

# Campos y carga superficial de una línea de transmisión en la aproximación cuasiestática



**Maricel Matar, Reinaldo Welti**

*Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física y Química, Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad Nacional de Rosario, Avenida Pellegrini 250, Rosario (2000), Argentina.*

**E-mail:** welti@fceia.unr.edu.ar

(Recibido el 7 de Mayo de 2010; aceptado el 18 de Agosto de 2010)

## Resumen

Para esclarecer el comportamiento de un elemento de parámetro concentrado comenzamos estudiando los campos que rodean su estructura. Después de analizar el significado de los campos cuasiestáticos se introduce la noción de parámetros distribuidos o líneas de transmisión continua. En particular, se analiza una línea de transmisión con una geometría simple que permita calcular los campos que rodean su estructura de manera exacta para todas las frecuencias. Retornando al límite de bajas frecuencias se pasa de la línea de transmisión a un circuito de parámetros concentrados de corriente alterna. Esto permite encontrar no solamente la impedancia sino también los campos y las cargas superficiales sobre los circuitos que son muy útiles para el entendimiento conceptual del comportamiento de un circuito.

**Palabras clave:** Líneas de transmisión, campos electromagnéticos, cargas superficiales.

## Abstract

The simple circuits that are studied in the basic courses of electromagnetism are composed of lumped parameter elements. To clarify the behavior of a lumped parameter element we began studying the fields surrounding the structure. After analyzing the meaning of the quasi-static fields we introduce the notion of distributed parameters or transmission lines. In particular, we analyze a transmission line with a simple geometry that allows us to calculate the fields surrounding the structure accurately for all frequencies. In the low frequency limit we return to a lumped parameter circuit of alternating current. This allows us to find not only the impedance but also the fields and surface charges on the circuits that are very useful for conceptual understanding of the behavior of a circuit.

**Keywords:** Transmission lines, electromagnetic fields, surface charges.

**PACS:** 01.55.+b, 84.30.Bv, 41.20.Cv

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

El interés en el estudio de la distribución de las cargas superficiales sobre los conductores que transportan una corriente y su utilidad para la comprensión conceptual del comportamiento de los circuitos se han incrementado recientemente. Numerosos trabajos y textos [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] presentan resultados cualitativos, analíticos y numéricos para diferentes geometrías de la estructura del circuito. En un curso tradicional de electromagnetismo, la teoría de circuitos de corriente continua (CC) se formula en términos de los conceptos de potencial, carga y corriente, mientras que los campos electromagnéticos juegan un rol secundario o nulo. Esto hace que los campos y los circuitos aparezcan como dos tópicos completamente diferentes y no relacionados. Sin embargo, un circuito simple, como el formado por una batería y una resistencia, tienen una física realmente interesante que la mayoría de los textos omiten. Chabay y Sherwood [12] proponen, tomando las ideas

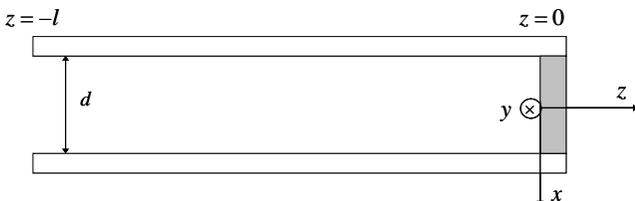
cualitativas de Hartel [10, 11], utilizar el concepto de cargas superficiales para ayudar a los estudiantes a entender los campos eléctricos y las corrientes en un circuito. Sin embargo, la difusión del punto de vista de la carga superficial en los textos y en el aula es muy lento. La mayoría de los materiales didácticos en uso no van más allá del modelo de Drude [13] de la corriente eléctrica, y no mencionan el papel que juegan las cargas superficiales en la creación del campo en el interior de los conductores. Una de las razones de este comportamiento podría atribuirse a que, a diferencia del modelo de Drude y de las leyes de Kirchhoff, la presentación de los modelos de carga superficial, aún los cualitativos y de simple geometría, son difíciles aún para los propios docentes [3, 4, 15]. En un trabajo reciente [16] se tiene especialmente en cuenta, como sugiere Härtel [11], el capacitor formado por las superficies de los conductores del circuito y hacen uso de la teoría de circuitos de parámetros distribuidos para encontrar las

variaciones espaciales de la carga superficial sobre la superficie de los conductores.

El objetivo de este trabajo es extender el análisis realizado en [16], al caso en que la tensión y la corriente varíen en el tiempo. A diferencia del caso de *CC* donde el único parámetro importante del circuito es su resistencia *R*, ahora se debe tener en cuenta su capacitancia *C* e inductancia *L*. En la aproximación cuasiestática (CE), que equivale a suponer que las dimensiones del circuito son mucho menores que la longitud de onda, la resistencia *R*, la capacitancia *C* y la inductancia *L* son los elementos de *parámetros concentrados* del sistema. Dos circuitos que son idénticos en su representación con parámetros concentrados pueden corresponder a estructuras físicas diferentes y, por lo tanto, los campos que los rodean, y las cargas superficiales, pueden ser muy diferentes. En este trabajo se utilizan los argumentos esgrimidos por Adler *et al.* [17] para discutir el “dilema” de los parámetros concentrados, esto es, la dificultad que existe para representar a una dada estructura física por medio de una conexión de elementos de parámetros concentrados. Este dilema se resuelve encontrando los campos que rodean su estructura. Este estudio, por lo tanto, es otra alternativa, para unir la teoría de campos con la teoría de circuitos. Por otra parte la resolución del dilema de los parámetros concentrados permite también encontrar la distribución de las cargas superficiales sobre el circuito y el rol que estas desempeñan.

## II EL DILEMA DE LOS ELEMENTOS CONCENTRADOS

Para aclarar el significado del conflicto que se puede generar en torno de los elementos concentrados, en la Fig.1 se muestra un circuito formado por un par de placas paralelas de pequeño espesor y perfectamente conductoras. El circuito termina en una pequeña lámina resistiva y se le aplica un voltaje constante entre las dos placas paralelas en  $z = -l$ .



**FIGURA 1.** Circuito simple formado por placas paralelas perfectamente conductoras conectadas por una placa resistiva.

**Caso 1.** Si la resistencia de la lámina resistiva es muy grande podemos suponer que las placas están en circuito abierto y si se desprecian los efectos de borde el campo electrostático en el interior de las placas será uniforme:

$$\vec{E}_0 = \frac{V}{d} \hat{i}, \quad (1)$$

y la “capacitancia electrostática” será

$$C = \frac{\text{carga sobre la placa 1}}{V} = \left( \frac{\epsilon_0 w}{d} \right) l, \quad (2)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del medio homogéneo entre las placas (que suponemos es el “vacío” por comodidad).

