los fabricantes se han esforzado en el transcurso de los siglos en hacerlos más expresivos para responder a las demandas de los instrumentistas y del público.

El sistema auditivo humano es algo complejo pero es a través de él que percibimos los sonidos. Tradicionalmente, los músicos atribuyen a los sonidos cuatro parámetros o cualidades: la duración, la intensidad, la altura y el timbre. Si el primero tiene más que ver con el músico y su instrumento, los tres últimos tienen más que ver con la estructura del oído. El oído humano percibe sonidos de entre 20 Hz y 20 kHz, pero esta respuesta no es lineal. Para cada frecuencia, existe un nivel mínimo en donde se empieza a oír algo: es el umbral de audición. Si se aumenta gradualmente la intensidad del sonido, llega un momento en que es insoportable: es el umbral del dolor.

La gráfica mostrada en la Fig. 1 es conocida como curvas de Fletcher-Munson [1], en el cual el cero del umbral de audición de la escala de decibeles se encuentra para la frecuencia 1 kHz. Estos umbrales varían con la frecuencia: por ejemplo, el umbral de audición de un sonido de 100 Hz

es aproximadamente 40 dB más alto que el de un sonido de 1 kHz. Este diagrama proporciona las curvas de igual nivel de sonoridad que describen el nivel de intensidad respectivo de cada frecuencia para obtener una sensación de intensidad igual. Este diagrama evidencia una zona de mayor sensibilidad del oído entre 0.5 y 5 kHz, lo que explica que un flautín o un triángulo emerge sin dificultad del conjunto de una orquesta. La altura es uno de los parámetros perceptivos fundamentales del sonido. Está íntimamente vinculada a la frecuencia, aunque la afectan un poco la intensidad, la complejidad espectral (cantidad e intensidad relativa de los sonidos parciales), y la duración.

Una de las principales manifestaciones culturales relacionadas con la altura es la música [2]. En el caso de la música occidental tradicional, la escala de alturas se rige por una ley conocida como la escala cromática, cuyo mínimo intervalo es el semitono, que también se utiliza como unidad. Hay múltiples métodos para construir las escalas. Por ejemplo, para la construcción de la escala mayor, los principales métodos son el de Aristógenes y el de Pitágoras [3], que son muy útiles para ejecutar música para instrumentos de afinación libre, pero no convienen para los instrumentos de teclado. Una solución a este problema fue ideada por Chladni en el siglo XVIII [4], quien estableció una progresión geométrica cuyo primer término es uno y el último es 2, dividiendo el intervalo de octava en doce

intervalos iguales, de tamaño $\sqrt[12]{2}$. A la escala así formada se le llama templada o de temperamento igual. Otras escalas de temperamento desigual fueron utilizadas por los vihuelitas españoles en el siglo XV mediante las quintas templadas de tamaño $\sqrt[12]{7}$. Como todas las escalas, tienen sus ventajas y desventajas.

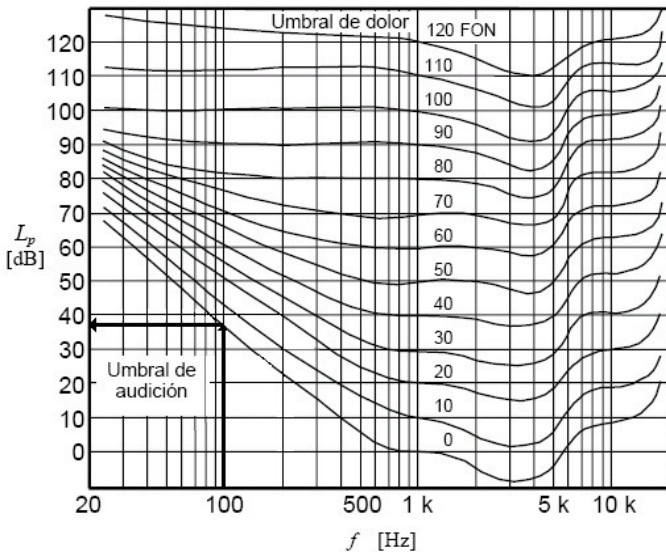


FIGURA 1. Curvas de Fletcher-Munson [1]. La mayor sensibilidad del oído se encuentra en la zona de los 3 kHz.

En una pintura rupestre de 17 000 años de edad, en la gruta de los Tres Hermanos (Grotte des Trois Frères, Ariège, Francia) se puede ver un personaje que los primeros observadores consideraron como un brujo que tenía en sus manos un arco musical [5], todavía utilizado (Berimbau) en nuestra época para la capoeira. Aunque esta interpretación fue recientemente cuestionada [6], desde la prehistoria se encuentran testimonios de la sensibilidad musical humana. En grutas se han localizado falanges de reno que servían de silbato, así como signos grabados en lugares correspondientes a las resonancias acústicas de la gruta. En un artículo reciente [7], un grupo de arqueólogos alemanes encontraron una flauta de cinco hoyos datada de 35 000 años por carbono 14 y termo-luminiscencia, y se vuelve el instrumento de música más antiguo y demuestra que en el paleolítico superior ya existía una tradición musical. Sin embargo, es Pitágoras quien descubre las primeras leyes de consonancia haciendo uso del monocordio. El sonido se percibe como más agradable cuando varias cuerdas que vibran al mismo tiempo tienen su longitud en razones sencillas. Es interesante notar que las notas que percibimos como “más consonantes” se encuentran en una razón de octava, es decir una razón de dos entre las frecuencias fundamentales. Es para este valor que el número de armónicos comunes entre los dos sonidos es el más grande [8, 9].

Los instrumentos de cuerda más antiguos y universales son las arpas y las liras. La lira más antigua es ciertamente

un simple arco con una cuerda, como se puede encontrar en algunos instrumentos africanos u orientales. El arpa de concierto actual consta de 47 cuerdas y de siete pedales utilizados por el arpista para cambiar la tensión de las cuerdas. La lira existía en la civilización sumeria hace 4500 años; el laúd es también un instrumento muy antiguo (tiene por lo menos 4000 años), es el ancestro de la guitarra que bajó el número de cuerdas desde 26 que llegó a tener para algunos laúdes, a 6 cuerdas sencillas en el caso de la guitarra actual. Debido a la dificultad de tocar con un gran número de cuerdas, como en el caso del laúd, en el siglo XI se adapta un teclado a un salterio, lo que da nacimiento al clavicordio y posteriormente al clavecín, en el cual un mecanismo hace que unos plectros rasguen las cuerdas. La principal limitación del clavecín es también la razón principal de la invención del piano-forte (como se le llamó en el siglo XVIII), pues cualquiera que sea la fuerza con que la tecla es tocada, la intensidad acústica de un clavecín sigue más o menos igual. En el piano, en cambio, los martillos transmiten a las cuerdas la misma fuerza con que se toca la tecla, lo que permite al instrumentista modular la intensidad del sonido. Las necesidades expresivas durante el romanticismo a finales del siglo XVIII hicieron que el uso del clavecín decayera a favor del piano.

En general, un instrumento está constituido de un sistema excitador (cuerda, lámina de metal, etc.) y de un sistema resonador (caja de guitarra, boca, tubo, etc.). En los instrumentos de cuerda, el primero es una cuerda y el segundo unas placas delgadas de madera. En los instrumentos considerados aquí (piano, clavecín, arpa y guitarra), tenemos una cuerda vibrante que produce un sonido. Este sonido frecuentemente no se oye ya que la vibración mecánica del aire alrededor de la cuerda es muy débil, y para ello se introduce el sistema resonador. El sonido que se oye, es una mezcla compleja del sonido producido por la tabla de armonía, las cuerdas y la caja de resonancia. A este sonido hay que añadir también, las modulaciones introducidas por las interacciones entre estos diversos elementos. En el presente trabajo se consideran solamente vibraciones transversales. Los otros tipos de vibración que existen como las longitudinales o de torsión, están presentes, pero en primera aproximación se pueden despreciar. No obstante, es importante señalar que estas contribuyen también en dar al instrumento su sonoridad particular, el timbre [10, 11].

