Estudio de la mecánica del vuelo de una cometa plana ideal de un solo hilo

Juan Miguel Suay Belenguer
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). España.
Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia. Facultad de Filosofía,
Dirección correspondencia: Calle El de Pagan, 44, 03550 San Juan de Alicante (Alicante) España.

E-mail: jm_suay@yahoo.com

(Recibido el 21 de Mayo de 2012; aceptado el 13 de Septiembre de 2012)

Resumen
El objetivo de este artículo es realizar un análisis elemental del equilibrio en el vuelo de una cometa (papalote, barrilete, volantín, pipa), aplicando los principios de la estática y las ecuaciones de Euler para el sólido rígido, así como el efecto del viento sobre el hilo de la cometa. Todo ello como un caso práctico más de aplicación de los principios estudiados en un curso introductorio de mecánica clásica.

Palabras clave: Cometa (máquina voladora), Mecánica de Vuelo, Mecánica Sólido Rígido.

Abstract
The aim of this paper is to carry out an elementary analysis of the equilibrium in a kite flight, applying the principles of statics and the Euler equations for rigid solids, as well as the effect of wind on the kite string. All this will be done as another case study of the application of the principles stated in an introductory course on classical mechanics.

Keywords: Kite (flying machine), Flight Mechanics, Mechanics, Rigid Solid.

PACS: 01.40.-d, 83.10.Ff **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

La cometa[1], ese objeto asociado a la infancia, es la máquina voladora más antigua que el hombre construyó. Desde su origen en China hace más de cuatro mil años, ha tenido muchos usos a lo largo de la historia [1], que van desde utensilio de pesca en Oceanía, o elemento auxiliar en los campos de batalla para elevar observadores [2]. En el campo de la física, el uso más conocido se produce en 1752, cuando el político y científico americano Benjamín Franklin (1706-1790), anuncia desde Filadelfia que ha utilizado una cometa para hacer descender el *fuego eléctrico* de las nubes, demostrando la naturaleza eléctrica del rayo [3].

En 1758, la Academia de Ciencias de Berlín, publica una memoria [4] titulada de *Le Cerf Volant*, escrita por Johann Albert Euler (1734-1800), hijo del conocido matemático Leonhard Euler (1707-1783). En ella el joven Euler intenta explicar la mecánica el vuelo de las cometas desde los planteamientos de la mecánica racional, su propósito, no era otro que elucidar los fundamentos físicos del experimento de Franklin, y así explicar de qué modo el vuelo de una cometa contribuyó a su éxito. Por lo tanto analizar y definir la forma idónea que debe tener la cometa para que se eleve lo más alto posible para ser utilizado en los experimentos eléctricos, según se analiza en [5].

Tras este primer trabajo, otros surgieron según se muestra en [6], de entre ellos podemos destacar, por su interés, un estudio profundo sobre la mecánica del vuelo de las cometas planas escrito en la segunda mitad del siglo XIX por un profesor de física francés Bertinet [7], o el realizado por el meteorólogo americano C. F. Marvin [8] Así como, el análisis de las cometas usadas para fines militares del ingeniero militar francés Th. Bois [9] publicado a principios del siglo XX.

Estudiar el vuelo de una cometa, hoy en día, es aplicar los mismos principios y ecuaciones que rigen el movimiento de un aeroplano, por lo que existe una amplia bibliografía sobre la aerodinámica del vuelo de una cometa, ver entre otras [10, 11, 12]. Lo que está menos generalizado es emplear la cometa como caso práctico en un curso introductorio de mecánica clásica. El objetivo de este artículo es realizar un análisis elemental del equilibrio en el vuelo de una cometa, aplicando los principios de la estática y las ecuaciones de Euler para un sólido rígido, así como el estudio del efecto del viento sobre el hilo de la cometa. Todo ello como un caso práctico más de aplicación de los principios teóricos.

[1] La cometa es un popular juego que se conoce por distintos nombres en español, así en distintos países de la América del Sur y Central se denominan *papalotes* (Cuba y Méjico), *barriletes* (Argentina), *volantín* en Chile, *Pipas* (Brasil), entre otros.

