Óptica relativista y geometría no euclídea

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

Rafael Andrés Alemañ Berenguer[1, 2]
[1]Departamento de Ciencia de Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica. Universidad Miguel Hernández, Avda. Universidad, s/n. Edif. Torrevaillo - 03202l - Elche (Alicante – España).
[2]Sociedad Astronómica de Alicante (Grupo de gravitación y mecánica celeste), Apartado de Correos 616, 03080-Alicante (España).

E-mail: agrupación.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 8 de Junio de 2011; aceptado el 23 de Agosto de 2011)

Resumen
En este artículo se expone una introducción básica al uso de coordenadas generalizadas en la óptica relativista para expresar enunciados típicos como el principio de Fermat, o la condición de geodésica nula, que determina la línea de universo de un rayo de luz en el espacio-tiempo tetradimensional de la relatividad. Los resultados de emplear tales métodos geométricos no euclídeos pueden imitarse suponiendo la presencia de un medio de propagación de la luz caracterizado por un índice de refracción efectivo que, en el caso de gravitación débil, sería de naturaleza tensorial.

Palabras clave: Óptica relativista, geometría no euclídea, principio de Fermat, geodésicas nulas.

Abstract
This paper presents a basic introduction to the use of generalized coordinates in relativistic optics in order to express typical statements as Fermat's principle, or the null-geodesic condition, which determines the world-line of a light ray in the four-dimensional relativistic space-time. The results of using such non-Euclidean geometric methods can be replicated by assuming the presence of a medium characterized by an effective refractive index, which, inside a weak gravitation field, would be of tensorial nature.

Keywords: Relativistic optics, non-Euclidean geometry, Fermat's principle, null geodesics.

PACS: 02.40.Ky, 03.30.+p, 78.20.Ci, 04.25.Nx. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Existen numerosos trabajos relacionados con el comportamiento de los campos electromagnéticos en el espacio-tiempo relativista, bien sea en la relatividad especial o bien en la relatividad general. Sin embargo, no abundan tanto los tratamientos específicamente ópticos de la luz en el marco relativista, en los cuales se atienda tanto a la geometría de los rayos de luz como al origen de sus trayectorias deducido de las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell bajo las pertinentes condiciones de contorno. En tales consideraciones no puede omitirse el importante papel del índice de refracción ni su naturaleza generalmente tensorial, que suele quedar oculta en las presentaciones usuales circunscritas a medios de propagación homogéneos e isótropos.

Debido a sus potenciales aplicaciones tecnológicas y a sus posibles repercusiones en otras áreas de la ciencia, una de las líneas de investigación más prometedoras en este campo concierne a las relaciones entre la óptica y la geometría no euclídea usual en relatividad. En concreto, se trata de analizar la utilidad de las ideas geométricas empleadas en las teorías relativistas para el estudio de la propagación de la luz –o, en general, de las ondas electromagnéticas– en un medio de propagación cualquiera, ya sea el vacio o un material con propiedades particulares. En este último caso, se abre la puerta a la posibilidad de crear materiales ópticos que generen localmente geometrías artificiales para la luz, y que tales geometrías sean finalmente explotadas en el diseño de dispositivos ópticos.

La existencia de profundos vínculos entre la óptica y la geometría no es un descubrimiento novedoso en absoluto. Comenzó en 1662 –si no antes– con el principio de minimización del camino óptico formulado por el francés Pierre Fermat [1], anticipado en parte casi un milenio antes por el árabe Ibn al-Haytham [2], e inspirado por las reflexiones previas de Herón de Alejandría. De acuerdo con la versión actual del principio de Fermat, la luz sigue en un medio de propagación la trayectoria cuyo camino óptico alcanza un valor extremo (máximo o mínimo). A su vez, la noción de camino óptico se define mediante el índice de refracción del medio en el cual se transmita la luz [3].

Esto significa de hecho que un medio óptico particular establece una determinada geometría con respecto al tránsito de la luz, en el sentido de que prescribe trayectorias no siempre iguales a las que recorrería el rayo luminoso en el vacío (el cual consideramos dotado de las habituales propiedades geométricas euclídeas). Y, como sabemos, la relatividad especial se sirve de una geometría no euclídea –la minkowskiana– en tanto la relatividad general ha venido desarrollando poderosas herramientas teóricas para el estudio de los procesos físicos en variedades espacio-temporales curvas [4, 5, 6].

