O ensino do conceito centro de massa nos cursos de graduação

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

Jonas Cegelka da Silva, **Pablo Pedreira Pedra**
Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil.

E-mail: jonasdaninha@hotmail.com; pabloufs@gmail.com

(Received 4 July 2011, accepted 12 September 2011)

Resumo
O ensino do conceito físico de centro de massa nos cursos de graduação das ciências exatas e das engenharias, trabalhado nas disciplinas de cálculo e física geral é dado com enfoque bastante matemático e prioriza a determinação de tal ponto a partir de valores e/ou equações dadas prontas nos livros didáticos. Buscar exemplos ilustrativos e debater sobre os modelos que conduzem aos valores do centro de massa das figuras são idéias que o professor pode usar, as quais motivam o aluno e favorecem o ensino-aprendizagem. Neste trabalho, apresentamos algumas discussões acerca das metodologias de ensino nos cursos de cálculo e física geral, bem como da definição do centro de massa. Como exemplos, foram utilizadas figuras planas com densidade constante em forma de círculo e algumas divisões.

Palavras-Chaves: Centro de Massa; Figuras Planas com Densidade Constante; Ensino-aprendizagem.

Abstract
The teaching of the physical concept of center of mass in the undergraduate the exact sciences and engineering, worked in the disciplines of calculus and general physics is usually given with enough focus mathematical and prioritizes the determination of the point from values and/or equations given ready in textbooks. Search illustrative examples and discuss about the models that lead to the values of the mass center of the figures are ideas that the teacher can use, which motivate the student and favoring the teaching and learning. In this work, we present some discussions about the teaching methodologies of courses in calculus and general physics, as well as the definition of center of mass. Plane figures with constant density in the form of circle and some divisions were used as examples.

Keywords: Center of Mass; Plane Figures with Constant Density; Teaching and Learning.

PACS: 01.40.-d, 01.40.Fk **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUÇÃO

Muito se tem de cálculo diferencial e integral durante um curso de graduação nas áreas de ciências exatas e engenharias, mas na maioria das vezes, as definições e aplicações das ferramentas matemáticas desenvolvidas nestes componentes são ignoradas em função da multiplicidade de conceitos e técnicas que precisam ser trabalhados. Resolvem-se muitas derivadas e integrais definidas e indefinidas, mas com pouca ou até mesmo nenhuma aplicação cotidiana, ficando restrito ao aluno a prática de identificar e memorizar, em tabelas e/ou em livros citados pelos professores, o resultado desejado.

Também nas aulas de Física Geral este conceito não é bastante explorado. Muitas vezes, basta que o aluno saiba a expressão para o centro de massa de um corpo, mesmo que, para isto, ele precise apenas aplicar a técnica de memorização. As atividades experimentais que facilitam a elucidação deste conceito e que poderiam serem feitas no início dos cursos de graduação quase sempre são omitidas ou por falta de tempo ou por falta de motivação por parte dos professores e/ou dos alunos.

Quase sempre as aulas das disciplinas de cálculo e física geral são bastante expositivas, sendo que o centro do processo ensino-aprendizagem está no professor, que deve transmitir os conhecimentos ao aluno, de forma que os conteúdos são apresentados prontos e acabados. Além disso, a grande quantidade de matéria a ser exposta faz com que a aula siga um ritmo acelerado, havendo pouco espaço para o aluno pensar [1].

Como conseqüência disso, o professor desenvolve seu trabalho de forma linear, ou seja, acaba não refletindo sobre quais são suas intencionalidades ou sobre o que a sua ação mostra aos estudantes. As crenças sobre ensinar e aprender só podem ser descobertas se o professor comprometer-se a uma análise sistemática de sua prática de ensino habitual [2].

Esta metodologia de ensino, aliada a outros fatores, como o despreparo dos alunos ingressantes nos cursos superiores, a falta de motivação por parte dos professores, imensas listas de questões a serem respondidas, entre outros, colocam as disciplinas de cálculo como sendo os mais difíceis nas áreas das exatas ou das engenharias, o que sugere que é preciso repensar ações pedagógicas que conduzam a uma melhoria neste cenário que persiste, há muito tempo [3].