**Caso 2.** Si la resistencia de la placa resistiva es muy pequeña podemos suponer que las placas están cortocircuitadas (o en corto). Si se le imprime una corriente *I* con una distribución uniforme a lo largo del eje *y*, entonces, si despreciamos otra vez los efectos de borde, el campo magnético estático entre las placas será uniforme:

$$\vec{H}_0 = \frac{I}{w} \hat{j}, \quad (3)$$

y la “inductancia” magnetostática será

$$L = \frac{\text{flujo en la dirección } +y}{I} = \left( \frac{\mu_0 d}{w} \right) l, \quad (4)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío.

En el primer caso la fuente de voltaje estático *V* no entrega ninguna corriente. En la medida que  $dV/dt = 0$  y que la corriente *I* entregada por la fuente es también cero, no es para nada obvio que la capacitancia *C* de la ecuación (2) tenga alguna relación particular con la capacitancia de la teoría de elementos concentrados, que se define por la relación

$$I = C \frac{dV}{dt}. \quad (5)$$

A pesar de esto se supone habitualmente que las dos definiciones son equivalentes.

En el segundo caso, no hay ninguna tensión entre las placas. Como  $dI/dt = 0$  y el voltaje *V* entre las placas es también cero, la conexión entre la *L* de la ecuación (4) y la inductancia definida en la teoría de circuitos de parámetros distribuidos por la relación

$$V = L \frac{dI}{dt}, \quad (6)$$

no es para nada evidente. A pesar de ello habitualmente suponemos que las dos definiciones de inductancia son equivalentes. El alcance real de nuestras dificultades quizás no se aclara enteramente a partir de estos dos ejemplos familiares, justamente por que son muy familiares.

**Caso 3.** Qué pasa con nuestros conceptos de elementos concentrados si la resistencia de la terminación no es ni muy

grande ni muy pequeña, de modo que no podamos aproximar al circuito ni por un circuito abierto ni por un cortocircuito. Si la corriente es continua la lámina resistiva constituye una resistencia en el sentido de la teoría de circuitos de parámetros concentrados. Sin embargo, estamos interesados en el comportamiento en corriente alterna (CA) de todo el dispositivo de la Fig. 1. Es seguro que será algo resistivo, pero ¿qué podemos decir acerca de su inductancia y su capacitancia? ¿Cómo debemos conectar los elementos concentrados  $R, L$  y  $C$  para que representen el comportamiento en CA de las dos placas perfectamente conductoras que están unidas por una lámina de resistencia “moderada”?

Vamos a proceder con los mismos argumentos que seguimos en los casos 1 y 2. Supongamos que aplicamos un voltaje constante  $V$  entre las placas. Si despreciamos (otra vez) los efectos de borde, este voltaje creará una corriente total, en la lámina, en la dirección  $+x$  y esta corriente se distribuirá uniformemente en las direcciones  $y$  y  $z$ . La  $R$ , de la lámina resistiva al flujo de la corriente viene dada por la ley de Ohm

$$R_t = \frac{V}{I} = \frac{\rho_l d}{\delta w}, \tag{7}$$

donde  $\rho_l$  es la resistividad y  $\delta$  el espesor de la lámina. Si suponemos además que el voltaje  $V$  se aplica en  $z = 0$  sobre todo el frente entero del borde de las placas, la corriente  $I$  fluirá uniformemente sobre las placas de arriba y abajo. El campo magnético estático entre las placas viene dado entonces por

$$\vec{H} = \frac{I}{w} \hat{j}, \tag{8}$$

mientras que el campo eléctrico estático es

$$\vec{E} = \frac{V}{d} \hat{i} = \frac{R_t I}{d} \hat{i}. \tag{9}$$

Si nos restringimos al caso electrostático o magnetostático, obtendremos exactamente los mismos  $L$  y  $C$  de las ecuaciones (2) y (4), ya que las expresiones para  $\vec{H}$  en términos de  $I$  (ecuación (8)), y de  $\vec{E}$  en términos de  $V$  (ecuación (9)), son idénticas a las ecuaciones 1 y 3. Pero ahora tenemos también a  $R_t$  y el problema es: ¿Cómo podemos conectar los elementos “estáticos”  $R_t, L$  y  $C$  de las ecuaciones (7), (4) y (2) en un circuito concentrado de modo tal que represente adecuadamente la relación en CA entre  $V$  e  $I$  en la estructura física de la Fig.1 cuando la resistencia de la lámina no es ni muy grande ni muy pequeña? Como la respuesta a esta pregunta no es nada evidente estamos forzados en admitir que no hemos entendido bien el significado del comportamiento en CA de la estructura de la Fig. 1.

### III APROXIMACIÓN CUASI-ESTÁTICA (CE)

Vamos a analizar el comportamiento, en CA, del dispositivo de la Fig. 1, en un régimen sinusoidal estacionario a la frecuencia  $\omega$ , suponiendo que la resistencia de la lámina resistiva es nula, esto es, cuando el sistema está en corto. Suponemos que en lugar de una corriente constante de CC, aplicamos al dispositivo de la Fig.1 una corriente de la forma  $I(t) = \text{Re } I_0 e^{i\omega t}$ . El objetivo es encontrar el campo dentro de la estructura, a la frecuencia  $\omega$ , partiendo de su solución en baja frecuencia usando el método de aproximaciones sucesivas similar al realizado por Feynman [18] cuando analiza el comportamiento de un capacitor a altas frecuencias.

Si la frecuencia es muy baja, nuestra primera conjetura es la aproximación de orden cero que encontramos en la sección anterior:

$$\begin{aligned} (a) \quad \vec{E}_0 &= 0, \\ (b) \quad \vec{H}_0 &= \frac{I_0}{w} e^{i\omega t} \hat{j}, \end{aligned} \tag{10}$$

que equivale a decir que el campo tiene la misma variación espacial que tiene cuando la corriente era continua aún cuando ahora varía sinusoidalmente en el tiempo ( $e^{i\omega t}$ ).