Durante la década de 1920 se comprobó que los medios isotrópicos en movimiento actúan ante los campos electromagnéticos como si se impusiesen ciertas geometrías espacio-temporales efectivas de tipo no euclídeo [7]. Más tarde otros investigadores generalizaron esta formulación geométrica a los medios anisotrópicos, e investigaron la óptica de la luz sobre geometrías con curvatura no nula [8]. Hubo de esperarse hasta 1960 para que se dilucidasen los efectos electromagnéticos de las geometrías con curvatura sobre las ecuaciones constitutivas de los medios materiales [9]. De todos estos trabajos se deducía que los campos electromagnéticos perciben los medios de propagación como geometrías efectivas impuestas sobre una cierta región del espacio-tiempo [10]. Y a la inversa, los efectos sobre la transmisión de la luz de la geometría curva en la relatividad general suelen imaginarse metafóricamente como si estuviesen provocados por la presencia de un medio con un cierto índice de refracción expresado tensorialmente.

Aunque un desarrollo exhaustivo de este tema excedería los límites de un solo artículo, en el presente trabajo se expone una sucinta introducción que se espera sea de utilidad para una posterior profundización en la bibliografía especializada. En el segundo apartado se aborda la relación que existe entre las geodésicas nulas y el principio de Fermat, lo que da paso en el apartado tercero a tratar el caso de la óptica geométrica en un espacio-tiempo minkowskiano. El cuarto apartado se ocupa de la interpretación geométrica de las geodésicas nulas, facilitando la deducción en el apartado quinto de la geometría de los rayos luminosos en una métrica relativista especial estacionaria como combinación del principio de Fermat con la condición de geodésicas nulas. El sexto epígrafe examina el comportamiento de la luz en una geometría no euclídea como si fuese originado por la presencia de un medio transmisor con un índice de refracción efectivo, y finalmente el apartado séptimo discute brevemente la naturaleza tensorial de un índice de refracción como el del apartado previo en un régimen de campos gravitatorios débiles. Las conclusiones y las referencias correspondientes cierran el presente trabajo.

II. GEODÉSICAS NULAS Y PRINCIPIO DE FERMAT

Para el caso de una variedad tetradimensional V_4 equipada en el caso más general con una métrica no euclídea cuyo elemento de línea es *ds*, las curvas geodésicas vienen dadas por la condición variacional $\delta\int ds = 0$, de la que se deducen las bien conocidas ecuaciones diferenciales

$$\ddot{x}_i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k = 0, \qquad (1)$$

donde el punto sobre las variables indica derivación con respecto a *s*. En este caso, y en lo sucesivo, se utiliza el criterio simbólico según el cual las coordenadas x_i no son en sí mismas ni covariantes ni contravariantes, de modo que el subíndice es meramente denotativo. El convenio de suma sobre índices repetidos, por su parte, se mantiene como suele ser común en el cálculo tensorial.

En una geometría de Riemann la métrica *ds* es definida positiva, lo que asegura que no surgirán problemas al tomar su integral y aplicarle métodos variacionales [11]. Pero cuando pasamos a una geometría pseudo-riemanniana, como suele ser el caso en las teorías relativistas, *ds* se hace indefinida y puede darse la circunstancia de que se anule. Tendríamos entonces una geodésica nula, $ds = 0$. En tal situación ya no cabe deducir la ecuación de la geodésica mediante las variaciones de la integral de *ds*, puesto que los métodos variacionales comunes presuponen que *s* opera como variable independiente, excluyendo con ello la posibilidad de de que la diferencial *ds* sea idénticamente nula.

No obstante, existe una opción alternativa que nos permite obtener las ecuaciones diferenciales de las geodésicas nulas en una variedad pseudo-riemanniana [12]. Recordando que para una masa unitaria, a partir del concepto de energía cinética, tenemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k, \qquad (2)$$

donde ahora τ es, en principio, un parámetro arbitrario escogido de modo que las variables *x* pueden considerarse funciones de τ. A partir de ello, las ecuaciones lagrangianas adoptarían la forma

$$\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{x}_i}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2\right] = 0, \qquad (3)$$

de donde cabe obtener las ecuaciones de las geodésicas nulas bajo la condición de una completa regularidad analítica.

Por otra parte, sabemos que en un medio homogéneo transparente la luz se propaga en línea recta con una velocidad que, en un medio isotrópico, no depende de la dirección y es por tanto una constante característica del medio en cuestión.

Si en lugar de ello tenemos un medio heterogéneo también isotrópico, en donde el índice de refracción *n* (definido como el inverso de la velocidad de propagación, $1/v$, considerando $c = 1$) depende de la posición, los rayos de luz en lugar de transmitirse en línea recta se desvían de acuerdo con una ley que depende de la forma en que varía *n*; es decir, de la forma concreta de la función $n(x, y, z)$.

