Condiciones para separar la ecuación cinemática escalar $V^2 = V_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ en coordenadas curvilíneas

S. Díaz-Solórzano[1,2] y **L. González-Díaz[2,3]**

[1]Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Sartanejas, Edo. Miranda 89000, Venezuela.

[2] Centro de Investigación de Matemática y Física, Departamento de Matemáticas y Física, Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL, Av. Páez, Caracas 1021, Venezuela.

[3]Centro de Física, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Altos de Pipe 21827, Venezuela.

E-mail: srafael@ipc.upel.edu.ve; lagdelul@gmail.com

(Recibido el 17 de Agosto de 2011; aceptado el 23 de Septiembre de 2011)

Resumen

El presente trabajo amplía lo discutido en [1]. Se resalta el uso de la técnica de separación de variables cuando la aceleración no es constante y en situaciones tridimensionales. Se muestra que la expresión cinemática que relaciona el cuadrado de la rapidez con la aceleración es separable sólo en coordenadas cartesianas.

Palabras clave: Rapidez, Cinemática, Enseñanza de la Mecánica.

Abstract

This paper extends the discussion in [1]. We highlight the use of variables separation technique when the acceleration is not constant and in three-dimensional situations. We show that the expression show that the cinematic expression that relates the square of the speed with acceleration is separable in Cartesian coordinates only.

Keywords: Speed, Kinematics, Teaching of Mechanics.

PACS: 01.40.J, 01.55+b, 45.20.D- **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

En [1] se hace uso de la técnica de separación de variables para descomponer, en variables, la ecuación escalar $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ en una situación bidimensional. Sin embargo, no se muestra que es posible separar las variables aun cuando la aceleración no sea constante y en situaciones tridimensionales. Así, el presente trabajo amplía lo discutido en [1]. En particular, se detallan las ideas elementales asociadas a la técnica de separación de variables empleada en cursos avanzados de métodos matemáticos para Físicos, cuando tratan el tópico de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Cuando la aceleración no es constante, la expresión cinemática arriba mencionada, toma la forma

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_0|^2 + 2\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\cdot\vec{V}(t')\,dt', \tag{1}$$

donde $|\vec{V}_0|$ es la rapidez de la partícula en el instante $t = t_0$. Este resultado coincide con el mostrado por Chyba [2] cuando la aceleración es constante. La expresión (1) es una ecuación escalar que no admite una descomposición en coordenadas, por el contrario, tal como se afirma en [1], lo que admite es una separación de variables en algún sistema coordenado. El objetivo de este comentario es probar que el único sistema coordenado en el cual la Ec. (1) admite una separación en variables es el cartesiano. En dicho sistema, la ecuación en cuestión puede escribirse de la siguiente manera

$$|\vec{V}_i|^2 = |\vec{V}_{0i}|^2 + 2\int_{t_0}^{t} a_i(t')V_i(t')dt', \tag{2}$$

con $i=1,2,3$ ó $i=\{x, y, z\}$; los índices repetidos no sugieren suma sobre ellos. Al observar las expresiones (1) y (2), pareciera, a primera vista, que (1) se descompone en coordenadas para obtener (2), tal como ocurre en ecuaciones vectoriales. Esto no cierto debido a que (1) no es una ecuación vectorial, por tanto no admite una descomposición en coordenadas. La controversia radica en el hecho de que (2) es correcta y puede obtenerse, en coordenadas cartesianas, al descomponer la aceleración en componentes y aplicando la regla de la cadena después de multiplicar dicha aceleración por la componente correspondiente del vector velocidad. En efecto, al considerar la componente i-ésima del vector aceleración

$$a_i(t)=\vec{a}(t)\cdot\hat{e}_i=\tfrac{d}{dt}V_i\,, \quad (3)$$

y multiplicando por V_i, sin considerar suma sobre índices repetidos, nos queda

$$a_iV_i=V_i\tfrac{d}{dt}V_i=\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}V_i^2\right), \quad (4)$$

donde $i=1,2,3$ ó $i=\{x,\ y,\ z\}$. Después de integrar la expresión (4) se llega directamente al resultado mostrado en (2).

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sec. 2 se muestra que es posible separar (1) en variables usando coordenadas cartesianas y dicho procedimiento permite llegar a la expresión (2). En la Sec. 3, se muestra la imposibilidad de separar las variables en un sistema de coordenadas curvilíneo.