II. DEFINICIÓN DE UNA COMETA PLANA IDEAL

Entendemos por *cometa ideal*, una superficie rígida rectangular[2] plana (Fig. 1), de área (S), que se expone al viento inclinada por medio de una *brida*, que es una estructura funicular que, además sirve para unir la cometa con el *hilo*, resistente, ligero e inextensible, que une la cometa con el piloto situado en el suelo. Se denomina *borde de ataque*, al extremo del plano por donde incide el viento, y *borde de fuga o salida* por donde sale el viento.

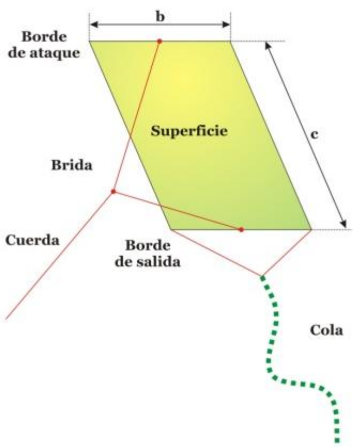


FIGURA 1. Cometa plana rectangular ideal.

Se denomina *envergadura* (b), a la anchura máxima de la cometa. Se entiende por *cuerda* (c) la longitud de la sección central de la cometa. Se define *aspecto* (AR):

$$AR = \frac{b}{c} = \frac{b^2}{S}. \quad (1)$$

Así pues, para una cometa con forma no rectangular, y por tanto de cuerda variable a lo largo de la envergadura, se puede calcular el aspecto dividiendo el cuadrado de b entre la superficie S. Las cometas simples de un solo hilo suelen tener un AR< 2.

Como ocurre con cualquier objeto volador, las cometas tienen tres ejes de rotación: *cabeceo, balanceo y guiñada* (Fig. 2). Para que la cometa tenga un vuelo estable es necesario el control de los tres ejes, impidiendo su giro respecto a los mismos. Mediante el hilo y las bridas se consigue el control del cabeceo y el balanceo. La guiñada se consigue mediante una *cola* o elementos estabilizadores más complejos en otros tipos de cometas.

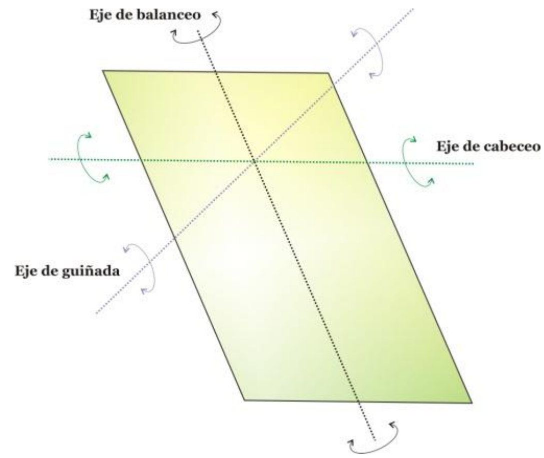


FIGURA 2. Ejes de rotación de la cometa.

El vector $\vec{W}$ es el que define la velocidad y dirección del viento respecto a tierra. $\vec{V_C}$ es el vector que define la velocidad y dirección de la cometa respecto a tierra. $\vec{W_r}$, es el vector que define la velocidad y la dirección del viento respecto a la cometa. Se cumple que:

$$\vec{W_r} = \vec{W} - \vec{V_C}. \quad (2)$$

Se denomina *ángulo de ataque* (β), al ángulo que existe entre la cuerda (c) y el vector de velocidad relativa. Se entiende por *ángulo de incidenci*a (α), al ángulo que existe entre la cuerda y el vector de velocidad del viento.