Como sabemos, este comportamiento es susceptible de expresarse con gran concisión en el caso de un rayo de luz que transita entre dos puntos fijos. Tomando los puntos *A* y *B* como inicio y final respectivamente, el tiempo *t* empleado por la luz para transmitirse de uno a otro a lo largo de una trayectoria *s*, viene dado por la integral.

$$t = \int_A^B n ds. \tag{4}$$

En la práctica, el camino recorrido físicamente por la luz es el que hace mínima la integral (4), y por tanto satisface la condición $\delta t = 0$. Este es precisamente el llamado "Principio de Fermat", que tomado como axioma permite deducir la práctica totalidad de los teoremas de la óptica geométrica [13].

III. ÓPTICA GEOMÉTRICA Y RELATIVIDAD

En la óptica geométrica, tal como se entendía hasta el advenimiento de la relatividad especial, se aceptaba la completa validez de las leyes de la mecánica newtoniana y, en particular, la existencia de un referencial en reposo absoluto, físicamente expresado suponiendo la existencia de un hipotético medio transmisor de la luz, el "éter cósmico".

Así, el supuesto éter constituía el soporte físico de todos los fenómenos ópticos, a la vez que dotaba de significado la afirmación de que ciertos ejes de un sistema de referencia se hallaban en reposo absoluto, es decir, en reposo con respecto al éter. En ese sentido, la velocidad de la luz *c* en el vacío era la velocidad medida por un observador genérico *O* en reposo con respecto al éter.

Consideremos ahora un cierto objeto *C* que nos sirva como referencial, en movimiento de traslación uniforme y rectilíneo con velocidad *h*, así como un haz de luz que se propaga paralelamente y en el mismo sentido que el desplazamiento de *C*. De acuerdo con la cinemática clásica para un observador *O* inmóvil en relación al éter la velocidad de la luz sigue siendo *c*, pero para un observador *O′* en reposo con respecto a *C*, la velocidad de la luz habría de ser $c - h$. El hecho empírico de que en ambos casos la velocidad de la luz sea *c*, impone una modificación de las ecuaciones del movimiento, sometidas a su vez a unas nuevas transformaciones de coordenadas (las transformaciones de Lorentz).

Junto con la mencionada invariancia de la velocidad de la luz en distintos sistemas inerciales, las leyes típicas de la óptica geométrica (transmisión rectilínea de la luz, con velocidad uniforme *c* en medios homogéneos e isótropos), preservarán su validez si suponemos que para la propagación de un rayo luminoso, al igual que con las partículas materiales libres, se cumple la igualdad $\delta\int ds = 0$, sujeta a la condición $(ds)^2 = 0$. Estos requerimientos conducen, en el marco de la relatividad especial, a la bien conocida métrica de Minkowski [14]:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{5}$$

Adoptando por comodidad la convención $c = 1$, consideremos una dirección cualquiera en la variedad tetradimensional pseudo-riemanniana V_4 de la relatividad especial. Ello se consigue escogiendo un punto de la misma (t, x_1, x_2, x_3) y tomando a continuación unos incrementos cualesquiera de dichas coordenadas (dt, dx_1, dx_2, dx_3). De ese modo se puede construir un vector *u* cuyo elemento de línea tendrá una parte puramente espacial dada por

$$dl^2 = -\sum_1^3 g_{ik} dx_i\, dx_k = \sum_1^3 a_{ik} dx_i\, dx_k, \tag{6}$$

que se define sobre el espacio tangente al punto elegido.

También para la parte espacial de la métrica definimos los cocientes

$$\frac{dx_i}{dl} = \dot{x}_i, \tag{7}$$

los cuales se pueden reescribir como $(dx_i/dl)(dl/dt)$. Ya que el factor (dx_i/dl) proporciona la dirección del vector *u*, se deduce que el factor (dl/dt) corresponde a su longitud. Por ello, a partir de la igualdad (6) obtenemos

$$u^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \sum_1^3 a_{ik}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_k. \tag{8}$$

Otro vector *w*, función únicamente de la posición y del tiempo (o tan solo de la posición en condiciones estacionarias) puede construirse a partir de los tres coeficientes g_{0i}, que resultan covariantes frente a cualesquiera transformaciones de las coordenadas espaciales solas. Por un procedimiento análogo al que nos condujo a las ecuaciones (8), tendríamos ahora

$$w^2 = \sum_1^3 a^{ik}\, g_{0i}\, g_{0k}. \tag{9}$$

Y aprovechando la analogía con el vector *u*, inferimos que *w* corresponde a la longitud del vector, y cuando $w > 0$ los cocientes g_{0i}/w serán los momentos (cantidades recíprocas de unos ciertos parámetros) de su dirección.