Dessa forma, é preciso buscar exemplos ilustrativos para fazer com que os alunos adquiram uma idéia tanto intuitiva quanto determinística dos conceitos trabalhados. Um dos primeiros conceitos desenvolvidos, por exemplo, a definição de derivada, não terá sentido algum para o aluno, se não for consubstanciada com as redes de significações deste conceito com a geometria e com a física. Não são as idéias de velocidade e coeficiente angular, interpretações do conceito de derivada, mas, ao contrário, são elas, efetivamente, as idéias geradoras e construtoras do campo semântico da noção de derivada [4].

Ao aluno, é necessário saber identificar o centro de massa das figuras, mesmo que, para isto, como já discutido, ele precise utilizar-se de fórmulas prontas obtidas no final dos livros. Percebe-se, no entanto, que o conceito físico do centro de massa e até mesmo as deduções das equações utilizadas são pouco discutidos, uma vez que o enfoque é bastante direto na determinação de tal ponto.

O centro de massa, muitas vezes chamado de centróide, tem associado a ele um ponto privilegiado no espaço. No caso de corpos rígidos, é conveniente localizá-lo no referencial do próprio corpo, para que não dependa da posição do corpo no espaço, o que complicaria o problema. No entanto, no cálculo do centro de massa de um conjunto discreto de corpos, determina-se o centro de massa de cada corpo e, por fim, faz-se o tratamento considerando todos os corpos.

A definição para corpo rígido é como aquele que não se deforma, ou seja, qualquer corpo cujas partes não mudam de posição relativa entre si enquanto o corpo está parado ou enquanto se desloca em relação a outros corpos [5]. As forças que atuam em corpos rígidos podem ser classificadas em forças exteriores, que representam a ação de outros corpos sobre o corpo em consideração, as quais provocam movimento ou asseguram o repouso do mesmo e as forças internas, as quais mantêm unidos todos os elementos que formam o corpo [6].

Nosso objetivo com a elaboração deste trabalho é discutir sobre o ensino do centro de massa praticado nos cursos de graduação das ciências exatas, a partir da nossa experiência enquanto alunos. Também, com o intuito de mostrar de forma simples, como se pode encontrar o centro de massa de algumas figuras planas com densidade constante, como um semicírculo e também um quarto de círculo. A resolução das integrais não é feita aqui pelo fato de estarmos mais interessados na discussão de argumentos matemáticos para a obtenção do centro de massa e não na resolução das equações que as define. Os resultados dessas integrais podem ser encontrados em formulários de livros de cálculo.

II. O CENTRO DE MASSA

Muitas vezes os conceitos de centro de massa e de centro de gravidade, muitas vezes são tratados como se estivessem referindo-se ao mesmo ponto de um corpo rígido, o que nem sempre é verdade. Há grande dificuldade, principalmente para aqueles alunos que estão iniciando um curso superior, em diferenciar estes dois pontos.

O centro de gravidade leva em consideração a aceleração gravitacional a qual o corpo experimenta, enquanto que o centro de massa é uma característica própria de cada corpo, considerando fatores como tamanho, dimensões, massa, densidade, entre outros. Em outras palavras, a aceleração gravitacional diminui com o aumento da altitude, no entanto, se desprezarmos essas variações no eixo vertical do corpo, o centro de massa coincide com o centro de gravidade.

Para um determinado corpo, o seu centro de massa é definido como uma posição média de todas as massas que o constituem, ou seja, se apoiarmos um corpo plano, com densidade constante, sobre uma haste rígida, ele permanecerá na posição de equilíbrio desde que a extremidade da haste coincida exatamente com o centro de massa do corpo. O equilíbrio é considerado como sendo a falta de movimento em relação a terra, ou seja, todas as partes de um corpo em equilíbrio permanecem paradas em relação a terra, não se aproximando nem se afastando dela e nem deslocando-se horizontalmente em relação a ela [5].