Las vibraciones de la cuerda están sometidas, bajo ciertas condiciones, a la misma ecuación armónica que las ondas sonoras. Con esto podemos explicitar completamente los armónicos sucesivos de un sonido emitido por estos instrumentos. Como instrumentos de cuerda, tienen esencialmente las mismas características que los instrumentos de esta familia: un conjunto de cuerdas tensadas con una clavija de afinación en un extremo, y montadas sobre una "tabla de resonancia" que amplía y da resonancia a las cuerdas. Pero, si las vibraciones de la cuerda están sometidas a la misma ecuación ¿de dónde viene la diferencia? Es cierto que los efectos del acoplamiento entre la cuerda y el instrumento van a jugar un papel [12]. Aunque importantes, no son los más fundamentales y no serán

tratados en este artículo. Lo que vamos a estudiar es la física misma de la cuerda vibrante.

En todos los casos, inicialmente la cuerda es rectilínea. En el caso del piano, un pequeño martillo golpea muy brevemente la cuerda (cuerda percutida), pero en el caso del clavecín, guitarra o arpa, un sistema (plectro o dedo) deforma la cuerda para soltarla (cuerda punzada o pulsada). Lo que veremos es que lo que cambia en el sonido que percibimos, se debe a la naturaleza de la deformación inicial, a las condiciones iniciales.

Para la comprensión de este artículo, no son necesarios conocimientos particulares de música pero acordaremos algunas generalidades: las notas se siguen en el orden Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do, lo que constituye una octava. En música se consideran generalmente diez octavas numeradas de -1 a 8, y por convención internacional la frecuencia del diapasón de los músicos es de 440 Hz y corresponde al La₃ (el La de la octava 3), es decir el La central del piano que es el de la quinta octava audible. Cabe mencionar que con diez octavas se cubre la extensión en frecuencia del oído humano de 20 Hz a 20 kHz (Fig. 1), aunque esto puede variar dependiendo de la sensibilidad del oído. El cambio de una nota a la nota del mismo nombre de la octava superior (inferior) multiplica (divide) su frecuencia por dos. Lo que se llama el intervalo *i* entre dos notas, no es la diferencia entre las frecuencias de cada una sino su razón, así el intervalo de dos notas de mismo nombre de dos octavas consecutivas es 2.

En lo que sigue, primero, recordaremos la solución de la ecuación de propagación para una cuerda con sus dos extremos fijos. A continuación, esta solución se utilizará con condiciones iniciales diferentes correspondiendo a aproximaciones de los diferentes instrumentos estudiados. Para este estudio simplificado, no se tomarán en cuenta los cambios de longitud de la cuerda, ni su rigidez, ni los cambios de tensión durante la vibración (pequeñas oscilaciones), sólo se considerarán vibraciones transversales sin efecto de la gravedad. Tampoco se consideraran efectos de amortiguamiento.

II. VIBRACIONES TRANSVERSALES DE UNA CUERDA FIJA EN SUS EXTREMOS

Si el desplazamiento transversal de una cuerda vibrante de longitud *L*, fija en sus extremos a lo largo del eje *x'**x*, se escribe *y(x,t)*, con las aproximaciones mencionadas anteriormente, este tiene que satisfacer la ecuación de d'Alembert unidimensional:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

donde *c* es la velocidad de propagación que se relaciona a la tensión *T* y a la masa por unidad de longitud *μ* por $c = (T / \mu)^{1/2}$.

La solución general en ondas estacionarias sobre todos los modos propios, llamados también armónicos, se escribe:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sen \omega_n t) \sen \frac{\omega_n}{c} x, \quad (2)$$

con $\omega_n = n\omega_1$, donde $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$ es la frecuencia angular del modo fundamental (*n* = 1) y *a_n* y *b_n* son constantes que se pueden determinar con las condiciones iniciales en *t* = 0.

Dado que la cuerda está fija en sus dos extremos, se puede determinar una relación entre la longitud de onda λ_n del modo *n* y la longitud *L* de la cuerda, $\lambda_n = 2L/n$. En la figura 2, se presentan la vibración fundamental (*n* = 1) y los primeros armónicos (*n* = 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) de una cuerda fija en sus extremos. Lo que podemos resaltar es que los modos impares tienen un vientre de vibración a la mitad de la cuerda mientras que los modos pares tienen un nodo de vibración a la mitad.

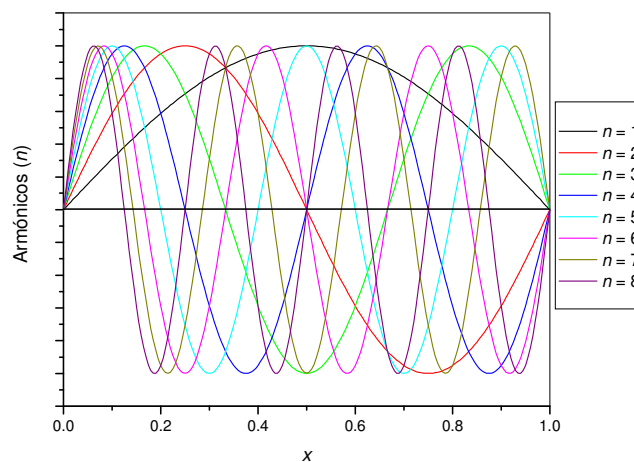


FIGURA 2. Fundamental (*n* = 1) y primeros armónicos (*n* = 2 a 8) de la vibración de una cuerda fija en sus extremos.

La frecuencia de oscilación *f_n* se relaciona entonces con las características de la cuerda por

$$f_n = \frac{nc}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (3)$$

En *t* = 0, el desplazamiento y la velocidad transversales de la cuerda están dados respectivamente por:

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sen \frac{\omega_n}{c} x, \quad (4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \sen \frac{\omega_n}{c} x. \quad (5)$$

Picquart M. y Jiménez L.

Para obtener los coeficientes a_n y b_n , se multiplican las expresiones (4) y (5) por $\frac{\omega_n x}{c}$ y se integra de 0 a L .

Sabiendo que $\int_0^L \sin \frac{\omega_n x}{L} \sin \frac{\omega_m x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{n,m}$ donde $\delta_{n,m}$ es el símbolo de Kronecker, se obtiene:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x,0) \sin \frac{\omega_n x}{c} dx, \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) \sin \frac{\omega_n x}{c} dx. \quad (7)$$

El coeficiente a_n aparece como el coeficiente de Fourier en seno de la función espacial $y(x,0)$, de periodo $2L$ y b_n aparece como el coeficiente de Fourier en seno de la función $\frac{L}{n\pi c} \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$, de periodo espacial $2L$.

Se puede ver con estas expresiones, que posición y velocidad iniciales de la cuerda determinan completamente su espectro de vibración (se trata de un problema de mecánica). Estas vibraciones se transmiten integralmente al aire en forma de sonido y representan también el espectro sonoro de la cuerda, es decir su timbre. Numerosos factores, además de la composición, de la longitud y de la tensión, van a influir sobre el contenido del sonido, en particular, el ataque.