Evidentemente esto es incorrecto porque sabemos de las ecuaciones de Maxwell que una variación temporal de  $\vec{H}$  crea un campo eléctrico (ley de Faraday). Este campo magnético variable en el tiempo crea un campo eléctrico que está en la dirección  $x$ ,  $\vec{E}_1 = E_1 \hat{i}$ , que no depende ni de  $x$  ni de  $y$ , pero sí de  $z$ . La dependencia en  $z$  puede ser determinada si en el contorno cerrado  $C$ , en el plano  $xz$ , que se muestra en la Fig. 3 utilizamos la ley de Faraday.

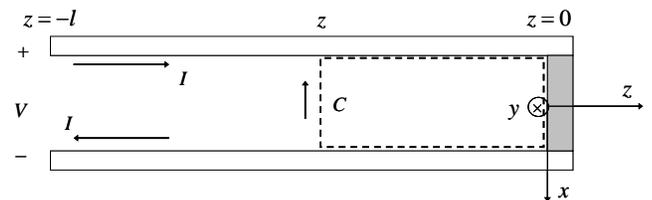


FIGURA 2. Contorno  $C$  para aplicar la ley de Faraday.

Como  $E_1 = 0$  sobre la superficie perfectamente conductora en  $z = 0$ , tenemos:

$$-E_1(z)d = -i\omega\mu \frac{I_0}{w} d(-z). \tag{11}$$

Recordemos que  $z < 0$  a la izquierda del plano que cortocircuita las dos placas. Por tanto la primera aproximación para  $\vec{E}$  es

próxima sección vamos a exponer un método matemáticamente más apropiado para encontrar los campos.

$$\vec{E}_1 = -\frac{\omega\mu I_0 z}{w} e^{i\omega t} \hat{i}. \quad (12)$$

La impedancia de entrada  $Z$  puede ahora ser calculada sobre la base de una definición para el voltaje de entrada  $V$  en  $z = -l$  como

$$V = E_x d. \quad (13)$$

Esta definición es una extensión razonable de la que se utiliza en el caso estático. Consecuentemente, las aproximaciones de orden cero y de primer orden para  $Z$  son respectivamente,

$$(a) \quad Z^{(0)} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = 0, \quad (14)$$

$$(b) \quad Z^{(1)} = \frac{V(-l)}{I(-l)} = \frac{E_1(-l)d}{I_0} = i\omega \left( \frac{\mu dl}{w} \right) = i\omega L.$$

Podemos remarcar dos aspectos importantes de nuestros resultados:

(i) la variación temporal de  $\vec{H}$  viene acompañada por una variación espacial de  $\vec{E}$  (además de su variación temporal, por supuesto).

(ii) El campo estático  $\vec{H}(H_0)$  y el campo de primer orden  $\vec{E}(E_1)$  constituyen lo que definimos como la solución cuasiestática para este caso. De acuerdo a las ecuaciones (14), esta es una solución que lleva a la idea convencional de inductancia “concentrada”. El campo eléctrico que produce el “voltaje” a través del “inductor” realmente existe en el espacio y en el tiempo y no puede ser determinado a partir de consideraciones estáticas solamente.

Podemos continuar con este procedimiento. Ahora tenemos un campo eléctrico variable en el tiempo  $\vec{E}_1$  que produce una corriente de desplazamiento perpendicular a las placas que no fue tenida en cuenta en nuestro primer cálculo de  $\vec{H}$ . Si aplicamos la ley de Ampere encontraríamos que  $\vec{H}$  debe variar también con  $z$ . Esto hace que la corriente en las placas también varíe con  $z$  y, por lo tanto, de acuerdo a la ecuación de conservación de la carga, implica que la densidad de carga superficial varíe también con  $z$ . Por otra parte esto exige que seamos más cuidadosos cuando hablemos de la corriente que circula en el sistema por que esta corriente depende de  $z$ .

Los cálculos y consideraciones previos sugieren, por lo tanto, que podemos desarrollar  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en serie de potencias de  $\omega$ . Con esta visión [17], se puede decir que el campo CE es meramente una solución en serie de las ecuaciones de Maxwell, correcta hasta el primer orden de  $\omega$ .

Como con este proceso iterativo no se pueden resolver problemas que sean un poco más complicados, en la

#### IV UNA SOLUCIÓN “CASI” EXACTA PARA LOS CAMPOS Y EL CONCEPTO DE PARÁMETROS DISTRIBUIDOS

En la sección anterior buscamos la solución de las ecuaciones de Maxwell adentro de una región limitada, arriba y abajo, por placas paralelas perfectamente conductoras. La naturaleza de de la superficie con que terminan, esto es, si es de alta, baja o mediana resistencia, crea una violenta diferencia en su comportamiento eléctrico en CA. Para obtener una solución simple, en CA, que refleje solamente esta diferencia en la terminación y, que no se complique por dificultades extrañas, vamos a ignorar los efectos de borde. Esto se cumple aproximadamente si el ancho  $w$  es mucho mayor que  $d$ . Refiriéndonos a la Fig.1, vamos a considerar que el interior de la estructura está definido por  $0 < y < w$ ,  $-d/2 \leq x \leq d/2$ ,  $-l \leq z \leq 0$ , y  $w \gg d$ . En esta situación los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  que son soluciones del problema serán aproximadamente independientes de  $y$ . Debemos además remarcar que no vamos a tener en cuenta la estructura fina de los campos en  $z = -l$  donde el sistema está conectado con una fuente y en  $z = 0$  donde está conectado con una impedancia concentrada. Estas hipótesis simplificadoras son las que se hacen usualmente en la teoría de líneas de transmisión.

Otra condición de contorno es que el campo eléctrico sea perpendicular a las placas de arriba y abajo. Buscaremos una solución que se parezca lo más posible a nuestra solución en CC pues queremos que se reduzcan a estas cuando se anule la variación temporal. Por lo tanto requeriremos arbitrariamente que nuestra solución satisfaga la condición de borde más restrictiva,  $E_y = E_z = 0$  para todos los puntos  $x$ ,  $y$  y  $z$  interior a la estructura. Esta elección hace que la condición de borde sobre las placas metálicas se satisfagan automáticamente.

Con las condiciones de contorno que elegimos, las únicas componentes no nulas de los campos ( $H_y$  y  $E_x$ ) no dependen de  $x$ , de modo que las ecuaciones de Maxwell, en el interior de las placas son:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ (b) \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (15)$$

Las soluciones de la ecuación (15) son un tipo especial de ondas llamada *onda transversal electromagnética* (TEM). Esta solución tiene sólo componentes transversales de campo, perpendiculares a la dirección de propagación. Una importante propiedad del modo TEM es la ausencia de

frecuencia de corte y que, en el límite de frecuencia cero, se reduce a un problema electrostático.