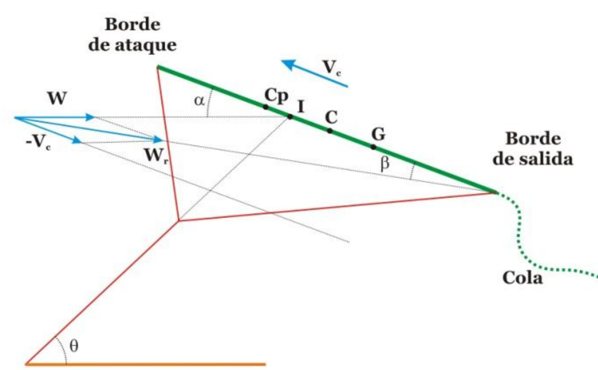


FIGURA 3. Ángulos y puntos de aplicación de las fuerzas en una cometa plana ideal.

Si V_c = 0, que es el caso que vamos a considerar entonces α = β. El ángulo que forma el hilo con el suelo se denomina *elevación* (θ).

El *centro de presiones* (Cp), es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas aerodinámicas debidas al viento. El *centro de gravedad* (G), es el punto de aplicación de todas las fuerzas debidas a la gravedad o peso de la cometa. Si la cometa es simétrica coincide con el *centro del*

[2] Las cometas no son planos rectangulares, habitualmente tienen forma de triangulo, rombo o hexágono. Pero para este estudio elemental podemos considerar que es equivalente a un rectángulo que tenga la misma superficie (S) y el mismo aspecto (AR).

plano (C). El centro de embridado (I), será el punto de aplicación de la fuerza de tensión del hilo (Fig. 3).

III. FUERZAS QUE ACTÚAN EN UNA COMETA PLANA IDEAL

A. Fuerzas aerodinámicas

Si sobre una superficie plana AB (Fig. 4), incide una corriente de aire de velocidad W, formando determinado ángulo (α), aparece sobre la misma una *fuerza normal* (D_n) perpendicular a la superficie, y aplicada en el *centro de presiones* (C_p). Debido a que el aire no es un fluido ideal, el efecto de la viscosidad, hace que aparezca también una *fuerza de frinción* (D_f) en la dirección del fluido, esta fuerza es despreciable frente a la fuerza normal para ángulos de incidencia superiores a los 10º. D_n se descompone en una fuerza perpendicular a la dirección del viento denominada *sustentación* (L) y en una componente horizontal denominada *resistencia* (D).

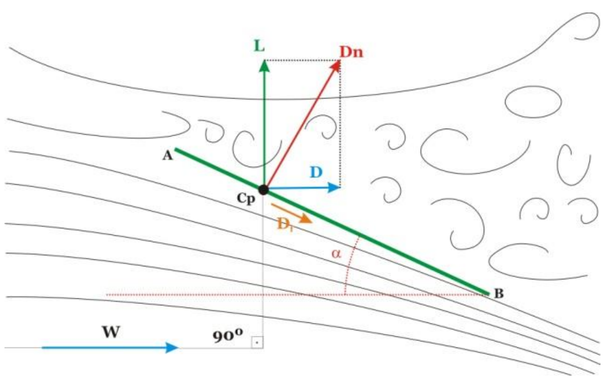


FIGURA 4. Fuerzas aerodinámicas.

La magnitud de estas fuerzas aerodinámicas y la ubicación del centro de presiones son variables con el ángulo de ataque. Si colocamos una placa plana en un túnel de viento y se mide D_n para diversos ángulos, sin variar la densidad y la velocidad del viento, se calcula el denominado *coeficiente de la fuerza normal* (C_n), definido como:

$$C_n = \frac{D_n}{\left(\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot W^2\right)\cdot S}. \tag{3}$$

Donde: ρ es la densidad de la corriente de aire y S la superficie de la placa plana.