Es de notar que si las coordenadas *x* tienen dimensiones de longitud (como sería lógico si forman la parte espacial de la métrica), los coeficientes a_{ik} y sus recíprocos a^{ik} son números puros. Por el contrario, g_{0i} tienen dimensiones de velocidad, lo que permite interpretar *w*, igual que *u*, como una velocidad. Estas consideraciones conservarían su validez cualesquiera que fuesen las dimensiones de x_1, x_2, x_3, con la salvedad de que entonces obtendríamos velocidades generalizadas.

IV. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS GEODÉSICAS NULAS

Si ϕ denota el ángulo entre *u* y *w*, suponiendo por el momento que ambos son distintos de cero, de la métrica (8) se deduciría

$$cos\phi = \sum_1^3 \frac{g_{0i}}{w}\frac{\dot{x}_i}{u}. \qquad (10)$$

Y de ello obtendríamos idénticamente

$$uwcos\phi = \sum_1^3 g_{oi}\,\dot{x}_i, \qquad (11)$$

que es una igualdad válida incluso aunque u o w se anulen.

Empleando (6) y (11), la métrica ds^2 puede escribirse ahora

$$ds^2 = dt^2(K^2 + 2uw\cos\phi - u^2), \qquad (12)$$

con $K^2 = g_{00}$. Esta nueva formulación del elemento de línea evidencia que la condición $ds^2 = 0$, característica de la propagación de un rayo de luz, define su velocidad u en el caso más general como una función de la posición, de la dirección del rayo, y del tiempo (cuando K, w y ϕ dependan de t).

Representando los cocientes u/K y w/K (ambos números puros positivos) con las letras β y γ, tendremos paraβ una ecuación de segundo grado:

$$\beta^2 - 2\beta\gamma\cdot\cos\phi - 1 = 0. \qquad (13)$$

El producto de las raíces de esta ecuación arroja un valor igual a –1, lo que implica que dichas raíces poseen signos opuestos. El valor de u ha de ser positivo por definición, de modo que queda unívocamente determinado por (12).

Cuando todos los términos que contienen productos en dt se anulan (el caso estático), ocurre que $w = 0$. En consecuencia, $\beta = 1$ y u coincide con K. En general $\gamma > 0$ y la diferencia entre u y K (para una posición y un instante determinados) dependerá de la dirección del rayo, es decir, del ángulo ϕ, dependiente a su vez de la orientación de w. También se infiere que $u = K$ para cualquier rayo perpendicular a w [15].

Es obvio a partir de (13) que los valores máximo y mínimo de β corresponden a $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ respectivamente. Todo esto equivale a decir que la máxima velocidad de propagación de un rayo de luz viene dada por $K\{(1+\gamma^2)^{½} + \gamma\}$ a lo largo de w. La mínima velocidad, correlativamente, será $K\{(1+\gamma^2)^{½} - \gamma\}$, y se dará en la misma dirección con sentido contrario.

V. EL PRINCIPIO DE FERMAT EN LA MÉTRICA RELATIVISTA ESTACIONARIA

El comportamiento espacio-temporal de los rayos de luz también puede hallarse combinando el principio de Fermat con la condición de geodésica nula, $ds^2 = 0$, de modo que tengamos

$$\delta \int dx_0 = 0. \qquad (14)$$

Es claro que dx_0 se encuentra relacionado con x_0 y con el resto de coordenadas a través del requisito $ds^2 = 0$.

Sin embargo, aunque el principio variacional aplicado para calcular geodésicas tetradimensionales, $\delta\int ds = 0$, exige que dx_0, dx_1, dx_2 y dx_3 se anulen en los extremos del intervalo de integración, no debe aplicarse ahora esa condición a dx_0, ya que entonces (14) se reduciría a una mera identidad. Por ello será conveniente establecer a continuación la compatibilidad entre los dos principios básicos de la óptica geométrica relativista: el principio geodésico tetradimensional y el principio de Fermat sobre el tiempo mínimo [16].

Con el fin de alcanzar este propósito consideraremos que las geodésicas nulas son el resultado de un proceso de paso al límite realizado partiendo de geodésicas de género temporal (*timelike geodesics*), donde $ds^2 > 0$. Para estas últimas se cumple:

$$x'_i = \frac{dx_i}{dx_0}, \qquad (15a)$$

$$\beta^2 = \left(\frac{dl}{dx_0}\right)^2 = \sum_1^3 a_{ik}\,x'_i x'_k, \qquad (15b)$$

$$L^2 = \left(\frac{ds}{dx_0}\right)^2 = K^2 + 2\sum_1^3 g_{0i}\,x'_i - \sum_1^3 a_{ik}\,x'_i x'_k, \quad (15c)$$

donde la función L posee derivadas parciales finitas ya que ds, y por tanto L, no se anula.