Utilizar-se de argumentos de simetria para o entendimento e a localização do centro de massa de figuras planas é uma importante ferramenta que o aluno tem. Se o aluno conseguir entender que o centro de massa de um círculo uniforme em toda sua área é exatamente o seu centro, ele conseguirá entender que o centro de uma esfera com densidade constante em seu volume é também o seu centro de massa. É evidente que para figuras com densidades diferentes em sua extensão, não é tão claro assim para o aluno identificar qual é o seu centróide.

É importante ressaltar que as definições de simetrias em problemas de centro de massa são válidas apenas para corpos que apresentem uma densidade constante, seja qual for a dimensão considerada (1, 2 ou 3, correspondendo, respectivamente, a comprimento, à área e a volume).

- Se um corpo for simétrico em relação a dois planos, o seu centro de massa estará na linha de intersecção dos planos;
- Se um corpo for simétrico em relação a um eixo, o seu centro de massa estará neste eixo;
- Se um corpo for simétrico em relação a três planos que têm um ponto em comum, este ponto será seu centro de massa;
- Se um corpo tiver simetria esférica em relação a um ponto, este ponto será seu centro de massa [7].

Para figuras planas simétricas como uma chapa quadrada ou circular, o centro de massa coincide com o centro geométrico da figura se ambas tiverem uma densidade constante em toda sua área. Para figuras simétricas tridimensionais, como em esferas ou cilindros, por exemplo, a mesma definição é válida, ou seja, se um sistema de pontos materiais admite um elemento de simetria, então o centro de massa do sistema pertence a esse elemento. O elemento de simetria pode ser um ponto, um eixo ou um plano [8].

A definição matemática para o centro de massa é feita considerando um sistema de *n* partículas pontuais de massa m_i, cujas posições, em relação a um referencial inercial, podem ser representadas pelos vetores posição $\boldsymbol{r}_i$. Para um sistema de massas discreto, o centro de massa do sistema pode ser calculado através da Eq. (1), sendo que *i* representa a i-ésima partícula, isto é, a posição do centro de massa de um sistema de *n* partículas.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_4} = \frac{\sum_i^n m_i\vec{r}_i}{\sum_i^n m_i}. \qquad (1)$$

Interpretando fisicamente o centro de massa, podemos dizer que este ponto é onde se supõe concentrada toda a massa do sistema, ou seja, o centro de massa de um corpo rígido é o ponto tal que, se imaginarmos o corpo suspenso por este ponto e com liberdade para girar ao redor dele, o corpo assim sustentado permanecerá em repouso, qualquer que seja a orientação do corpo em relação a terra [9]. Outra definição de centro de massa é que ele é um ponto cuja localização depende da geometria de um corpo ou de um sistema de partículas e que se comporta como se toda a massa inercial do corpo nele estivesse concentrada, de modo que, quando há forças externas atuando sobre o corpo, a resultante é aplicada sobre esse ponto [10].

A determinação experimental do centro de massa, além de trazer resultados rápidos, propicia um entendimento visual aos alunos, uma vez que pode ser considerado algo ‘palpável’. Usando argumentos físicos, facilmente encontramos o centro de massa suspendendo o objeto por um ponto, de forma que o mesmo fique livre para girar. No equilíbrio, traça-se uma reta perpendicular ao solo, passando pelo ponto de apoio. Suspendendo o objeto por outro ponto e realizando o mesmo procedimento, teremos outra reta traçada. A intersecção das duas retas indicará a posição do centro de massa do objeto em relação ao solo. Isto é explícito em [5] da forma em que todo corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio tal que o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estejam ao longo de uma mesma linha vertical.