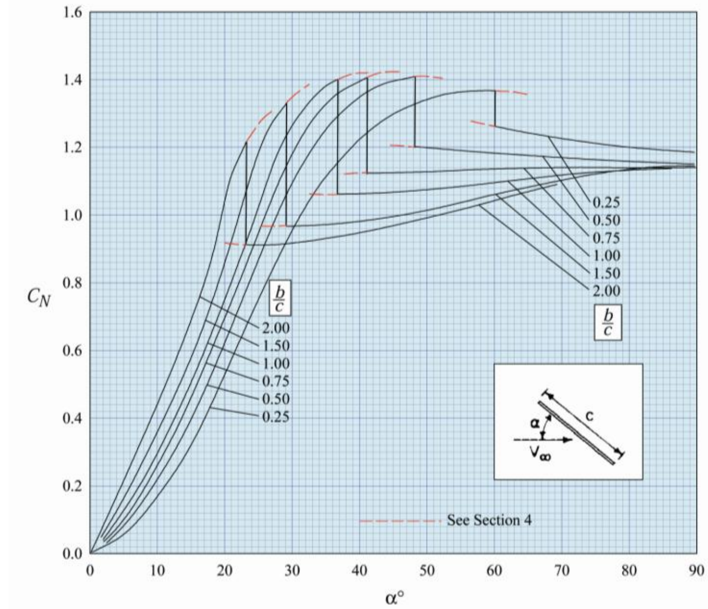


FIGURA 5. Datos de C_N para placas planas con b/c ≤ 2 en función de α (ESDU 70015).

Los valores de C_n para placas planas están recopilados en los documentos ESDU 70015 [13], para distintas geometrías, ángulos de ataque (α) y aspectos (AR) (Fig. 5).

Según se observa en las gráficas, C_n aumenta con el ángulo de ataque, para un mismo aspecto (b/c), hasta que se llega a un ángulo crítico (α_c), donde se alcanza un C_n. Si seguimos aumentando el ángulo, la cometa entra en lo que se conoce como *pérdida* (Fig. 6). En esta situación la cometa pierde sustentación (L), generando una mayor fuerza de resistencia (D), por lo tanto la cometa vuela con un ángulo de ataque alto y pero como ha disminuido la fuerza de sustentación se elevará poco sobre el suelo.

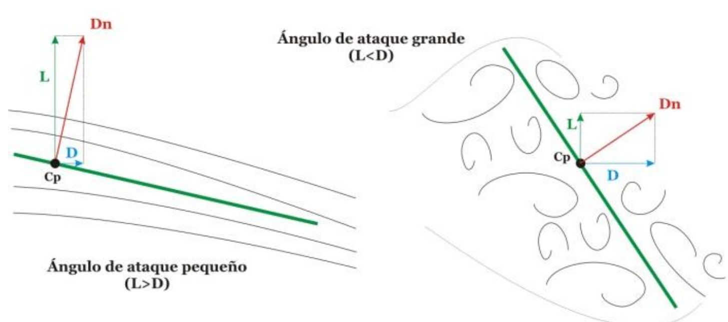


FIGURA 6. Vuelo en pérdida de una cometa plana.

Por otro lado, a medida que disminuimos el aspecto (b/c) obtenemos un coeficiente mayor, a la vez que se retrasa la entrada en pérdida, pero esta ocurre de manera más violenta originando unos saltos del valor de C_n mayores. Por lo tanto, conocido C_n, para un a y AR determinado, podemos hallar D_n:

$$D_n = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W^2 \cdot S \cdot C_n \,. \tag{4}$$

Para los diferentes ángulos de ataque (α), existirá una posición del centro de presiones (C_p) es distinta. En la Fig. 7 se muestran los valores[3] de x_{cp} /c para distintos α.

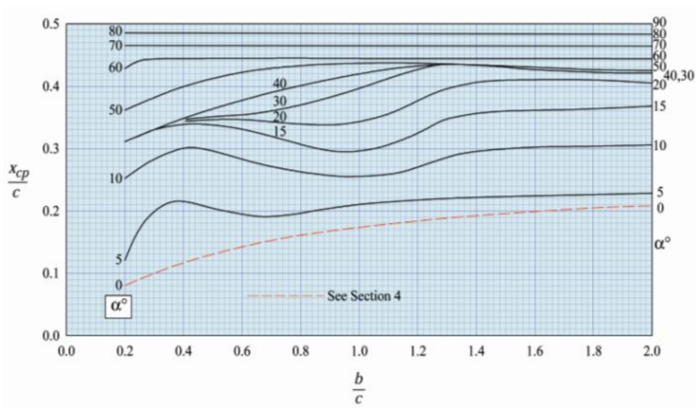


FIGURA 7. Datos de x_{Cp}/c para placas planas rectangulares con b/c ≤ 2 en función de α (ESDU 70015).