El principio geodésico usual puede escribirse ahora

$$\delta \int L dx_0 = 0. \qquad (16)$$

Tomando a continuación las variaciones con respecto a x_1, x_2 y x_3 obtenemos por el procedimiento habitual las ecuaciones lagrangianas (para $i = 1, 2, 3$)

$$\frac{d}{dx_0}\left(\frac{dL}{dx'_i}\right) - \frac{dL}{dx'_i} = 0, \qquad (17)$$

en tanto la variación con respecto a x_0 ofrece

$$\frac{d}{dx_0}\left(\sum_1^3 \frac{\partial L}{\partial x'_i}x'_i - L\right) - \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0, \qquad (18)$$

que en sí misma es una consecuencia de (17).

Admitiendo por hipótesis que L no depende explícitamente de x_0, lo que resulta característico del caso estacionario, obtenemos la integral

$$\left(L - \sum_1^3 \frac{\partial L}{\partial x'_i}x'_i\right) = E, \qquad (19)$$

donde E representa la energía total del sistema en movimiento. Si multiplicamos por L, el miembro izquierdo de (19) puede escribirse:

$$\frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{2}\left(L^2 - \sum_1^3 \frac{\partial L^2}{\partial x'_i}x'_i\right). \qquad (20)$$

Pero de (15c) se deduce que L^2 viene dado por un polinomio de segundo grado en x'_1, x'_2 y x'_3, lo que permite separarlos en tres conjuntos homogéneos de términos de grados 0, 1 y 2 respectivamente.

Mediante el teorema de Euler para funciones homogéneas, se deduce que el término lineal desaparece por la diferencia contenida en el paréntesis de (20), lo que se reduce a $K^2 + \beta^2$. Así pues, multiplicando (19) por L llegamos a la expresión:

$$\tfrac{1}{2}L^2 + \tfrac{1}{2}(K^2 + \beta^2) = EL. \tag{21}$$

El miembro de la izquierda se mantiene básicamente positivo aunque L tienda a cero, siendo de hecho mayor o igual que $\frac{1}{2}K^2$. Por consiguiente, el producto EL puede considerarse una función de las variables x y x' que siempre es analíticamente suave y nunca se anula cuando L tiende a cero (si bien en este último caso, la magnitud E tendería obviamente a infinito).

Es más, para todos los movimientos con la misma energía total, la Ec. (16) en la que se supone que las variaciones de x_0 se anulan en los extremos del intervalo de integración, puede reemplazarse por otra igualdad cuya ventaja consiste en prescindir de este requerimiento de anulación.

De hecho, cuando las δx_0 se anulan en las extremidades, tendremos $\delta\int dx_0 = 0$, lo que convierte (16) en

$$\delta \int (L - E)\, dx_0 = 0, \tag{22}$$

y cuando $E \neq 0$, esto equivaldría a

$$\delta \int \left(1 - \frac{L}{E}\right) dx_0 = 0. \tag{23}$$

Ya en (23) se puede omitir la exigencia de que las δx_0 se anulen en los extremos del intervalo de integración, puesto que si trasladamos el signo variacional δ dentro de la integral y lo aplicamos a dx_0, ello nos conduciría a

$$-\frac{1}{E}\int \delta dx_0 \left(L - E - \textstyle\sum_1^3 \frac{\partial L}{\partial x'_i} x'_i\right), \tag{24}$$

que se anula en virtud de la igualdad (19).

De las consideraciones precedentes se infiere que para un valor no nulo de E, las ecuaciones del movimiento son deducibles de la igualdad (23), sin necesidad de imponer condición alguna sobre δx_0. El integrando de (23) también puede expresarse como $(1 - L^2/EL)$, que es regular, dadas las propiedades antes discutidas del producto EL, y tiende a la unidad cuando L tiende a cero [17].

Y resulta que precisamente esa es la condición que permite pasar desde el movimiento de una partícula material hasta el caso límite de la propagación de la luz. Ya que la función es regular, el orden de las operaciones $\delta\int$ y el paso al límite pueden intercambiarse, de modo que (23) nos conduce de nuevo al principio de Fermat $\delta\int dx_0 = 0$.

No es difícil expresar el principio de Fermat en forma puramente geométrica, referida a una métrica de tipo espacial con elemento de línea dl. Para ello atribuimos a dx_0 el valor hallado a partir de la condición $ds^2 = 0$, en términos de las variables x_0, x_1, x_2, x_3 y los incrementos dx_1, dx_2 y dx_3, y los insertamos en una igualdad como la (14).