II. SEPARACIÓN DE VARIABLES EN LA ECUACIÓN CINEMÁTICA ESCALAR (1) EN COORDENADAS CARTESIANAS

En coordenadas cartesianas la rapidez de una partícula y el producto escalar de la velocidad con la aceleración de un partícula en un instante de tiempo, vienen dadas por

$$\begin{aligned}|\vec{V}|&=\sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}}=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}\\ \vec{a}\cdot\vec{V}&=a_xV_x+a_yV_y+a_zV_z\,.\end{aligned} \quad (5)$$

Considerando que las componentes V_i de la velocidad son las variables de interés, se puede separar la variable V_x del resto al sustituir (5) en (1), de la siguiente manera

$$V_{0x}^2-V_x^2+2\int_{t_0}^{t}a_xV_xdt=-\left[V_{0\xi}^2-V_\xi^2+2\int_{t_0}^{t}a_\xi V_\xi dt\right], \quad (6)$$

donde se han realizado las definiciones $V_\xi^2\equiv V_y^2+V_z^2$, $V_{0\xi}^2\equiv V_{0y}^2+V_{0z}^2$ y $a_\xi V_\xi\equiv a_yV_y+a_zV_z$. El lado izquierdo de (6) es una función de la componente x de la velocidad y el lado derecho es una función de las otras componentes de la velocidad, por tal razón, dicha igualdad debe ser una constante que denotaremos como α, resultando

$$\begin{cases}V_{0x}^2-V_x^2+2\displaystyle\int_{t_0}^{t}a_xV_x\ dt=\alpha\\ V_{0\xi}^2-V_\xi^2+2\displaystyle\int_{t_0}^{t}a_\xi V_\xi\ dt=-\alpha\end{cases}. \quad (7)$$

De la segunda ecuación mostrada en (7), se puede separar la componente y de la velocidad de la componente z, obteniéndose

$$V_{0y}^2-V_y^2+2\int_{t_0}^{t}a_yV_ydt=-\left[V_{0z}^2-V_z^2+2\int_{t_0}^{t}a_zV_zdt+\alpha\right]. \quad (8)$$

Procediendo de manera similar, el lado izquierdo es una función que sólo depende de la componente y y el lado derecho es otra función que depende de la componente z, así la igualdad mostrada en (8) debe ser una constante que llamaremos β. Quedando el siguiente sistema,

$$V_{0x}^2-V_x^2+2\int_{t_0}^{t}a_xV_xdt=\alpha\,, \quad (9a)$$

$$V_{0y}^2-V_y^2+2\int_{t_0}^{t}a_yV_ydt=\beta\,, \quad (9b)$$

$$V_{0z}^2-V_z^2+2\int_{t_0}^{t}a_zV_zdt=\alpha+\beta\,. \quad (9c)$$

Para obtener las componentes V_x, V_y y V_z de la velocidad en coordenadas cartesianas es necesario determinar el valor de las constantes de separación α y β, las cuales se obtienen al imponer condiciones iniciales, de lo contrario tendríamos tantas soluciones como constantes de separación se fijen. Esto no es físicamente aceptable debido a que la partícula debe tener un solo valor de velocidad para un instante de tiempo dado, contrario a lo que se obtendría al cambiar los valores de α y β. Eligiendo $t=t_0$ en el sistema (9) se obtiene que todas las constante de separación son nulas; es decir, $\alpha=\beta=0$, lo cual conduce a la Ec. (2). En el caso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, las constantes de separación son determinadas por las condiciones de borde o contorno [3].

III. IMPOSIBILIDAD DE SEPARAR LAS VARIABLES EN LA ECUACIÓN CINEMÁTICA ESCALAR (1) EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Es bien conocido [4] que los vectores velocidad y aceleración escritos en la base coordenada $\vec{e}_i$ quedan expresados como

$$\vec{V}(t)=\dot{q}^i\vec{e}_i \quad \text{y} \quad (10a)$$

$$\vec{a}(t)=\left(\ddot{q}^k+\Gamma_{ij}^k\dot{q}^i\dot{q}^j\right)\vec{e}_k\,. \quad (10b)$$

Los índices repetidos indican suma sobre ellos, además $q^i=q^i(x_i)$ representa un conjunto de coordenadas, las cuales son funciones de las coordenadas cartesianas. Los puntos encima de las coordenadas indican derivación respecto al tiempo. Adicionalmente, el símbolo Γ_{ij}^k que representa a las componentes de la conexión de Levi-Civita [5] en la base coordenada, se obtiene de la relación

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k \,. \tag{11}$$

Las componentes de la métrica g_{ij} inducida por la base coordenada se obtienen a partir del producto escalar

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \,. \tag{12}$$

Derivando esta relación respecto a la coordenada q^k y usando la relación (11) se llega a la expresión

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \Gamma^{\ell}_{ik} g_{\ell j} + \Gamma^{\ell}_{jk} g_{\ell i} \,. \tag{13}$$