B. Peso de una cometa plana ideal

El peso de una cometa (Pc) es una fuerza constante en dirección y magnitud en cualquier posición de equilibrio (Fig. 8). Su punto de aplicación es el centro de gravedad (G), que se ubica según sea la geometría de la cometa y la distribución de los elementos estabilizadores. En la valoración de esta fuerza hay que considerar el peso del hilo (P_L), si este es importante.

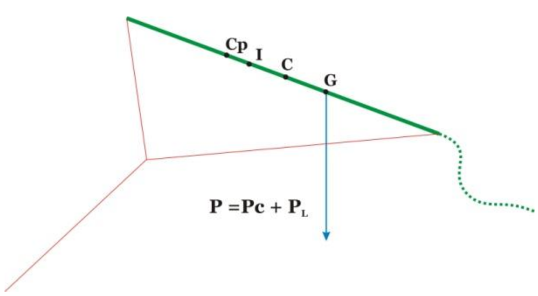


FIGURA 8. Peso de una cometa plana ideal.

Las fuerzas de gravedad se oponen al vuelo de la cometa, esta es la razón de que para poder volar una cometa hay que emplear materiales ligeros en su construcción.

[3] x_{cp} es la distancia entre el borde de ataque y C_p.

C. Fuerzas debidas a la tensión del hilo en la cometa ideal

La fuerza de tensión del hilo (Fig. 9), se encuentra aplicada en el punto de unión de la brida con el hilo, y es tangente en ese punto a la forma que adquiere el hilo en el vuelo, la tensión en ese punto se puede descomponer en una componente vertical (T_v) y una componente horizontal (T_h). Esta fuerza, se transmite a través del hilo hasta el piloto, siendo la fuerza que hay que realizar para mantener la cometa bajo control.

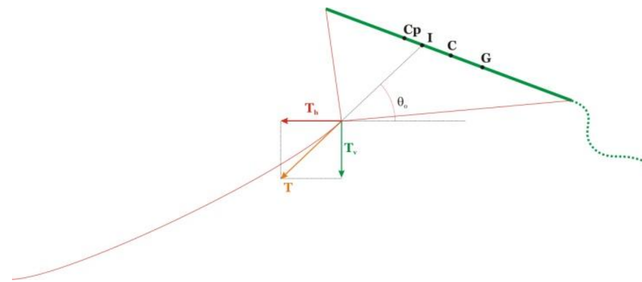


FIGURA 9. Fuerzas debidas a la tensión del hilo en la cometa ideal.

IV. ESTUDIO DEL EQUILIBRIO DE UNA COMETA PLANA IDEAL

En este apartado, vamos a considerar las condiciones para que una cometa plana ideal vuele en equilibrio. Para simplificar las cosas realizaremos este estudio sobre el plano vertical del viento.

Un cuerpo sometido a un número de fuerzas se dice que está en equilibrio cuando se cumple que la resultante de todas las fuerzas es nula y el momento total respecto a cualquier eje de giro esta compensado. Pero una vez alcanzado el equilibrio hay que cerciorarse si el mismo es estable, es decir si ante la respuesta a una pequeña perturbación de su estado (desplazamiento, empuje, etc.), el sistema se desvía poco de esta posición de equilibrio, reaccionando para volver a una posición estable. En caso contrario el equilibrio será inestable.