El resultado es particularmente fácil de interpretar en el caso estático ($g_{0i} = 0$, con $i = 1, 2, 3$), donde evidentemente $dx_0 = dl/K$. Y como K tiene las dimensiones de una velocidad recuperamos de inmediato el principio de Fermat en la forma

$$\delta \int \left(\frac{dl}{K}\right) = 0. \tag{25}$$

Se demuestra así que las trayectorias de los rayos de luz coinciden con las geodésicas de una métrica tridimensional cuyo elemento de línea es dl/K.

VI. ÍNDICE DE REFRACCIÓN EFECTIVO

La geometría no euclidea típica de la relatividad general desvía los rayos de luz (y cualquier otra línea de universo) de las trayectorias euclídeas ordinarias. Este comportamiento puede asimilarse al de un rayo de luz que atraviese un medio con un índice de refracción n (en general, variable de un punto a otro). Por ello, también sería de esperar que la luz en estas circunstancias obedeciese una versión del principio de Fermat que impone un valor extremal para el camino óptico. Aquí, la parte espacial del tensor métrico g_{ij} determinaría la medida asignable a la longitud del camino óptico [18]. En todo caso, sabemos que la luz seguirá las geodésicas de la geometría propia del medio trasmisor, ya sea éste una variedad no-euclídea curva o un medio ordinario con índice de refracción n.

Para deducir el comportamiento de la luz en estas condiciones, hemos de apartarnos brevemente de un tratamiento puramente geométrico de los fenómenos ópticos y partir de las ecuaciones de Maxwell. Primero escribamos la ecuación de onda para un campo monocromático con frecuencia ω. Cualquier campo electromagnético es susceptible de descomponerse en una superposición de campos monocromáticos, y si suponemos que g_{ij} no cambia con el tiempo (tenemos una métrica puramente espacial estacionaria), junto con la ausencia de cargas y corrientes en la región considerada, tendremos:

$$\varepsilon^{ijk}(\varepsilon_{klm}E^{m;l})_{;k} = (\omega^2/c^2)E^i, \tag{26}$$

donde –como de costumbre– ε^{ijk} es el tensor tridimensional totalmente antisimétrico de Levi-Civita, y el símbolo; indica derivación covariante.

Precisamente gracias a las propiedades de la derivación covariante sabemos que

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{klm}\nabla_k\nabla^l E^m = (\delta^i{}_l\delta^j{}_m - \delta^i{}_m\delta^j{}_l)\nabla_k\nabla^l E^m, \tag{27}$$

y a su vez,

$$(\delta^i{}_l\delta^j{}_m - \delta^i{}_m\delta^j{}_l)\nabla_k\nabla^l E^m = \nabla_j\nabla^i E^j - \nabla^j\nabla_j E^i. \tag{28}$$

Agrupando términos, y escribiendo los componentes de los campos como subíndices, llegamos a la ecuación de ondas generalizada,

$$\nabla_j\nabla^j E_i + R_{ij}g^{jk}E_k + (\omega^2/c^2)E_i = 0, \qquad (29)$$

en la cual R_{ij} denota, como de costumbre, el tensor de Ricci, $R_{ij} = R^k{}_{ikj}$.

Regresemos ahora el rango geométrico, donde el avance de la fase de una onda electromagnética es mucho más rápido que la variación de las propiedades dieléctricas del medio transmisor [19]. Las componentes del campo eléctrico pueden representarse como $E_k = \mathcal{E}_k e^{i\varphi}$, donde $\mathcal{E}_k$ es una onda envolvente lentamente variable y φ es la fase rápidamente variable. Sustituimos esta expresión en la ecuación de ondas (29) y retenemos tan solo los términos dominantes (términos que incluyen las primeras derivadas de la fase o de ω^2, despreciando la contribución de la curvatura).

La amplitud $\mathcal{E}_k$ aparece en todos los términos preservados, y la ecuación de ondas se reduce a la relación de dispersión

$$g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi = \omega^2/c^2. \qquad (30)$$

Para un medio isotrópico tenemos el inverso del tensor métrico definido como $g^{ij} = n^{-2}\,\mathbb{I}$ (donde n es el índice de refracción escalar y $\mathbb{I}$ es la matriz unitaria) y $c' = c/n$. En un medio aisoitrópico los autovalores de la matriz g^{ij} caracterizan los rayos de luz que se propagan en la dirección de los autovectores de la métrica. El valor de c' es la raíz cuadrada del correspondiente autovalor de g^{ij}.