Los antiguos habían observado que cuerdas (o tubos) de longitudes $4L/5$, $2L/3$, $L/2$ (frecuencias $5nc/8L$, $3nc/4L$, nc/L , respectivamente) proporcionaban, con respecto a una cuerda (o un tubo) de longitud L (todo el resto quedando igual), sonidos agradables al oído. Estas cuatro notas llamadas consonantes forman el acorde mayor perfecto. Por ejemplo, si el fundamental (longitud L) es el Do, la nota que tiene el intervalo $i = 5/4$ es un Mi (se llama tercera, porque con respecto al Do es la tercera nota), la que tiene el intervalo $i = 3/2$ es un Sol (quinta) y la que tiene el intervalo $i = 2$, es el Do de la octava, formando el acorde perfecto mayor Do-Mi-Sol-Do. Lo que es interesante resaltar, es que las notas de este acorde perfecto mayor se encuentran naturalmente dentro de los primeros armónicos emitidos por la cuerda.

Así, si para $n = 1$, se tiene la nota fundamental Do, los otros armónicos forman con la nota fundamental un intervalo $i = \frac{nc/2L}{1c/2L} = n$. Por lo tanto, el armónico $n = 2$, es también

un Do, a la octava, el armónico $n = 3 = \frac{3}{2} \times 2$ es el Sol de la

octava superior, y los armónicos $n = 4 = 2^2$, $n = 5 = \frac{5}{4} \times 2^2$

y $n = 6 = \frac{3}{2} \times 2^2$ son respectivamente las notas Do, Mi y Sol,

dos octavas arriba de la nota fundamental.

El armónico $n = 7$ no se puede escribir como $\left(\frac{5}{4}\right)^p \times \left(\frac{3}{2}\right)^q \times 2^r$, por lo tanto no entra en el esquema

tercera-quinta-octava. Los músicos lo llaman disonante y forma un intervalo de séptima mayor con la nota fundamental. El armónico $n = 8 = 2^3$ es un Do a tres octavas arriba del fundamental y por lo tanto es consonante.

Para finalizar, nótese que las frecuencias de las octavas siguen una progresión geométrica mientras las frecuencias de los armónicos siguen una progresión aritmética.

A continuación, se va a ver cómo diferentes condiciones iniciales modifican la producción de armónicos. Estas condiciones iniciales pueden modelar diferentes instrumentos.

III. CUERDA PERCUTIDA

En el caso del piano, al instante $t = 0^-$, la cuerda está inmóvil en su posición de equilibrio, $y(x,0) = 0$. Se golpea con un pequeño martillo de ancho e ($e \ll L$) situado entre las abscisas $x = a$ y $x = a + e$, que comunica, por el choque supuestamente elástico, un impulso inicial a la parte percutida. Se admite que en estas condiciones, la velocidad de cada punto de la cuerda al instante $t = 0^+$ esta dada por una función barrera delgada representada en la Fig. 3 y cuyas ecuaciones se escriben:

$$\begin{cases} y(x,0) = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \text{ si } x < a \text{ o } x > a + e, \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = u \text{ si } a \leq x \leq a + e. \end{cases}$$

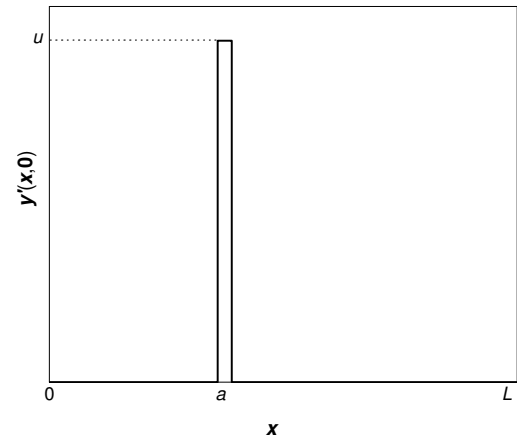


FIGURA 3. Representación de la velocidad inicial para una cuerda de piano golpeada en a , con un martillo de ancho e .

De la primera condición inicial, se obtiene inmediatamente que $a_n = 0, \forall n$. De la segunda, se obtiene:

$$b_n = \frac{2u}{n\pi c} \int_a^{a+e} \sin \frac{\omega_n x}{c} dx,$$

y se llega a:

$$b_n = \frac{2u}{n\pi c} \frac{2L}{n\pi} \sin \frac{n\pi e}{2L} \sin \left[\frac{n\pi a}{L} \left(1 + \frac{e}{2a} \right) \right], \quad (8)$$

que en el caso $e \ll 2L$, se transforma en:

$$b_n \approx \frac{2ue}{n\pi c} \sin \left[\frac{n\pi a}{L} \left(1 + \frac{e}{2a} \right) \right], \quad (9)$$

o si además $e \ll 2a$, en:

$$b_n \approx \frac{2ue}{n\pi c} \sin \frac{n\pi a}{L}. \quad (10)$$

De esta última expresión se puede deducir dos propiedades inmediatas: b_n , amplitud del armónico n , decrece como el inverso de n y b_n se cancela para $\frac{na}{L} = m$, con $m = 0, 1, 2, \dots$

Se eliminan así todos los armónicos que presenten un nodo en a . Por ejemplo, si se golpea la cuerda a la mitad, se eliminan todos los armónicos pares y se quedan todos los impares, lo que es fácil entender ya que son los únicos que poseen un vientre de vibración al centro, donde la cuerda fue golpeada.

La elección de a (lugar donde se percute la cuerda) permite entonces seleccionar los armónicos y sus amplitudes, es decir actuar directamente sobre el espectro sonoro de la cuerda. Un ejemplo está dado en la Fig. 4 para valores del cociente a/L iguales a $1/2$, $1/3$ y $1/4$, respectivamente.

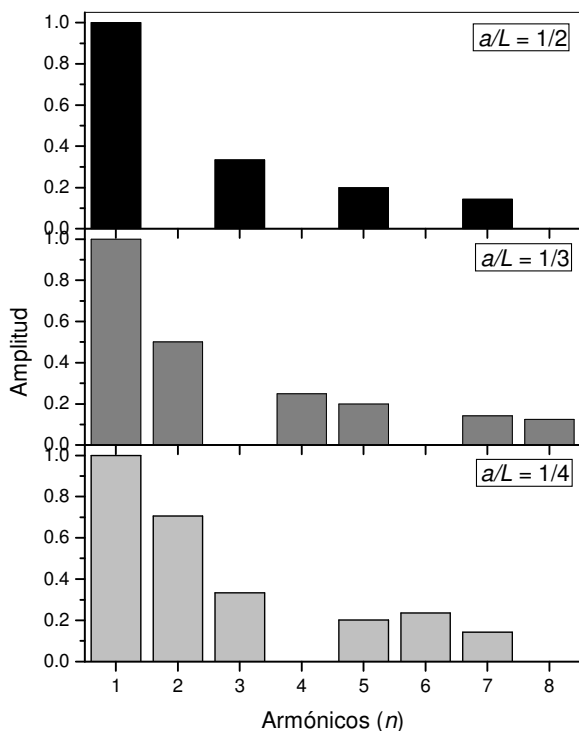


FIGURA 4. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda golpeada para valores de a/L iguales a $1/2$, $1/3$ y $1/4$, respectivamente con la expresión (10).

En los lugares en donde se golpea la cuerda, tiene que haber un vientre de vibración. Por lo tanto, en la cuerda golpeada a la mitad de su longitud, desaparecen todos los armónicos pares. Para la cuerda golpeada al tercio de su longitud, desaparecen todos los armónicos múltiples de tres y para la golpeada al cuarto de su longitud, desaparecen los armónicos múltiples de cuatro, etc.