Em um corpo sólido, para o qual existe uma distribuição contínua de massas, o somatório indicado em (1) deve ser substituído por integrais, como dado pelas Eqs. 2 e 3, sendo que x_c e y_c representam a posição no eixo *x* e *y*, respectivamente, da posição do centro de massa.

$$x_c = \frac{\iint x\,dxdy}{\iint dxdy}, \qquad (2)$$

$$y_c = \frac{\iint y\,dxdy}{\iint dxdy}. \qquad (3)$$

III. CÁLCULO DO CENTRO DE MASSA DE UM CÍRCULO E ALGUMAS DE SUAS SUBDIVISÕES

A equação cartesiana que descreve uma circunferência com centro na origem, em coordenadas cartesianas é dada pela Eq. 4, com *r* sendo o raio da circunferência. Usa-se o termo circunferência por utilizarem-se, nos limites de integração, os valores formados pelos limites desta curva, enquanto que o círculo considerado é a região preenchida, cujo contorno é conhecido como circunferência.

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (4)$$

Na resolução das integrais (2) e (3), os limites de integração para ambas as variáveis serão dados pela curva que limita a circunferência de (4) e, cujo gráfico está mostrado na Fig. 1.

Como já dito, por argumentos de simetria e também utilizando métodos experimentais simples, torna-se claro ao aluno a localização do centro de massa de um círculo com densidade constante centrado na origem, sendo que este ponto é a origem dos eixos cartesianos. Deslocando esta figura para qualquer posição dos eixos cartesianos, o aluno deve estar ciente que as coordenadas do centro de massa deverão acompanhar este deslocamento, mas sua projeção nos eixos deve ser feita sempre a partir do seu centro geométrico, uma vez que este ponto coincide com o centro de massa. Para elucidar este fato, a atividade de suspender um círculo sobre uma haste rígida pode ser realizada.

Como o entendimento da localização do centro de massa de um círculo completo é bastante fácil utilizando argumentos de simetria, discutiremos com mais detalhes matemáticos a determinação deste ponto em um semicírculo, ou seja, apenas a parte com *y* positivo da Fig. 1 (figura obtida no software *Graphmatica* e editado com ferramentas de desenho) será considerada.

Uma primeira resposta dos alunos sobre a localização do centro de massa do semicírculo seria dizer que tanto a coordenada *x* quanto a coordenada *y* seria a metade do valor do seu eixo correspondente. Não é difícil convencê-los que a coordenada *y* não tem esta localização, e sim uma posição abaixo da metade do valor de seu eixo, uma vez que a quantidade de massa da figura é maior quando se aproxima do eixo *x*.

Como na Eq. 2 o primeiro integrando é em relação a *x*, escrevemos a equação cartesiana da circunferência em função de y, de forma a obtermos a Eq. 5. Este procedimento é feito com o intuito de encontrarmos os valores dos limites das integrais que precisam ser calculadas.

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}. \qquad (5)$$

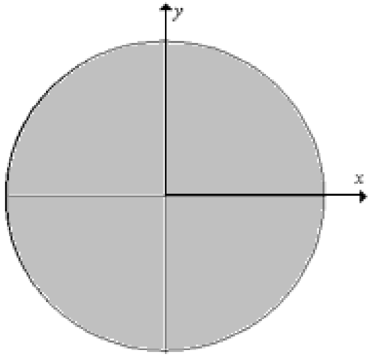

FIGURA 1. Gráfico de círculo centrado na origem.

Visualizando a Fig. 1 e considerando a Eq. 5, conclui-se que os limites de integração para a variável *x* são dados por $\pm\sqrt{r^2-y^2}$, ou seja, traçando retas paralelas no sentido crescente deste eixo, as mesmas interceptam primeiro a parte negativa de (5) e depois a parte positiva ou, visto de outra maneira, entram na parte negativa e saem na parte positiva, conforme pode ser visto na Fig. 2. Já os limites de integração para a variável *y* são zero e *r*, da mesma forma que fora associado aos limites para a variável *x*, no entanto neste caso, as retas são dirigidas no sentido de *y* crescente, paralelamente a este eixo.