Otro modo de obtener una versión del principio de Fermat consiste en recurrir a la analogía formal entre la óptica y la mecánica conocida desde el siglo XIX. Así, las relaciones de dispersión (30) se interpretarán como las ecuación de Hamilton-Jacobi de una partícula puntual ficticia que recorriese la misma trayectoria espacial que el rayo de luz [20]. Para ello necesitamos considerar el vector de ondas $\partial_i\varphi$ como el momento canónico obtenido al derivar una cierta lagrangiana L' con respecto a la velocidad $\dot{x}_i$

Emplearemos como lagrangiana:

$$L' = \tfrac{1}{2}\, g_{ij}\, \dot{x}_i \dot{x}_j \qquad (31)$$

en cuyo caso obtenemos

$$\partial_i\varphi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} = g_{ij}\dot{x}_j, \qquad (32)$$

y el hamiltoniano sería

$$H' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i - L' = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j = \tfrac{1}{2}\, g^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi \qquad (33)$$

Ya que la métrica espacial no depende del tiempo el hamiltoniano permanece invariante, y la cantidad asociada que permanece constante puede identificarse la energía de dicha partícula ficticia, la cual recorre las geodésicas suministradas por las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultan de todo ello. Por tanto, los rayos de luz siguen las geodésicas de la métrica g_{ij} o –dicho de otro modo– el camino óptico extremo determinado por las propiedades del medio: la luz obedece el principio de Fermat [21].

VII. TENSOR DE REFRACTIVIDAD EN CAMPOS GRAVITATORIOS DÉBILES

En un campo gravitatorio arbitrario, pero suficientemente débil, la trayectoria de los rayos de luz puede describirse en aproximación lineal mediante una analogía que recurre a un tensor 3×3 para caracterizar una suerte de "índice de refracción efectivo" [22]. Cuando las fuentes del campo gravitatorio presentan en su interior pequeños flujos, tensiones y presiones, dicho tensor de refractividad efectiva expresa la isotropía correspondiente convirtiéndose en un simple escalar, determinable en la mayoría de los casos con suficiente precisión en términos del potencial newtoniano.

Cuando la gravitación es débil, el tensor métrico general $g_{\mu\nu}$ puede expresarse mediante la combinación de dos sumandos, uno referente a la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, y el otro $h_{\mu\nu}$ entendido como una corrección a esta métrica representativa de un espacio-tiempo plano. Es decir, la suma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ nos dice la proporción en la cual la curvatura espacio-temporal se aleja de un valor estrictamente nulo. O, si se prefiere, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ expresa la idea de que la curvatura espacio-temporal $g_{\mu\nu}$ es tan pequeña que puede considerarse como una simple corrección, indicada por $h_{\mu\nu}$, sobre un fondo espacio-temporal básicamente plano, dado por $\eta_{\mu\nu}$.

Por otra parte, también es posible tomar la ecuación gravitatoria de Poisson que relaciona el potencial escalar newtoniano con la densidad de materia

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho, \qquad (34)$$

generalizándola hasta llegar a un tensor de potencial post-newtoniano

$$\nabla^2\psi_{\mu\nu} = -4\pi G T_{\mu\nu}. \qquad (35)$$

Considerando un espacio-tiempo estático con gravitación débil (y tomando $c = 1$), el tensor de energía adopta la forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & T_{ij} \end{bmatrix}, \qquad (36)$$

donde los subíndices en letras latinas de T_{ij} conciernen a las coordenadas estrictamente espaciales. Así se obtienen las ecuaciones gravitatorias de la relatividad general en el régimen de campos débiles:

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, T\eta_{\mu\nu}) + O(h^2), \qquad (37)$$

en cuyo miembro derecho el término $O(h^2)$ simboliza los factores de orden superior en $h_{\mu\nu}$.

En estas condiciones, el tensor de refractividad efectiva adquiere la forma:

$$n_{ij} = (1 - 2\phi)\delta_{ij} - 2\psi_{ij}. \qquad (38)$$

Considerando un fluido perfecto, con isotropía en sus tensiones internas de modo que T_{ij} se redujese a $p\delta_{ij}$ (con p la presión arquimediana habitual), y el tensor de potencial post-newtoniano se convirtiese en $\psi_0\delta_{ij}$, entonces el tensor de refractividad adoptaría la forma más simple:

$$n_{ij} = (1 - 2\phi - 2\psi_0)\delta_{ij}. \qquad (39)$$

Y si las tensiones internas fuesen despreciables, todavía se simplificaría más, llegando a la expresión:

$$n_{ij} = (1 - 2\phi)\delta_{ij}, \qquad (40)$$

es decir, tendríamos un tensor diagonal con todos sus valores no nulos iguales a $(1-2\phi)$.