Para una cuerda dada, la velocidad de propagación c , que depende de la masa por unidad de longitud μ y de la tensión T , no cambia. Pero para las cuerdas más cortas, que tienen las frecuencias (notas) más altas, la generación de armónicos va a ser diferente que para las cuerdas más largas, dependiendo de si la aproximación en la ecuación (8) es aceptable. Para los pianos modernos, la expresión (10) es válida para las cuerdas más largas en donde los valores de a/L son de $1/8$, $1/9$ y $1/10$ hasta la quinta octava. Para las cuerdas más cortas, el valor de a/L puede llegar a ser hasta $1/14$, y los efectos del ancho del martillo pueden no ser despreciables.

En la Fig. 5, se representa la secuencia de armónicos para una cuerda golpeada a la distancia $a/L = 0.1325$ ($L = 41.5$ cm, $a = 5.5$ cm) de su extremo usando la expresión (10). Se puede notar que todos los armónicos aparecen con un decrecimiento de amplitud mucho menor que en los casos presentados en la Fig. 4, hasta el octavo. En este caso, el valor de a/L se encuentra entre $1/7$ y $1/8$, por lo tanto no corresponde al inverso de un número entero y todos los armónicos tienen que estar presentes.

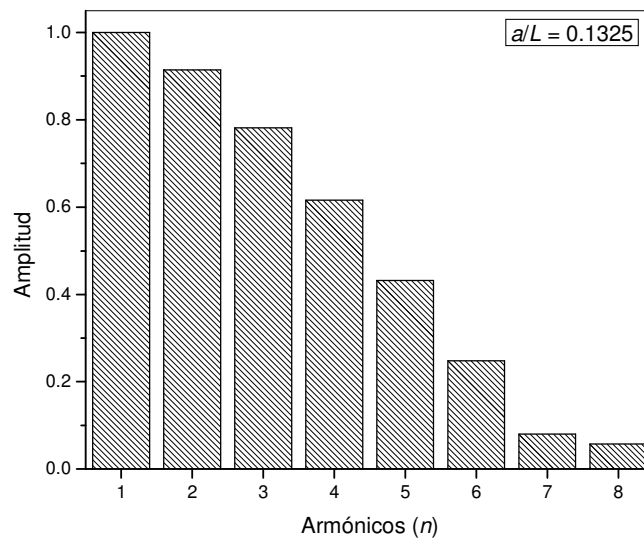


FIGURA 5. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda golpeada para $a/L = 0.1325$ correspondiendo a la octava 3 con la expresión (10).

Se utilizó el software winscope con un micrófono AKG c1000s colocado a 5 cm de la cuerda, para obtener las amplitudes espectrales aplicando la transformada rápida de Fourier del sonido emitido por diferentes cuerdas: de piano, clavecín, arpa y guitarra. En la Figura 6 se muestra el

espectro sonoro medido directamente para una cuerda de piano golpeada en los valores $a/L = 0.1325$ del La_3 (440Hz) en un piano Bechstein de media cola de 1899, con una longitud de la cuerda de $L = 41.5\text{cm}$ y $a = 5.5\text{cm}$. Aunque el martinete golpea tres cuerdas de piano, dando un sonido más rico y de mayor volumen, para analizar el espectro de frecuencias aquí presentado, sólo se permitió vibrar una de las tres cuerdas.

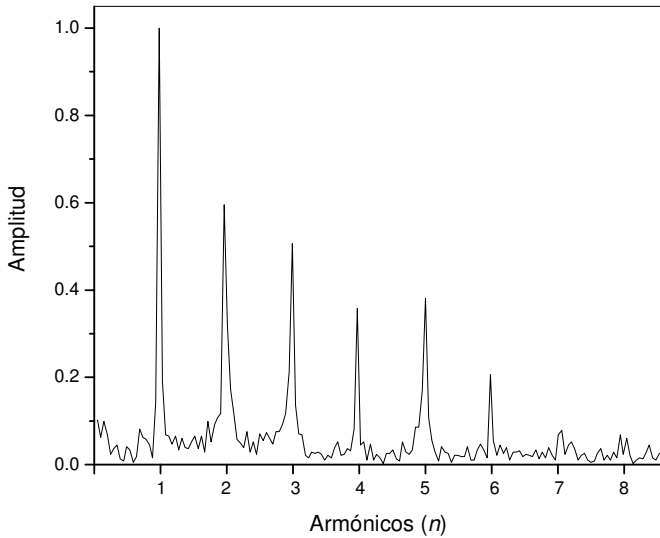


FIGURA 6. Espectro sonoro medido para una cuerda de piano La_3 golpeada, con valor $a/L = 0.1325$.

Como lo prevé el cálculo teórico, todos los armónicos están presentes aunque el decrecimiento de la amplitud no corresponde exactamente con el cálculo (Fig. 5 y 6).

IV. CUERDA PUNZADA

La misma cuerda es ahora punzada y soltada al tiempo $t = 0$ de tal manera que su velocidad inicial sea cero. Se punza la cuerda en $x = a$ y se considera que la posición inicial de la cuerda está definida por una función triángulo (Fig. 7):

$$y(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{a}x & \text{si } x \leq a \\ \frac{h(L-x)}{L-a} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

En este caso, la segunda condición inicial impone que los coeficientes $b_n = 0$. Los coeficientes a_n se calculan por:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^a h x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_a^L h \frac{L-x}{L-a} \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

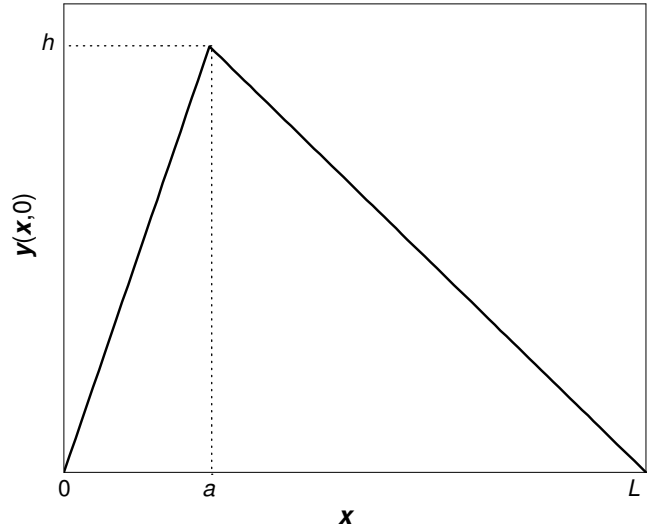


FIGURA 7. Representación de la posición inicial de una cuerda punzada en a .

Ambas integrales (A y B, respectivamente) se calculan con integración por partes:

$$A = \frac{2}{L} \left[\frac{h}{a} x \left(-\frac{L}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_0^a - \frac{2}{L} \int_0^a \left(-\frac{L}{n\pi} \right) \frac{h}{a} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= -\frac{2h}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{L} + \frac{2hL}{n^2 \pi^2 a} \sin \frac{n\pi a}{L},$$

y

$$B = \frac{2}{L} \left[h \frac{L-x}{L-a} \left(-\frac{L}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_a^L - \frac{2}{L} \int_a^L \left(-\frac{L}{n\pi} \right) \left(-\frac{h}{L-a} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2h}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{L} + \frac{2hL}{n^2 \pi^2 (L-a)} \sin \frac{n\pi a}{L}.$$

Por lo tanto, $a_n = A + B$ y

$$a_n = \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 a(L-a)} \sin \frac{n\pi a}{L}. \quad (11)$$

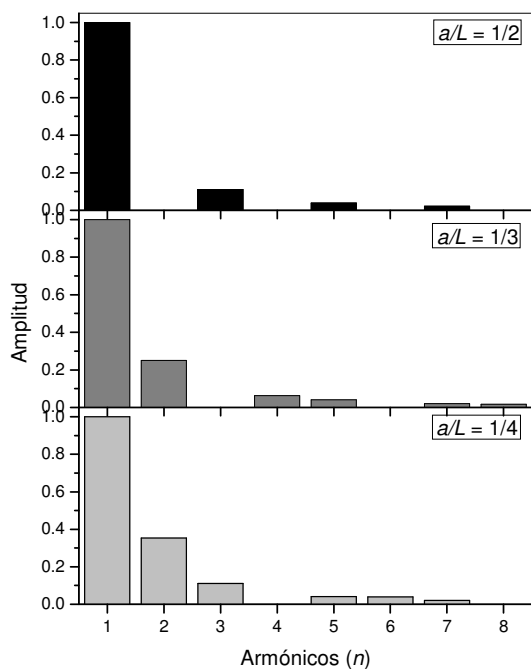


FIGURA 8. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda punzada para valores de a/L iguales a $1/2$, $1/3$ y $1/4$, respectivamente.