Observemos que las soluciones variables en el tiempo para  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  tienen las mismas direcciones que tenían para el caso de  $CC$  y, como en este último caso, éstas no varían con  $x$ . Por supuesto, tampoco varían con  $y$ , pero esto se impuso como condición de borde. El hecho importante, asociado con la variación temporal, que se sigue de las ecuaciones (15) es que tanto  $E_x$  como  $H_y$  deben depender de  $z$  cuando varían con el tiempo. En nuestro primer análisis “estático” de los dispositivos de la Fig. 1 no hemos incluido esta variación con  $z$ , pero ésta se presenta naturalmente en la aproximación de primer orden y superiores.

Podemos definir un voltaje  $V$  en una manera casi convencional, como la integral de línea del campo eléctrico desde la placa superior a la inferior, a lo largo de cualquier línea que permanezca en un plano perpendicular al eje  $z$  [16,17]. Entonces  $V$  resulta una función de  $z$  y  $t$ :

$$V(z,t) = \int_{-d/2}^{d/2} E_x dx \Big|_z = E_x d, \quad (16)$$

ya que  $E_x$  es independiente de  $x$ . Similarmente, vamos a definir la corriente  $I$  como la corriente en la dirección  $+z$ , a lo largo de una sección de ancho  $w$  de la placa superior, a través de una línea en cualquier plano perpendicular al eje  $z$ . De esta manera  $I$  es también una función de  $z$  y  $t$ . Como la densidad de corriente superficial sobre un conductor perfecto es igual a la componente del campo magnético paralelo al conductor, ecuación (8), tenemos

$$I(z,t) = wH_y. \quad (17)$$

Si ahora reemplazamos las ecuaciones (16) y (17) en (15), encontramos:

$$(a) \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\left(\frac{\mu_0 d}{w}\right) \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (18)$$

$$(b) \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -\left(\frac{\epsilon_0 w}{d}\right) \frac{\partial V}{\partial t},$$

la comparación de la ecuación (18a) con las ecuaciones (4) y (6) nos muestra que  $(\mu_0 d)/w = \mathcal{L}$  es una inductancia por unidad de longitud a lo largo del eje  $z$ . En otras palabras, en un tiempo fijo, la tensión de la ecuación (33) decrece en  $dV$  en una distancia  $dz$  debido a la velocidad con que incrementa la corriente a través de la inductancia en serie  $\mathcal{L} dz$ . Similarmente, la comparación de la ecuación (18b) con las ecuaciones (5) y (2) muestra que  $(\epsilon_0 w)/d = \mathcal{C}$  es la capacitancia por unidad de longitud a lo largo de  $z$  entre las dos placas, dando cuenta del hecho que la corriente de conducción  $I$  sobre las placas debe decrecer con la distancia debido a la corriente de desplazamiento que fluye desde la

placa superior a la inferior. Desde este punto de vista la estructura de la Fig. 1 puede ser mirada para su análisis en el régimen de corriente alterna como un circuito *distribuido*. En lugar de elementos  $L$  y  $C$  concentrados, imaginamos una distribución continua de la inductancia y la capacitancia a lo largo del eje  $z$ . El hecho asombroso, sin embargo, es que estos valores coinciden con los que se calculan a partir de consideraciones estáticas.

En el caso de una variación sinusoidal en el tiempo podemos escribir

$$(a) \quad V(z,t) = \text{Re} \left[ \tilde{V}(z) e^{j\omega t} \right], \quad (19)$$

$$(b) \quad I(z,t) = \text{Re} \left[ \tilde{I}(z) e^{j\omega t} \right],$$

donde  $\tilde{V}(z)$  e  $\tilde{I}(z)$  son las amplitudes complejas que dependen de la posición  $z$ . Como las ecuaciones (18) son lineales y, como  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{C}$  son dos constantes reales la ecuación diferencial en  $z$  que deben ser satisfechas por  $\tilde{V}(z)$  e  $\tilde{I}(z)$  pueden ser encontradas sustituyendo  $\tilde{V}(z) e^{j\omega t}$  por  $V(z,t)$  e  $\tilde{I}(z) e^{j\omega t}$  por  $I(z,t)$  en las ecuaciones (18). Después de cancelar el factor  $e^{j\omega t}$ , encontramos

$$(a) \quad \frac{d\tilde{V}(z)}{dz} = -i\omega\mathcal{L}\tilde{I}(z), \quad (20)$$

$$(b) \quad \frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = -i\omega\mathcal{C}\tilde{V}(z).$$

Podemos obtener una ecuación sólo para  $\tilde{V}(z)$  derivando (20a) con respecto a  $z$  y después sustituyendo a  $d\tilde{I}(z)/dz$  de la ecuación (20b):

$$\frac{d^2\tilde{V}(z)}{dz^2} + \omega^2\mathcal{L}\mathcal{C}\tilde{V}(z) = 0. \quad (21)$$

La solución general de (21) es

$$\tilde{V}(z) = A e^{-ik_0 z} + B e^{ik_0 z}, \quad (22)$$

donde  $A$  y  $B$  son dos constantes complejas arbitrarias y  $k = \omega\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}$ .

Mediante la ecuación (20a), se obtiene a  $\tilde{I}(z)$ :

$$\tilde{I}(z) = \frac{A}{Z_0} e^{-ikz} - \frac{B}{Z_0} e^{ikz}, \quad (23)$$

donde  $Z_0 = \sqrt{\mathcal{L}/\mathcal{C}}$  es la *impedancia característica* de la línea de transmisión. Las soluciones (22) y (23) deben ser

interpretadas como la superposición de dos ondas propagantes en direcciones opuestas. La velocidad de propagación de estas ondas es la velocidad de fase que viene dada por  $v_f = \omega/k = 1/\sqrt{LC}$ .