VIII. CONCLUSIONES

A lo largo del presente artículo se ha expuesto la pertinencia de formular la óptica geométrica dentro de un marco formal explícitamente dependiente de los métodos geométricos no euclídeos cuando nos hallamos en situaciones físicas típicamente descritas por las teorías relativistas. Se ha visto que en tales casos la condición de geodésica nula, definitoria de la línea de universo de un rayo de luz, y el principio de Fermat son las condiciones que nos permiten deducir las propiedades geométricas buscadas.

De las anteriores consideraciones se desprende también que los medios dieléctricos actúan frente a la luz como si modificasen la geometría espacial (o espacio-temporal si el medio no se considera en reposo o estrictamente homogéneo e isótropo). Esta geometría modificada que la luz percibe en tales condiciones puede ser el origen de diversos fenómenos ópticos susceptibles de relevantes aplicaciones tecnológicas. Con el fin de obtener un determinado fenómeno óptico, por ejemplo, se puede calcular primero la geometría deseada y construir después un medio dieléctrico que la genere en la práctica.

Las conexiones entre la óptica y la geometría tienen una historia dilatada y trascendente. El principio de Fermat inspiró el postulado de mínima acción en la mecánica analítica; el vínculo entre óptica geométrica y óptica ondulatoria influyó sin duda sobre los primeros pasos de la física cuántica, sobre la idea de integrales de camino y también en las repercusiones que esta técnica tuvo en la teoría cuántica de campos y en la mecánica estadística. El principio de mínima acción, asimismo, enlaza con el movimiento a lo largo de geodésicas en una variedad tetradimensional curva, típico de la relatividad general.

En este esbozo de las conexiones entre la óptica y los métodos geométricos no euclídeos, se ha omitido toda mención a las transformaciones de coordenadas en un medio que reparametrizan su escala de distancias preservando su topología. Ni se han discutido las implicaciones que estos fenómenos relativos a la luz pueden tener sobre la propagación de otras clases de ondas, como las sonoras (una “acústica no euclídea”), o incluso en la óptica cuántica. Todos estos aspectos –susceptibles de abordarse en otros artículos– entrañan a su vez líneas de investigación igualmente prometedoras.

REFERENCIAS

[1] Mahoney, M. S., *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, 1601-1665, 2nd Ed. (Princeton University Press, Princeton, 1994).

[2] Lindberg, D. C., *Theories of Vision from al-Kindi to Kepler*, (Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976).

[3] Pain H. J., *The Physics of Vibrations and Waves*, (Wiley, Chichester, 2005).

[4] Schleich, W. and Scully, M. O., *General relativity and modern optics in Les Houches Session XXXVIII - New trends in atomic physics*, (Elsevier, Amsterdam, 1984).

[5] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *The Classical Theory of Fields*, (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1995).

[6] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., *Gravitation*, (Freeman, New York, 1999).

[7] Gordon, W., *Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitatstheorie*, Ann. Phys. Leipzig **72**, 421-456 (1923).

[8] Rytov, S. M., *Sur la transition de l'optique ondulatoire à l'optique geometrique*, Doklady Akad. Nauk. USSR **18**, 263-266 (1938).

[9] Plebanski, J., *Electromagnetic waves in gravitational fields*, Phys. Rev. **118**, 1396-1408 (1960).

[10] Leonhardt, U., *Space–time geometry of quantum dielectrics*, Phys. Rev. A **62**, 012111-012119 (2000).

[11] Schutz, B. F., *A first course in general relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

[12] Wald, R. M., *General Relativity*, (University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[13] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[14] Naber, G. L., *The Geometry of Minkowski Spacetime*, (Springer-Verlag, New York, 1992).

[15] Catoni, F., Boccaletti, D. and Cannata, R., *Mathematics of Minkowski Space*, (Birkhäuser, Basel, 2008).

[16] Nityananda, R. and Samuel, J., *Fermat's principle in general relativity*, Phys. Rev. D **45**, 3862-3864 (1992).

[17] Giannoni, F., Masiello, A. and Piccione, P., *The Fermat principle in general relativity and applications*, J. Math. Phys. **43**, 563-596 (2002).

[18] Leonhardt, U. and Piwnicki, P., *Optics of non-uniformly moving media*, Phys. Rev. A **60**, 4301-4312 (1999).

[19] Friedlander, F. G., *Geometrical optics and Maxwell's equations*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **43**, 284-286 (1947).
[20] Nandi, K. K. and Islam, A., *On the optical-mechanical analogy in general relativity*, Am. J. Phys. **63**, 251-256 (1995).
[21] Leonhardt, U. and Philbin, T. G., *Transformation Optics and the Geometry of Light*, Prog. Optics **53**, 69-152 (2009).
[22] Perlick, V., *Ray Optics, Fermat's Principle, and Applications to General Relativity*, (Springer, New York, 2000).