De la misma manera que en el caso anterior, cuando se toca la cuerda en $a = L/2$, solamente se quedan los armónicos pares, es decir los que tienen un vientre de vibración en $x = L/2$. La Fig. 8 representa para las mismas razones que para la cuerda percutida, la secuencia de armónicos de la cuerda punzada calculados con la expresión (11). Se puede observar que los armónicos decrecen más rápidamente ($1/n^2$ en lugar de $1/n$) que en el caso anterior.

En la Figura 9 se muestra el espectro de frecuencias medido en una cuerda La_3 de un clavecín fabricado en México por el maestro Alejandro Vélez en 1996, cuya longitud es de 40 cm. y el plectro rasga la cuerda en 10 cm, de manera que el cociente es $a/L=1/4$. Se puede observar un acuerdo satisfactorio entre esta figura y la calculada (Fig. 8).

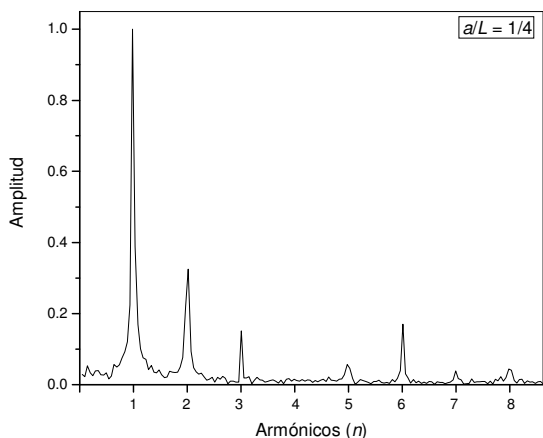


FIGURA 9. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda punzada de clavecín para $a/L = 1/4$.

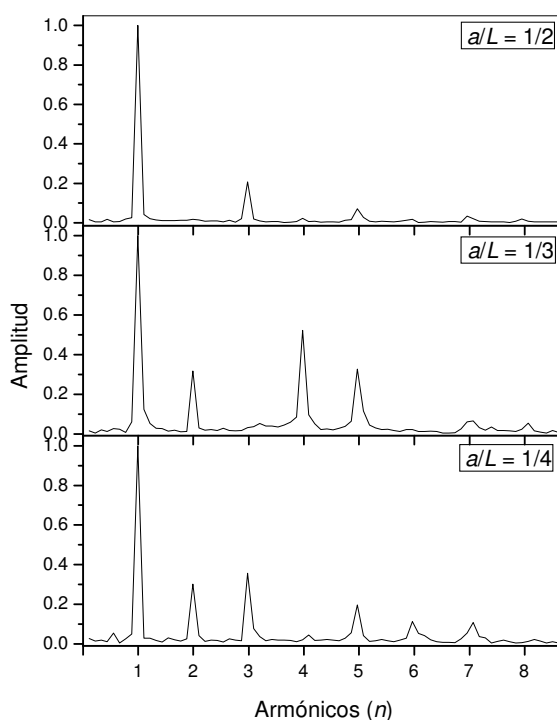


FIGURA 10. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda punzada de piano para $a/L = 1/2, 1/3, 1/4$.

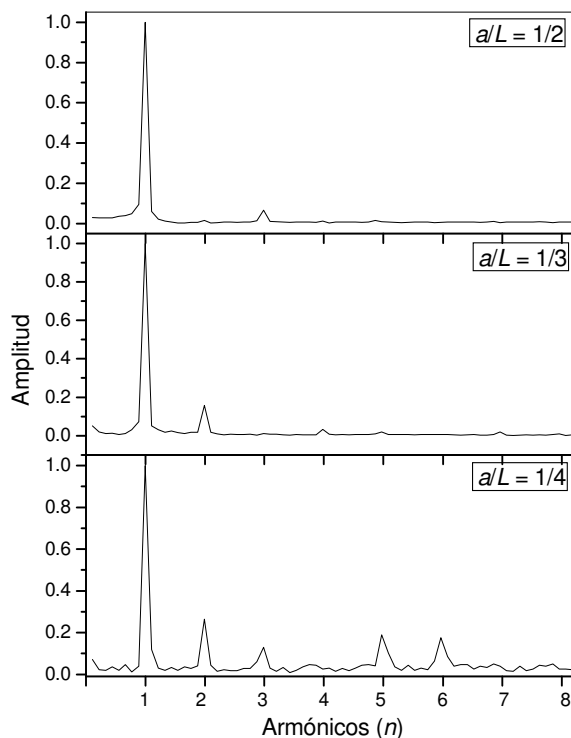


FIGURA 11. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda punzada de guitarra para $a/L = 1/2, 1/3, 1/4$.

En las Figuras 10 y 11 se grafican los armónicos medidos directamente para cuerdas punzadas de piano y guitarra, respectivamente, con cocientes $a/L = 1/2, 1/3, 1/4$. Se observa claramente la disminución o desaparición de los armónicos n para $a/L=1/n$. La cuerda de piano que se punzó es el Sol₂ con una longitud total de 84.5 cm, y la cuerda de guitarra es la cuerda Sol₂ con una longitud total de 65 cm.

V. CUERDA TOCADA CON LOS DEDOS (PULSADA)

La cuerda puede ser pulsada de manera más delicada que los casos considerados anteriormente, en particular cuando se usa solamente el dedo, lo que sucede con una guitarra o un arpa. Para este caso existen diferentes modelos que se pueden usar. El más sencillo considera que la velocidad inicial es cero como en el caso de la cuerda punzada y que la posición inicial esta representada por una función trapezoidal [8, 13], en donde a es el lugar donde se punza la cuerda y w el ancho del contacto con la cuerda (Fig. 12):

$$y(x,0) = h \frac{x}{a - \frac{w}{2}} \text{ si } 0 < x < a - \frac{w}{2},$$

$$y(x,0) = h \text{ si } a - \frac{w}{2} < x < a + \frac{w}{2},$$

$$y(x,0) = h \frac{L - x}{L - a - \frac{w}{2}} \text{ si } x > a + \frac{w}{2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

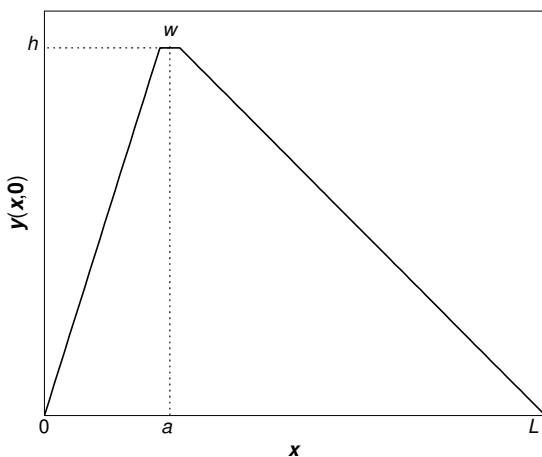


FIGURA 12. Representación de la posición inicial de una cuerda punzada en a , con un ancho w .