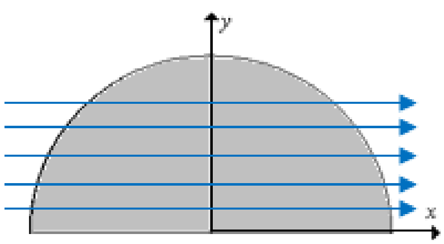

FIGURA 2. Ilustração da obtenção dos limites de integração para a variável *x* de um semicírculo.

Substituindo estes limites de integração em (2) e (3) obtemos as integrais genéricas, dadas pelas Eqs. 6 e 7 que devem ser resolvidas para a obtenção do centro de massa do semicírculo. Apenas a ponto de debate, se quisermos calcular o centro de massa do círculo completo centrado na origem, basta considerarmos os limites de integração entre $\pm r$ para a variável y.

$$x_c = \frac{\int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-y_2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} x dxdy}{\int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dxdy}, \qquad (6)$$

$$y_c = \frac{\int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-y_2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} y dxdy}{\int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} dxdy}. \qquad (7)$$

Utilizando métodos de resolução das integrais em (6) e (7), os quais não apresentam grandes dificuldades pelo fato de serem tabelados ou demonstrados nos livros, encontramos que os valores das coordenadas do centro de massa de um semicírculo com densidade constante centrado na origem dos eixos cartesianos são dados pela Eq. 8. Com isso, é possível a obtenção dos valores do centro de massa de todo e qualquer semicírculo com as características descritas, conhecendo-se apenas o valor do seu raio.

$$(x_c, y_c) = (0, 4r/3\pi). \qquad (8)$$

Fazendo translações tanto verticais quanto horizontais no plano cartesiano, de forma a deslocar este semicírculo da origem dos eixos, é fácil convencer os alunos utilizando argumentos de geometria, que os valores de (8) serão acrescidos do deslocamento sofrido pelo centro de massa em relação a origem dos eixos. Como exemplo, tem-se a Fig. 3, obtida com o *Graphmatica*. Nesta figura, o semicírculo delimitado pela circunferência de raio 2 foi deslocado de três unidades abaixo do eixo *x* e de cinco unidades à direita do eixo *y*. Nesta configuração, as coordenadas do centro de massa da figura são dadas por $(x_c, y_c) = (5, -2.15)$, cujos valores são a projeção do ponto nos eixos cartesianos. Se o semicírculo de raio 2 fosse centrado na origem, as coordenadas do seu centro de massa seriam dadas por $(x_c, y_c) = (0{,}0.85)$.

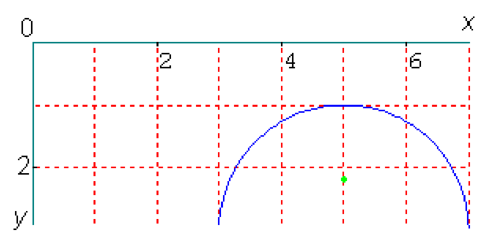

FIGURA 3. Localização do centro de massa de um semicírculo deslocado da origem nos eixos cartesianos.

Procedimentos análogos aos discutidos para o semicírculo serão feitos para a divisão de um quarto de círculo. Para este caso, a região a ser considerada é apenas o primeiro quadrante da Fig. 1, como mostrado na Fig. 2.

Observando a figura, perceber que os limites da integral para a variável *x* são *x* = 0 e $x = +\sqrt{r^2-y^2}$, ou seja, traçando retas paralelas no sentido do eixo *x* crescente, as mesmas entram na reta *x* = 0 da figura, e saem na parte positiva da curva delimitada pela circunferência. Já para a variável y, da mesma forma que foi feito para o cálculo do centro de massa de um semicírculo, os limites de integração variam de $y = 0$ até $y = r$, uma vez que, se traçarmos retas dirigidas no sentido crescente e paralelas a este eixo, as mesmas atravessam a figura na reta $y = 0$ saindo em $y = r$.