### V. LÍNEA DE TRANSMISIÓN SIN PÉRDIDAS CON UNA CARGA RESISTIVA

Vamos a considerar el caso de una línea semiinfinita con una carga resistiva arbitraria  $R_T$  en su terminal derecho. En lo que sigue vamos a elegir el origen  $z=0$  en la terminación, de modo que la línea se encuentra a lo largo de  $z < 0$  como se muestra en la Fig. 1. La fuente está presumiblemente colocada en  $z = -l$ . Si la tensión en la línea y la corriente de la transmisión en  $z = 0$  son  $V(0)$  e  $I(0)$  respectivamente, entonces

$$\frac{V(0,t)}{I(0,t)} = \frac{\tilde{V}(0)}{\tilde{I}(0)} = R_T. \quad (24)$$

Se calcula  $V(0)$  e  $I(0)$  con las ecuaciones (22) y (23); luego, reemplazando en (24), se obtiene

$$\frac{B}{A} = \mathcal{R} = \frac{R_T - Z_0}{R_T + Z_0}, \quad (25)$$

donde  $\mathcal{R}$  es el coeficiente de reflexión.

Reemplazando (25) en (22) y (23) obtenemos

$$a) \quad \tilde{V}(z) = I_0 R_T \cos kz - iZ_0 \sin kz, \quad (26)$$

$$b) \quad \tilde{I}(z) = \frac{I_0}{Z_0} Z_0 \cos kz - iR_T \sin kz,$$

donde  $I_0 = \tilde{I}(z=0)$  que suponemos es real.

Utilizando las ecuaciones (16) y (17) encontramos los campos eléctrico y magnético en el interior de las placas:

$$a) \quad E_x(z,t) = \frac{I_0 R_T \cos kz - iZ_0 \sin kz}{d} e^{i\omega t}, \quad (27)$$

$$b) \quad H_y(z,t) = \frac{I_0 Z_0 \cos kz - iR_T \sin kz}{wZ_0} e^{i\omega t}.$$

#### A. Los campos y la impedancia en la aproximación CE

En la aproximación cuasiestática,  $|kl| \ll 1$ , entonces,  $\sin kz \approx kz$  y  $\cos kz \approx 1$  y las ecuaciones (29) resultan

$$a) \quad E_x(z,t) = \frac{I_0 R_T - iZ_0 kz e^{i\omega t}}{d}, \quad (28)$$

$$b) \quad H_y(z,t) = \frac{I_0 Z_0 - iR_T kz e^{i\omega t}}{wZ_0}.$$

En la aproximación estática ( $\omega = 0, k = 0$ ) los campos son uniformes en el interior de las placas,

$$a) \quad E_x(z,t) = \frac{I_0 R_T e^{i\omega t}}{d}, \quad (29)$$

$$b) \quad H_y(z,t) = \frac{I_0 e^{i\omega t}}{w}.$$

La parte del campo eléctrico que varía linealmente con  $k$  (y por ende con  $\omega$ ) en (28a) es creado por la variación temporal del campo magnético (29b), de acuerdo a la ley de Faraday, y la parte del campo magnético que varía linealmente con  $k$  (y por ende con  $\omega$ ) en (28b) es creado por la variación temporal del campo eléctrico (29a), esto es, por la corriente de desplazamiento.

En la aproximación CE la impedancia de entrada en  $z = -l$  viene dada por

$$Z(-l) = \frac{V(-l)}{I(-l)} = \frac{R_T + i\omega L}{1 + i\omega CR_T}. \quad (30)$$

Si la corriente de desplazamiento es despreciable, esto es el campo magnético creado por la corriente de desplazamiento es muy pequeño comparado con el campo magnético creado por la corriente de conducción, estamos en la aproximación cuasiestática magnética (CEM) [19, 20]. De acuerdo a la ecuación (30) esto tiene lugar cuando  $R_T(\omega/c)l \ll Z_0$ . Como  $Z_0 c = 1/C$ , esta desigualdad se puede escribir como  $\omega CR_T \ll 1$ . Esto implica que la impedancia capacitiva del sistema es mucho mayor que su resistencia. En la aproximación CEM la impedancia de entrada es

$$Z(-l) = R_T + i\omega L, \quad (31)$$

que está representada por el circuito de la Fig. 3.

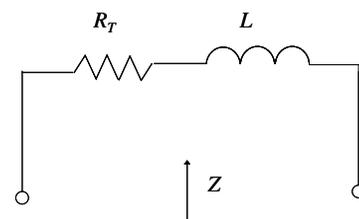


FIGURA 3. Impedancia de entrada en la aproximación CEM.

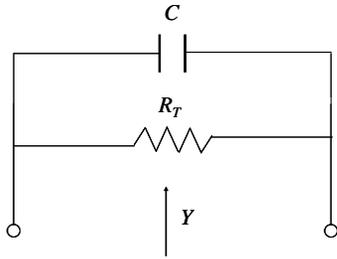


FIGURA 4. Admitancia de entrada en la aproximación CEE.

Si la inducción magnética es despreciable, esto es si el campo eléctrico creado por las variaciones temporales del campo magnético (31b) es muy pequeño comparado con (31a), estamos en la aproximación cuasiestática eléctrica (CEE) [19, 20]. De acuerdo a la ecuación (30a) esto tiene lugar cuando  $Z_0(\omega/c)l \ll R_T$ . Como  $Z_0/c = \mathcal{L}$ , esta desigualdad se puede escribir como  $\omega L \ll R_T$ . Esto implica que la impedancia inductiva del sistema es mucho menor que su resistencia. En la aproximación CEE la admitancia de entrada es

$$Y(-l) = \frac{1}{R_T} + i\omega C = G_T + i\omega C, \quad (32)$$

que está representada por el circuito de la Fig. 4.

Si  $\omega L \approx 1/\omega C \approx R_T$  la impedancia de entrada viene expresada por la fracción (30). Encontrar su circuito equivalente es ahora más difícil y se deja como ejercicio de un curso de teoría de circuitos.