De la misma manera que en el caso anterior todos los coeficientes $b_n = 0$. El cálculo de los coeficientes a_n no presenta ninguna dificultad y se parece al realizado anteriormente. Se obtiene:

$$a_n = \frac{2hL}{n^2\pi^2} \frac{L-w}{\left(a - \frac{w}{2}\right)\left(L - a - \frac{w}{2}\right)} \text{sen} \frac{n\pi a}{L} \left(1 + \frac{w}{2a}\right). \quad (12)$$

La Fig. 13 muestra el resultado obtenido con un ancho $w = 1$ cm y para los mismos valores de la razón a/L que en los casos anteriores. Lo que se puede notar es que los armónicos que desaparecerían en los dos casos anteriores siguen presentes con una pequeña amplitud. El efecto es más notable para $a/L = 1/4$, es decir cuando $w/2L$ ya no es tan despreciable con respecto a a/L .

La Fig. 14 presenta la amplitud de los armónicos calculados con la expresión (12) cuando $L = 65$ cm y $a = 16$ cm. Estos valores fueron medidos para la cuerda Sol₂ de una guitarra Jom modelo 2A hecha en Paracho, México, considerando que se pulsa al centro del oído de la caja de resonancia. El toque de la guitarra se realiza en posiciones muy variables de la razón a/L , generalmente en valores que se distribuyen alrededor de la razón $1/4$, aunque claro está, el ejecutante varía esta posición tanto por la anatomía de la mano como para darle mayor riqueza armónica a la interpretación.

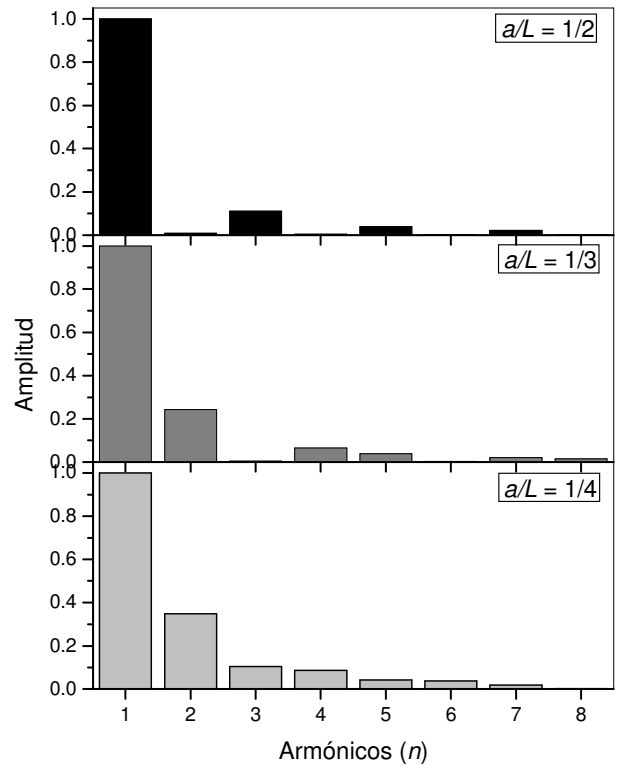


FIGURA 13. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda tocada con los dedos para valores de a/L iguales a $1/2, 1/3$ y $1/4$, respectivamente y $w = 1$ cm.

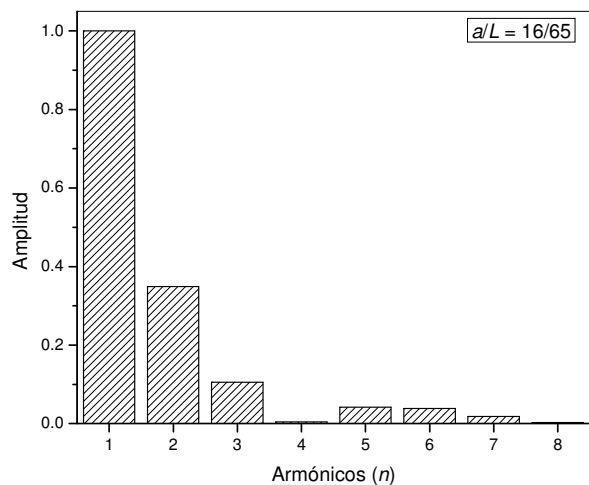


FIGURA 14. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda tocada con los dedos para $a/L = 16/65$ (guitarra) y $w = 1$ cm.

Como en los casos anteriores, el cociente $a/L = 16/65$ no corresponde al inverso de un número entero, por lo tanto, tienen que estar presentes todos los armónicos. Pero el valor es cercano a $1/4$ y los armónicos 4 y 8 son menos intensos.

En las Figuras 15 y 16 están graficados los armónicos medidos de una guitarra y de una arpa, respectivamente, para los casos considerados previamente. Se utilizó una cuerda La_3 de arpa de gran concierto Lyon and Healy, con una longitud total de 69.3 cm.

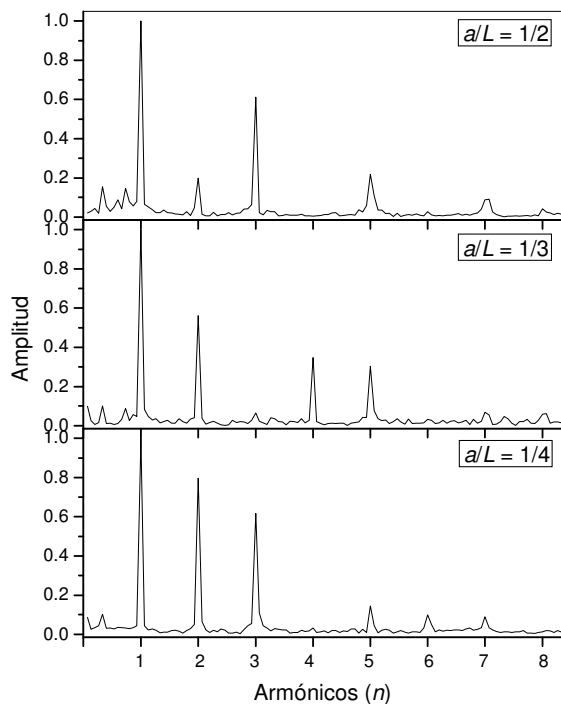


FIGURA 15. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda de guitarra pulsada con los dedos para valores de a/L iguales a $1/2$, $1/3$ y $1/4$, respectivamente y $w = 1$ cm.

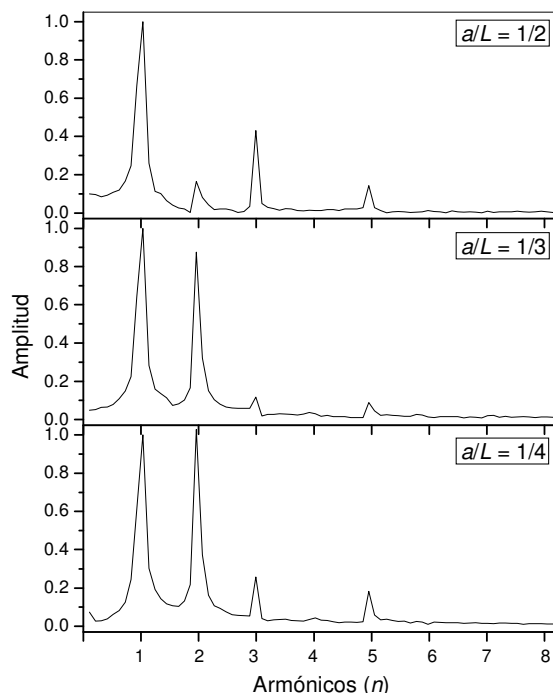


FIGURA 16. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero con normalización a 1 para el primero de una cuerda de arpa pulsada con los dedos en $a/L = 1/2$, $1/3$, $1/4$.