Permutando cíclicamente los índices de (13) y sumando las dos primeras permutaciones y luego restando el resultado con la tercera permutación, se logra despejar la conexión en términos de la métrica y su inversa, obteniéndose

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\ell}\left[\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^{\ell}}\right]. \tag{14}$$

Sustituyendo (10) y (12) en (1), y considerando que existe una suma por cada índice repetido, se tiene que

$$\begin{aligned} & g_{ij}(t)\dot{q}^i(t)\dot{q}^j(t) = g_{ij}(t_0)\dot{q}^i(t_0)\dot{q}^j(t_0) \\ & +2\int_{t_0}^{t} g_{ij}(t')\left[\ddot{q}^i(t') + \Gamma^i_{k\ell}\dot{q}^k(t')\dot{q}^{\ell}(t')\right]\dot{q}^j(t')dt' \end{aligned} \,. \tag{15}$$

Cuando el sistema de coordenadas es el cartesiano, la métrica inducida por la base coordenada de dicho sistema corresponde a la delta de Kronecker; es decir, $g_{ij} = \delta_{ij}$. Lo cual conduce a que la conexión establecida en (11) y (14) se anulen. En estas circunstancias, la velocidad y la aceleración dadas en (10) toman la forma más simple posible; a saber, $\vec{V} = \dot{x}^k\vec{e}_k$ y $\vec{a} = \ddot{x}^k\vec{e}_k$, siendo $\vec{e}_1 = \hat{\imath}$, $\vec{e}_2 = \hat{\jmath}$ y $\vec{e}_3 = \hat{k}$. Así, la expresión (15) coincide con (6). Cuando el sistema coordenado no es el cartesiano, es imposible separar las componentes de la velocidad $\dot{q}^i$ en (15), ya que la conexión mezcla dichas componentes pese a que la métrica es diagonal [6], tal como ocurre con las coordenadas polares (ver referencia [1]).

IV. CONCLUSIÓN

Hemos mostrado que la existencia de valores para las constantes de separación α y β en (9), así como la separación de variables en (1), es característico del sistema de coordenadas cartesiano, donde la orientación de los vectores unitarios asociados a dichas coordenadas no depende del punto del espacio donde éstos se describan. En tal sentido, la separación de variables en una ecuación, que opera a nivel algebraico, tiene lugar para un sistema de coordenadas específico. En otras palabras, la separación de variables depende del sistema de coordenadas que se elija y tal elección es una propiedad característica de la ecuación en cuestión.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto de investigación **08-011**, inscrito ante la Subdirección de Investigación y Postgrado del Instituto Pedagógico de Caracas de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

REFERENCIAS

[1] Díaz-Solórzano, S. y. González-Díaz, L. A., *Descomposición de la ecuación cinemática* $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ *en variables cartesianas*, Lat. Am. Phys. Educ. **4**, 374-377 (2010); *Separación de variable en la ecuación cinemática* $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ *y su importancia*, Rev. Mex. Fis. E **56**, 141-143 (2010).

[2] Chyba, T., *Teaching first-year kinematics via the scalar product*, Am. J. Phys. **51**, 851 (1983).

[3] Dennery, P. y Krzywicki, A., *Mathematics for physicsts*, 2th. Ed. (Dover Publications, New York, 1995), pp. 364-365; Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 3th Ed. (Academic Press, United States of America, 1985), pp 506-518.

[4] Sokolnikoff, I. S., *Análisis tensorial: Teoría y aplicaciones a la geometría y mecánica de los medios continuos*, 2da Ed. (Limusa, México, 1987) pp. 150-157 y p. 249; Barry, S., *Cálculo tensorial*, (Dossat, Buenos Aires, 1960) pp. 26-37; Simmonds, J. G., *A brief on tensor analysis*, 2da Ed. (Springer-Verlag, New York, 1994) pp. 55-65.

[5] Una conexión afín, simétrica y compatible con la métrica es llamada conexión de Levi-Civita o símbolo de Christoffel; satisfaciéndose en la base coordenada las siguientes relaciones

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \quad \text{y} \quad \nabla_k g_{ij} = 0.$$

Donde $\nabla_k g_{ij}$ es la derivada covariante de la métrica inducida por la base coordenada (para detalles ver las referencias [4]).

[6] Para que la mezcla no ocurra, es necesario que la métrica sea diagonal y uniforme, tal como ocurre en el caso cartesiano. En el caso del sistema de coordenadas polares, la métrica es diagonal y no uniforme, lo que conduce a la existencia de elementos no nulos de la conexión; a saber, Γ^i_{ij} (los índices repetidos no indican suma) [4], que originan la aparición de productos cruzados de componentes de la velocidad en el segundo término entre corchetes de (15).