### B. Las cargas superficiales

Las ecuaciones (28) en la aproximación CEM son

$$\begin{aligned} a) \quad E_x(z,t) &= R_T - i\omega \mathcal{L}z \frac{I_0 e^{i\omega t}}{d}, \\ b) \quad H_y(z,t) &= \frac{I_0 e^{i\omega t}}{w}. \end{aligned} \quad (33)$$

El salto en la componente normal del campo eléctrico (33a) en las superficies de las placas  $x = -d/2$  y  $x = d/2$ , indica la existencia de una carga superficial  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned} a) \quad \tilde{\sigma} \quad x = -d/2 &= \epsilon_0 \tilde{E}_x \quad x = -d/2, \\ &= \epsilon_0 \left( R_T - i\omega \mathcal{L}z \frac{I_0}{d} \right), \\ b) \quad \tilde{\sigma} \quad x = +d/2 &= -\epsilon_0 \tilde{E}_x \quad x = d/2, \\ &= -\tilde{\sigma} \quad x = -d/2, \end{aligned} \quad (34)$$

En la ecuación (34a) aparecen dos términos para las cargas superficiales, uno de ellas es proporcional a  $\omega$  y a  $z$ , mientras que el otro es independiente de la frecuencia y proporcional a la resistencia  $R_T$ . Estas cargas superficiales son inducidas por el campo eléctrico (33a) y también pueden considerarse como las fuentes de este campo. Sin embargo, la parte de la carga superficial que varía linealmente con  $z$ , crea también un campo eléctrico paralelo al eje  $z$ . Esta componente se cancela exactamente con la componente  $z$  del campo eléctrico creado por las variaciones temporales del campo magnético (ley de Faraday). Esta cancelación se mantuvo oculta en la deducción que nos llevó a las ecuaciones (28) y (34). Para que salgan a la luz se debe trabajar con los potenciales escalar  $\Phi$  y vectorial  $\vec{A}$  asociados a los campos (28). Esto lo haremos en la próxima sección donde analizaremos un sistema similar.

En  $z = 0$ , el campo eléctrico es

$$E_x(z = 0, t) = \frac{I_0 R_T}{d} e^{i\omega t}.$$

Este campo penetra en el interior de la placa resistiva y es el responsable de mantener la corriente sobre la misma. Si la frecuencia es suficientemente baja el campo se distribuye uniformemente en el interior de la placa y en caso contrario se debe tener en cuenta el efecto pelicular eléctrico.

Para el caso CEE se puede hacer un estudio similar.

## VI. LÍNEA DE TRANSMISIÓN RESISTIVA TERMINADA EN UN CORTOCIRCUITO

En esta sección nuestro objetivo es determinar los campos y las cargas superficiales de un circuito similar al de la Fig. 1 pero ahora las dos placas paralelas tienen una resistividad  $\rho$ , espesor  $e$  y están cortocircuitadas por una placa de conductividad infinita (ver Fig. 5). Los circuitos de la Fig. 1 y 5 son en cierto sentido “complementarios” pues se pasa de uno al otro modificando las propiedades de conductor perfecto por resistivo y viceversa. Si la resistencia total de ambos circuitos es la misma sus representaciones con parámetros concentrados, en el régimen CC, son idénticas pero, sin embargo, como veremos los campos y la distribución de cargas superficiales son muy diferentes.

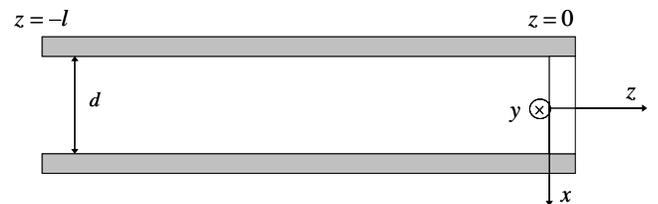


FIGURA 5. Circuito simple formado por dos placas paralelas resistivas conectadas por una placa perfectamente conductora.

$$k = k_0 - i\gamma, \quad (38)$$

## A. Los campos y la impedancia de entrada

Las pérdidas en las placas complica considerablemente el problema de modo que es imposible encontrar una solución analítica exacta de las ecuaciones de Maxwell válida para cualquier frecuencia. Se puede encontrar una solución aproximada si suponemos que la resistencia por unidad de longitud de las placas es pequeña. Vamos a partir de la solución exacta para los campos de un circuito en el que las líneas de transmisión no tienen pérdidas y están cortocircuitadas en  $z=0$ . Si en (27) hacemos  $R_T=0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} a) \quad E_x(z,t) &= -icB_0 \text{sen } kz e^{i\omega t}, \\ b) \quad B_y(z,t) &= B_0 \cos kz e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (35)$$

donde  $B_0 = \mu_0 I_0$  es la densidad de campo magnético.

La ecuación (35a) implica que la densidad de carga superficial en las superficies internas de las placas varía linealmente con  $z$ . Es de esperar, por lo tanto, que estas creen un campo eléctrico paralelo al eje  $z$ . Pero en este caso, se tendría una componente del campo eléctrico tangente a la superficie de la placa que es perfectamente conductora. Vamos a demostrar a continuación que el campo creado por estas cargas superficiales es cancelado exactamente por el campo eléctrico creado por las variaciones temporales del campo magnético (b). Para hacer esta demostración es conveniente trabajar con los potenciales escalar y vectorial de los campos (35):

$$\begin{aligned} a) \quad \Phi &= icB_0 \text{sen } kz e^{i\omega t}, \\ b) \quad A_z &= -xB_0 \cos kz e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (36)$$

A partir de estos potenciales se obtienen los campos (35) y además

$$\begin{aligned} a) \quad E_z^m &= -\frac{\partial A_z}{\partial t} = i\omega xB_0 \cos kz e^{i\omega t}, \\ b) \quad E_z^e &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -ickxB_0 \cos kz e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (37)$$

Observemos que  $E_z^m + E_z^e \equiv 0$  como debe ser para que se satisfagan las condiciones de borde sobre la superficies perfectamente conductoras de las placas.

Si las placas de la línea de transmisión tienen una resistencia pequeña, podemos suponer que los potenciales en el interior de las placas son esencialmente idénticas a (36) excepto para tener en cuenta las pérdidas se debe agregar al número de onda  $k$  una pequeña componente resistiva, esto es

donde  $k_0 = \omega/c$  es el número de onda en ausencia de pérdidas. Si introducimos (38) en (36) se obtiene:

$$\begin{aligned} a) \quad \Phi &= icxB_0 (\text{sen } k_0 z \cos i\gamma z - \cos k_0 z \text{sen } i\gamma z) e^{i\omega t}, \\ b) \quad A_z &= -xB_0 (\cos k_0 z \cos i\gamma z + \text{sen } k_0 z \text{sen } i\gamma z) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (39)$$

Si las pérdidas son pequeñas ( $\gamma l \ll 1$ ) y en bajas frecuencias ( $k_0 l \ll 1$ ) las ecuaciones (39) se reducen a

$$\begin{aligned} \Phi &= icxB_0 k_0 z e^{i\omega t} + \gamma cxzB_0 e^{i\omega t}, \\ A_z &= -xB_0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (40)$$

De estas ecuaciones obtenemos,

$$\begin{aligned} a) \quad E_x &= -i k_0 - i\gamma z c B_0 e^{i\omega t}, \\ b) \quad E_z &= -\gamma xc B_0 e^{i\omega t}, \\ B_y &= B_0 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (41)$$

$$B_y = B_0 e^{i\omega t}. \quad (42)$$

De acuerdo a la clasificación propuesta en [19, 20] esta es la solución CEM. En efecto, la suposición de pérdidas pequeñas es equivalente a suponer que la resistencia del circuito es mucho menor que su impedancia capacitiva y no se tiene en cuenta el campo magnético creado por la corriente de desplazamiento.