En la Figura 17 se presentan los armónicos que se midieron para el piano de media cola pulsando la nota Sol_2 .

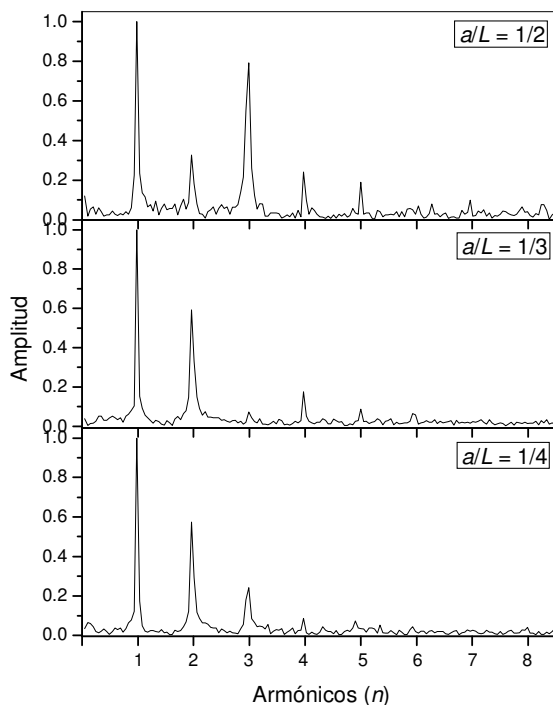


FIGURA 17. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda de piano pulsada con los dedos en $a/L = 1/2$, $1/3$, $1/4$.

Existen otros modelos tal vez más realistas para la cuerda tocada con los dedos, en donde se considera nuevamente una velocidad inicial cero y la posición al tiempo inicial descrita por una función de la forma [14, 15]:

$$y(x,0) = h \cdot e^{-\left(\frac{x-a}{w}\right)^2}, \quad (13)$$

donde w es el ancho de la deformación, o por una distribución beta de la forma:

$$y(x,0) = h \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2a}{L}} \left(\frac{L-x}{L-a}\right)^{\frac{2(L-a)}{L}}. \quad (14)$$

La razón de usar tales funciones es que representan una forma más suave de deformar la cuerda, en particular la expresión (14) se transforma en una parábola para $a = L/2$. En estos casos, los cálculos de los coeficientes a_n no se pueden hacer de manera analítica sino numéricamente.

En la Fig. 18, por ejemplo, se presenta la amplitud de los diferentes armónicos, calculados con la expresión (14) con $L = 65$ cm, y $a = 16$ cm.

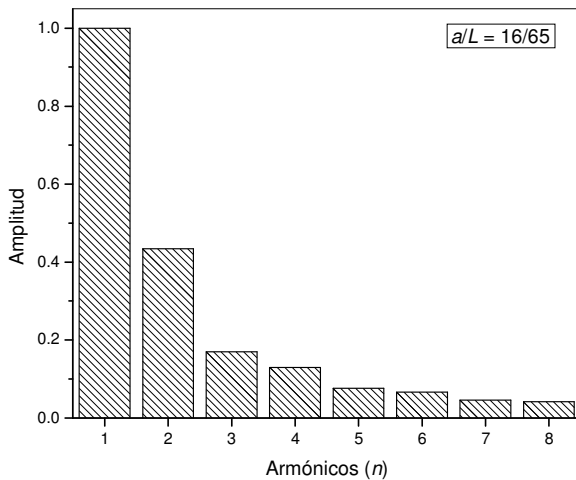


FIGURA 18. Secuencia de armónicos con normalización a 1 para el primero de una cuerda tocada con los dedos para $a/L = 16/65$ (guitarra) con la expresión (14).

Si se compara con lo que pasa con la función trapezoidal anterior (Fig. 14), se observa que el decrecimiento de los armónicos es menos importante y que todos los armónicos están presentes.

VI. DISCUSIÓN

Al hacer vibrar una cuerda, independientemente de las condiciones iniciales, ésta vibra con una frecuencia fundamental y múltiplos de ella llamados armónicos. En los modelos aquí considerados, se encuentra que la amplitud de

estos armónicos decrece en función de n y que este decrecimiento depende de las condiciones iniciales consideradas. En particular, se encuentra que en el caso de una cuerda golpeada, como en el el piano, el decrecimiento es proporcional a $1/n$ y que en el caso de una cuerda rasgada, como el clavecín, es proporcional a $1/n^2$.

En varios casos, el decrecimiento que se observó experimentalmente no coincide con lo calculado. Esto se debe a que los modelos simples aquí considerados no toman en cuenta varias causas, como son los efectos de la caja de resonancia y sus vibraciones (que dependen mucho del instrumento en particular), los efectos de amortiguamiento y gravedad, las vibraciones longitudinales y de torsión de las cuerdas, la acústica particular del recinto donde se toca el instrumento, etc. De hecho, los experimentos debieron realizarse en una cámara anecoica para eliminar estos últimos efectos. El mayor desacuerdo entre medición experimental y cálculo teórico se obtiene con el arpa, con la que se midió un segundo armónico de gran amplitud, inclusive cuando no debería estar presente (Fig. 16). De manera general, cuando la cuerda se pulsa con los dedos, los resultados no coinciden satisfactoriamente mientras que son mejores para las cuerdas percutidas o punzadas. Aquí, se puede notar probablemente el efecto de la interacción del dedo con la cuerda que algunos autores han tratado de modelar [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] con el objetivo de sintetizar los sonidos. Al pulsar la cuerda con los dedos se introducen efectos de torsión que aquí no estamos considerando y que son mucho más débiles cuando se golpea o punza la cuerda.

Otra dificultad está en el tiempo de medición y sobre todo en la sincronización entre el momento en que se golpea o se libera la cuerda después de ser pulsada o punzada, y el momento en que se graba del sonido, así como la duración de la grabación, ya que las vibraciones en realidad se amortiguan. Si la grabación se mantiene hasta que se amortigüe por completo el sonido, se puede observar que la amplitud relativa de los armónicos varía en el tiempo, y la fundamental puede llegar a amortiguarse antes que los armónicos. Esto se debe principalmente a los efectos de resonancia con las vibraciones naturales de la caja del instrumento, aunque están presentes muchos otros efectos como se mencionó anteriormente. Otro aspecto que caracteriza el timbre particular de estos instrumentos, además de la superposición de los diferentes armónicos, son los fenómenos de resonancia que pueden ocurrir entre estos y otras cuerdas del mismo instrumento. Basta que coincidan con fundamentales o armónicos de otras cuerdas para que estas últimas se pongan a vibrar y por lo tanto a emitir un sonido que se añadirá al producido por la cuerda inicial.

Aún para pequeñas vibraciones, la rigidez de la cuerda no puede ser despreciada sobre todo para valores grandes de n . Si se quiere considerar este fenómeno, se tiene que reescribir la ecuación de d' Alembert con un nuevo término:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\pi a^4}{4} \frac{E}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (15)$$

donde se encuentra nuevamente la velocidad de propagación $c = (T/\mu)^{1/2}$, a es el radio de la cuerda considerada como cilíndrica y E es el módulo de Young del material que compone la cuerda.