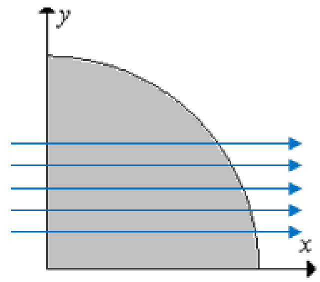

FIGURA 4. Gráfico de ¼ de círculo centrado na origem.

Com estes limites definidos, as integrais que devem ser resolvidas para a obtenção do centro de massa de um quarto de círculo com densidade constante centrado na origem são dadas pelas Eqs. 9 e 10.

$$x_c = \frac{\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} x dx dy}{\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx dy}, \tag{9}$$

$$y_c = \frac{\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y dx dy}{\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx dy}. \tag{10}$$

Aplicando métodos de integração, obtemos que o valor das coordenadas do centro de massa da figura é dado pela Eq. 11, com r sendo o raio do círculo.

$$(x_c, y_c) = (4r/3\pi\, , 4r/3\pi). \tag{11}$$

Este ponto, nos eixos cartesianos, está localizado sobre a bissetriz do primeiro quadrante, uma vez que as duas componentes possuem o mesmo valor. Novamente o aluno poderia pensar que o centro de massa da figura em questão seria metade do valor do raio, o que, da mesma forma que para o caso do semicírculo, é equivocado. Os mesmos argumentos de translação feitos anteriormente podem ser feitos aqui, de modo que o aluno compreenda que o ponto do centro de massa de cada figura é uma característica intrínseca da figura, modificado apenas pelos valores que a mesma for transladada em relação a origem dos eixos cartesianos.

IV. CONCLUSÕES

Muitas vezes a simples interpretação do resultado faz muito mais sentido para o aluno do que a sua demonstração [4]. A interpretação dos resultados discutidos acerca da simetria das figuras planas discutidas no texto permite aos alunos a expansão do conhecimento para figuras tridimensionais, utilizando, para isto, os mesmos argumentos teóricos e matemáticos desenvolvidos.

Os valores obtidos genericamente para o centro de massa das figuras escolhidas coincidem com os valores tabelados nos livros, o que mostra que, apesar da simplicidade do arcabouço matemático envolvido, unindo a matemática com a discussão física, é muito mais fácil para o aluno aprender os caminhos que conduzem até a resposta, ao invés de acabar simplesmente memorizando o resultado.

REFERÊNCIAS

[1] Franchi, R., *Curso de Cálculo: Uma proposta alternativa*, Temas e Debates, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática **6**, 39-43 (1995).

[2] Núñez, I. B., *et al*., *As teorias implícitas sobre a aprendizagem de professores que ensinam Ciências Naturais e futuros professores em formação: A formação faz diferença?*, Ciências e Cognição **14**, 39-61 (2009).

[3] Palis, G., *Computadores em Cálculo: uma alternativa que não de justifica por si mesma*, Temas e Debates, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo **6**, 22-38 (1995).

[4] Wanderley, M. R., *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*, Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 29 a 1º de novembro de 2003, Santos.

[5] Koch, T. A. A., *Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca*, 1ª Ed. (Apeiron, Montreau, 2008).

[6] Beer, F., Russell, J. J., *Mecânica vetorial para engenheiros: Estática.* 5a Ed. (Pearson Education do Brazil, São Paulo, 1994).

[7] Symon, K. R., Tradução de Batista, Gilson Brand, *Mecânica*, (Campus, Rio de Janeiro, 1996).

[8] Ramalho, J. F., Ferraro, N. G., Soares, P. A. de T., *Os fundamentos da Física 1 – Mecânica*, 8ª Ed. (Moderna, São Paulo, 2005).

[9] Assis, A. K., Ravanelli, F., *Reflexões sobre o conceito de centro de gravidade nos livros didáticos*, Ciência & Ensino **2**(2), 1-11 (2008).

[10] Roditi, I., *Dicionário Houaiss: Física*, 1a Ed. (Objetiva, Rio de Janeiro, 2005).

[11] Leithold, L., *O cálculo com geometria analítica*, 3a Ed. (Harba & Row do Brasil, São Paulo, 1977).