Podemos calcular  $\gamma$  a partir de la ley de conservación de energía que se expresa mediante el Teorema de Poynting. Si

$$\vec{S}_m = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^* \quad \text{y} \quad P_d = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^*,$$

son el promedio temporal del vector de Poynting y la potencia media disipada, entonces [20]

$$-\oint_S \text{Re } \vec{S}_m \cdot n dS = \int_V \text{Re } P_d dV. \quad (43)$$

En nuestro caso,

$$\text{Re } \vec{S}_m = -\gamma z c \frac{|B_0|^2}{2\mu_0} \hat{k} + \gamma xc \frac{|B_0|^2}{2\mu_0} \hat{i}.$$

Para el estudio que estamos haciendo elegimos como superficie  $S$  un paralelepípedo con dos caras paralelas al

plano  $yz$  en el espacio exterior a la estructura, que está libre de campos, por lo que la contribución al flujo será cero, dos caras paralelas al plano  $xz$  que tampoco contribuirá al flujo porque la componente  $y$  del vector de Poynting es cero y dos caras paralelas al plano  $xz$ , una en  $z$  y otra en  $z + \Delta z$  que sí contribuyen, obteniéndose

$$-\oint_S \operatorname{Re} \vec{S}_m \cdot n dS = \frac{\gamma c \mu_0 I_0^2 d \Delta z}{2w}. \quad (44)$$

La potencia media que se disipa en cada una de las placas es

$$\operatorname{Re} P_d = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* = \frac{1}{2} \rho |J|^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho I_0^2}{w^2 e^2},$$

donde  $\rho$  es la resistividad y  $we$  la sección de la placa. Por lo tanto

$$\int_V \operatorname{Re} P_d dV = \frac{1}{2} \frac{2\rho I_0^2}{w^2 e^2} we \Delta z. \quad (45)$$

Para simplificar, en el cálculo de la potencia disipada hemos supuesto que la corriente se distribuye uniformemente en toda la sección de la placa, en otras palabras, estamos suponiendo que la frecuencia es lo suficientemente baja como para ignorar el efecto pelicular eléctrico. No obstante, estos resultados podrían extenderse en el límite de altas frecuencias sin ninguna dificultad.

Igualando (44) con (45), obtenemos finalmente

$$\gamma = \frac{2\rho}{weZ_0}. \quad (46)$$

Si reemplazamos (46) en (41a) y (41b) obtenemos:

$$(a) \quad E_x = -i\omega \left( \frac{\mu_0 d}{w} \right) l \frac{I_0 z}{dl} e^{i\omega t} - \left( \frac{2\rho}{we} \right) l \frac{I_0 z}{dl} e^{i\omega t}, \quad (47)$$

$$(b) \quad E_z = -\frac{2\rho I_0}{wed} x e^{i\omega t}.$$

El campo eléctrico tangente a la superficie de la placa superior es

$$E_z(x = -d/2) = \frac{\rho I_0}{we} e^{i\omega t}.$$

Si suponemos que la frecuencia es lo suficientemente pequeña la densidad de corriente y el campo se distribuyen uniformemente en el interior de la chapa, por tanto

$$E_z = \frac{\rho I_0}{we} e^{i\omega t}, \quad -e - d/2 \leq x \leq d/2 + e, \quad (48)$$

Como en esta situación,  $I_0/we$  es la densidad de corriente, la ecuación (48) coincide con el valor que debe tener el campo eléctrico en el interior de las chapas para mantener la corriente de acuerdo a la ley de Ohm. En la placa inferior el campo tiene el mismo módulo y es de signo contrario.

La impedancia de entrada del sistema de la Fig. 4 es

$$Z(-l) = \frac{V(-l)}{I(-l)} = \frac{E_x(-l)d}{H_y(-l)d} = R + i\omega L,$$

donde

$$R = 2 \left( \frac{\rho}{we} \right) l,$$

es la resistencia del circuito y

$$L = \left( \frac{\mu_0 d}{w} \right) l,$$

su autoinductancia. Observemos que la impedancia de entrada del circuito de la Fig. 5 es idéntica a la impedancia de entrada del circuito de la Fig. 1 (cuando las placas perfectamente conductoras están conectadas por una placa resistiva).

### B. Las cargas superficiales

El salto en la componente normal del campo eléctrico en las superficies de las placas  $x = -d/2$  y  $x = d/2$ , indica la existencia de una carga superficial  $\sigma$ ,

$$\begin{aligned} a) \quad \sigma_{x = -d/2} &= \epsilon_0 E_x \quad x = -d/2, \\ &= -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \frac{I_0 z}{w} e^{i\omega t} - \frac{2\epsilon_0 \rho}{we} \frac{I_0}{d} z e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} b) \quad \sigma_{x = +d/2} &= -\epsilon_0 E_x \quad x = d/2, \\ &= -\sigma \quad x = -d/2. \end{aligned}$$

En la ecuación (49a) aparecen dos términos para las cargas superficiales, uno de ellos es proporcional a  $\omega$  y el otro es proporcional a  $\gamma$ . El módulo de cada uno de éstos decrece linealmente con  $z$ , es máxima en  $z = -l$  y es cero en  $z = 0$ . Los campos eléctricos (47a) y (47b) están creados por estas cargas superficiales y también por el campo magnético variable en el tiempo (ley de Faraday). La parte de la carga superficial proporcional a  $\omega$  crea la componente  $x$  del campo eléctrico proporcional a  $\omega$  y una componente a lo largo del eje  $z$  que se cancela con la que crea la variación temporal del campo magnético. La parte de la carga proporcional a  $\rho$ , crea el segundo término de (47a) y la componente  $z$  del campo eléctrico (47b). Esta componente del campo eléctrico penetra en el interior de las placas y es el que mueve los electrones dando lugar a la corriente eléctrica que circula por las mismas. Si la frecuencia es cero

(CC) la carga superficial (49) y el campo eléctrico (45) coinciden con los encontrados en referencia [15].