Si se buscan soluciones armónicas, se encuentra la relación de dispersión:

$$\omega^2 = c^2 k^2 \left(1 + \frac{\pi a^4 E}{4 \mu} k^2 \right),$$

6

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{n\pi c}{L} \left(1 + n^2 \frac{\pi^3 a^4 E}{4L^2 T} \right)^{1/2} \\ &\approx \frac{n\pi c}{L} \left(1 + \frac{n^2 \pi^3 a^4 E}{8 L^2 T} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Este nuevo término en el paréntesis es lo que se llama la anarmonicidad, una característica de la cuerda muy interesante. Tal como se han definido los armónicos (como un conjunto de sonidos derivados de la subdivisión en partes proporcionales de la cuerda en vibración), da lugar a pensar que las frecuencias de los armónicos guardan proporciones simples, y por lo tanto, forman intervalos musicales justos. En teoría, como se ha visto, así es, pero en la práctica, el hecho de que la cuerda sea un objeto material con unas características físicas concretas, hace que la serie armónica tenga una cierta distorsión, que está siempre presente en el sonido de los instrumentos. La anarmonicidad hace que los armónicos sean más agudos de lo que les correspondería según la serie armónica natural. Esto se observa en la expresión (16), que muestra que la rigidez produce un sonido de frecuencia más alta con respecto a la misma cuerda sin rigidez. Se puede mostrar que este efecto se tiene que tomar en cuenta a partir de $n = 8$ [8, 22, 23].

Dentro de ciertos límites, la anarmonicidad es deseable. Le da riqueza y timbre al sonido del instrumento, y una personalidad propia. Es una característica esencial de su sonido, particularmente para el piano, que como se ha visto, tiene muchos armónicos de gran amplitud. Pero hay un límite para su valor, más allá del cual se vuelve indeseable porque distorsiona excesivamente los armónicos e imposibilita la afinación. De hecho, una preocupación importante de los constructores de pianos, es mantener acotado dentro de ciertos límites el valor del coeficiente de anarmonicidad.

La anarmonicidad depende principalmente de la tensión y de la flexibilidad de la cuerda. Cuanto más tensa y más flexible, más bajo es el coeficiente de anarmonicidad. Una buena combinación de estos dos factores sólo es posible en instrumentos grandes. Por esto, los instrumentos de dimensiones generosas, no solamente tienen más potencia de sonido, sino que además son más "armoniosos". Los instrumentos pequeños, en cambio, son más difíciles de afinar.

VII. CONCLUSIÓN

En este trabajo se estudiaron diferentes condiciones iniciales en una cuerda y su efecto sobre la producción de los armónicos. Se compararon algunos casos particulares de condiciones iniciales como diferentes modelos para el estudio del timbre de un sonido producido por instrumentos de cuerdas percutidas, pulsadas y punzadas. En los diferentes casos, se compararon los resultados teóricos de estos modelos con el espectro de frecuencias en mediciones con instrumentos reales: piano, clavecín, arpa y guitarra. Evidentemente, como se ha mencionado, la realidad es mucho más compleja. El modelo y las aproximaciones que se han hecho simplifican mucho los cálculos y permiten explicar parte de los fenómenos observados. Para el estudio de modelos más complejos se pueden consultar las referencias [8, 9, 12-21]. Independientemente del modelo aquí considerado, pensamos que acercar más la física al mundo real, en particular a la música, puede ser de mucho valor para el interés de los alumnos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Escuela Superior de Música del INBA (México DF) y en particular a Cecilia Neve por permitirnos el acceso al clavecín y realizar las mediciones. También agradecemos a la maestra Gounta Salaks de la Filarmónica de la Ciudad de México por su colaboración en la grabación del arpa.

REFERENCIAS

- [1] Fletcher, H. and Munson, W. A., *Loudness, its definition, measurement and calculation*, J. Acous. Soc. Am. **5**, 82-108 (1933).
- [2] Miyara, F., *Acústica y Sistemas de Sonido* (UNR Editora. Rosario, Argentina, 1999).
- [3] Ullmann, D., *Life and work of E. F. F. Chladni*, Eur. Phys. J. Special Topics **145**, 25-32 (2007).
- [4] Riedweg, C., *Pythagoras: His Life, Teaching and Influence* (Cornell University Press, Cornell, 2005).
- [5] Breuil, H., *Un dessin de la grotte des Trois frères (Montesquieu-Avantès) Ariège*, Comptes-rendus des séances de l'année. Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, **3**, 261-264 (1930). [<http://www.persée.fr>, consultado el 25/02/2010].
- [6] Demouche, F, Slimak, L et Deflandre, D., *Nouvelle approche de la gravure du petit sorcier à l'arc musical de la grotte des Trois Frères : Ariège*, Préhistoire anthropologie méditerranéennes, Sociétés Historiques et Scientifiques, Congrès N°120, Aix-en-Provence, Francia, **5**, 35-37 (1996).
- [7] Conard, N. J., Malina, M. and Münzel, S. C., *New flutes document the earliest musical tradition in southwestern Germany*, Nature **460**, 737-740 (2009).
- [8] Morse, P. M. and Ingard, K. U., *Theoretical Acoustics* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986).

- [9] Rossing, T. D. *The Science of Sound*, 2^a ed. (Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1990).
- [10] Helmholtz, H., *On the Sensation of Tone*. Part 1, 80-88 (Dover, New York, 1966).
- [11] Hall, D. E., *Musical acoustics*, 2^a ed. (Thomson Brooks/Cole, 1991).
- [12] Podlesak, M. and Lee, A. R., *Dispersion of Waves in Piano Strings*, J. Acoust. Soc. Am. **83**, 305-317 (1988).
- [13] Le Carrou, J. L., *Vibro-acoustique de la harpe de concert*, Thèse de doctorat, Université du Maine, France (2006).
- [14] Derveaux, G., Chaigne, A., Joly, P. and Bécache, E., *Time-domain simulation of a guitar: Model and method*, J. Acoust. Soc. Am. **114**, 3368-3383 (2003).
- [15] Bécache, E., Chaigne, A., Derveaux, G. and Joly, P., *Numerical simulation of a guitar*, Comput. & Structures **83**, 107-126 (2005).
- [16] Chaigne, A. and Askenfelt, A., *Numerical Simulation of Piano Strings*, J. Acoust. Soc. Am. **95**, 1112-1118 (1994).
- [17] Cuzzucoli, G. and Lombardo, V., *Physical model of the plucking process in the classical guitar*, Proc. of the 1997 Int. Computer Music Conference, 172-179 (San Francisco: International Computer Music Association).
- [18] Cuzzucoli, G. and Lombardo, V., *A Physical Model of the Classical Guitar, Including the Player's Touch*, Computer Music J. **23**, 52-69 (1999).
- [19] Bank B. and Sujbert, L., *Generation of longitudinal vibrations in piano strings: From physics to sound synthesis*, J. Acoust. Soc. Am. **117**, 2268-2278 (2005).
- [20] Penttinen, H., *On the dynamics of the harpsichord and its synthesis*, Proc. 9th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-06), 115-120, (Montreal, Canada, September 18-20, 2006).
- [21] Eckerholm, F. and Evangelista, G., *The PluckSynth touch string*, Proc. 11th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-08), 1-8, (Espoo, Finland, September 1-4, 2008).
- [22] Elliot, J. A., *Intrinsic Nonlinear Effects in Vibrating Strings*. Am. J. Phys. **48**, 478-480 (1980).
- [23] Gough, C., *The Nonlinear Free Vibration of a Damped Elastic String*, J. Acoust. Soc. Am. **75**, 1770-1776 (1984).