## VII CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos encontrado las impedancias de estructuras físicas reales que se obtienen conectando placas resistivas y placas perfectamente conductoras. Para algunas de las configuraciones analizadas la determinación de la impedancia del sistema es obvia, sin embargo, mostramos que, en general, esta puede calcularse solamente resolviendo los campos que rodean la estructura. Esta situación es bien conocida en la teoría de antenas donde el cálculo de su impedancia necesita del conocimiento de los campos lejanos para calcular la parte resistiva de la impedancia (la resistencia de radiación) y de los campos cercanos para calcular la parte reactiva. Por este motivo el estudio de las antenas se realiza en el marco de la teoría electromagnética. La incorporación en un curso de electricidad y magnetismo del análisis de los parámetros concentrados que se propone en este trabajo puede ayudar a unir la teoría de circuitos con la teoría de campos de la misma manera que la descripción del comportamiento de un circuito en términos de carga superficial y campo eléctrico sugerida por Chabay y Sherwood. Los dos enfoques están muy relacionados puesto que el conocimiento de los campos que rodean la estructura permite determinar la impedancia del circuito, las cargas superficiales y el rol que éstas juegan en un circuito.

En este trabajo se extienden, al régimen de CA, algunos trabajos previos [8, 16] en los que se calculaban las cargas superficiales y los campos que rodean un circuito simple de CC. En la sección 5 se calculan los campos y las cargas que rodean en CA a un circuito formado por dos chapas resistivas terminadas en un cortocircuito. En particular encontramos que a lo largo de la chapa resistiva se tiene una carga superficial que varía linealmente con  $z$ . Esta carga superficial está compuesta por dos términos, una proporcional a la resistividad de la chapa que crea el campo eléctrico necesario para mantener la corriente a lo largo de la chapa resistiva y la otra proporcional a la frecuencia que crea un campo eléctrico paralelo al eje  $z$  que se cancela exactamente con el campo creado por las variaciones temporales del campo magnético. En el circuito analizado en la sección 4, una línea sin pérdidas terminada en una impedancia resistiva y que ha sido resuelto “exactamente” para cualquier valor de la frecuencia (dentro de las aproximaciones que se realizan en la teoría de líneas de transmisión) no hay cargas superficiales sobre la placa resistiva. El campo eléctrico que mantiene la corriente, en el interior de esta placa, es creado por las cargas superficiales que se distribuyen sobre las placas paralelas perfectamente conductoras. Este resultado muestra que no siempre es el gradiente de cargas superficiales sobre una resistencia quien crea el campo eléctrico necesario para mantener la corriente. Es interesante subrayar que los circuitos analizados en las secciones 4 y 5 tienen en el régimen CEM la misma impedancia de entrada pero la distribución de la carga

superficial sobre los elementos del circuito y los campos que lo rodean son muy diferentes.

Con la metodología que utilizamos en este trabajo se puede extender, al régimen cuasiestático, el estudio de las cargas superficiales y los campos que rodean estructuras algo más complicadas que las aquí utilizadas, como la de dos hilos paralelos, analizada en [5] o la de un cable coaxial, estudiada en [2] en el régimen de CC.

## REFERENCIAS

- [1] Schaefer, C., *Einfuehrung in die theoretische Physik*, (Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 1932).
- [2] Sommerfeld A., *Electrodynamics*, (Academic Press, New York, 1952).
- [3] Heald, M. A., *Electric fields and charges in elementary circuits*, Am. J. Phys. **52**, 522 (1984).
- [4] Aguirregabiria, J. M., Hernandez, A. and Rivas, M., *An example of surface charge distribution on conductors carrying steady currents*, Am. J. Phys., **60**, 138 (1992).
- [5] Assis, A. K. T. y Mania, A. J., *Surface charges and electric fields in a two-wire resistive transmission line*, Rev. Bras. de Ens. de Fís. **21**, 469 (1999).
- [6] Jackson J.D., *Surface charges on circuit wires and resistors play three roles*, Am. J. Physics, **64**, 855 (1996).
- [7] Hernandez, J. A., Assis A. K. T., *The potential, electric field and surface charges for a resistive long straight strip carrying a steady current*, Am. J. Phys. **71**, 938–942 (2003).
- [8] Welti, R., *Las cargas superficiales y el flujo de energía en un circuito simple*, Rev. Bras. de Ens. de Fís. **27**, 577 (2005).
- [9] Preyer, N. W., *Surface charges and fields of simple circuits*, Am. J. Physics **68**, 1002 (2000).
- [10] Jefimenko, O., *Demonstration of the electric fields of current-carrying conductors*, Am. J. Phys. **30**, 19 (1962).
- [11] Haertel, H., *The electric voltage*, in Aspects of understanding electricity: Proceedings of an international conference, edited by R. Duit, W. Jung, and C. von Rhöneck (IPN/Schmidt & Klaunig, Kiel, Germany, 1985).
- [12] Härtel, H., *A qualitative approach to electricity*, Report #IRL87-0001 (Institute for Research on Learning Palo Alto, CA, 1987).
- [13] Chabay, R., Sherwood, B., *Electric and Magnetic Interactions* (Wiley, New York, 1995).
- [14] Drude, P., *Zur Elektronentheorie der metalle*, Annalen der Physik **308**, 566 (1900).
- [15] Galili, I., Goihbarg, E., *Energy transfer in electrical circuits: A qualitative account*, Am. J. Phys. **73**, 141 (2005).
- [16] Matar, M., Welti, R., *Las cargas superficiales y los campos de circuitos simples*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 631–637 (2009).
- [17] Adler, R., Chu, L., Fano, R., *Electromagnetic Energy transmission and Radiation*, (Wiley, New York, 1962).
- [18] Feynman, R., Leighton, R., Sands, M., *Lectures on Physics*, (Wesley, Massachusetts, 1964).
- [19] Larsson, J., *Electromagnetics from a quasistatic perspective*, Am. J. Phys. **75**, 230–239 (2007).

*Maricel Matar, Reinaldo Welti*

[20] Markus, Zahn, *6.013/ESD.013J Electromagnetics and Applications, Fall 2005*. (Massachusetts Institute of

Technology: MIT OpenCourseWare). <http://ocw.mit.edu>  
Consultado el 26 de marzo de 2010.