Consideremos la cometa plana ideal con todas sus fuerzas aplicadas. (Fig. 10). Las condiciones de equilibrio exigen que $\vec{T}$ sea igual y de sentido contrario a la resultante de la composición de $\vec{P}$ y $\overrightarrow{D_n}$.

$$\vec{T} = \overrightarrow{D_n} + \vec{P} \Rightarrow \begin{cases} T = L - P \\ T_h = D \end{cases} . \tag{5}$$

Como:

$$L = D_n \cdot sen\alpha \qquad D = D_n \cdot cos\,\alpha \,, \tag{6}$$

$$\begin{cases} T_v = D_n \cdot sen\alpha - P \\ T_h = D_n \cdot cos\,\alpha \end{cases} . \qquad (7)$$

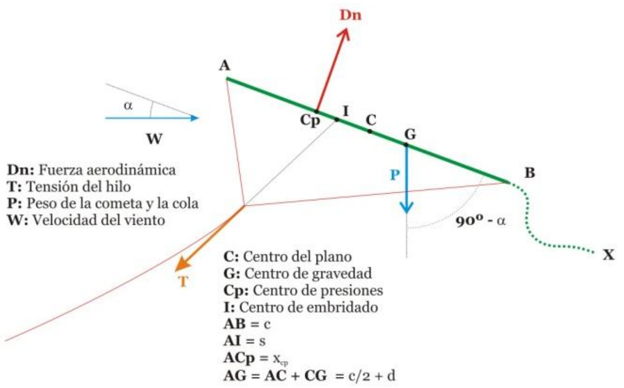


FIGURA 10. Fuerzas aplicadas en el vuelo de una cometa plana ideal.

Por lo tanto para que se cumpla el equilibrio, la fuerza de sustentación (L) debe vencer el peso (P), pero como esta fuerza aerodinámica puede ser superior al peso, debe aparece una tercera fuerza que compense este exceso, la tensión del hilo (T). Por lo tanto la componente vertical (Tv), compensa el exceso de fuerza de sustentación y la componente horizontal (Th), anulará la resistencia D. Las condiciones de equilibrio exigen que los momentos respecto a un punto de las fuerzas se anulen. Si tomamos momentos respecto a I:

$$(x_{Cp} - s) \cdot D_n = \left(\frac{c}{2} + d - s \right) \cdot P \cdot cos\,\alpha . \qquad (8)$$

Como:

$$D_n = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W^2 \cdot S \cdot C_n . \qquad (9)$$

Queda:

$$(x_{Cp} - s) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot W^2 \cdot S \right) \cdot C_n = \left(\frac{c}{2} + d - s \right) \cdot P \cdot cos\,\alpha . \qquad (10)$$

Para simplificar el estudio consideremos dos casos: Condiciones de viento fuerte y viento moderado o débil.

A. Condiciones de viento fuerte

Para vientos superiores a 20Km/h, el peso P de la cometa puede despreciarse en comparación con la fuerza aerodinámica. Si aplicamos las condiciones de equilibrio en esta nueva situación, se llega a la conclusión que la cometa estará en equilibrio cuando el centro de presiones (C_p) coincide con el centro de embridado (I) (Fig. 11)

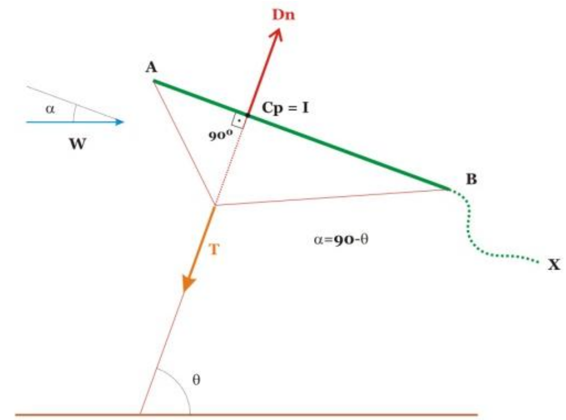


FIGURA 11. Vuelo de una cometa en condiciones de viento fuerte.

Por lo tanto, la fuerza aerodinámica D_n y la tensión T, tendrán el mismo modulo y sentido contrario, perpendiculares a la superficie de la cometa. Al coincidir Cp con I, no existirá ningún momento de dichas fuerzas aplicadas. Estudiemos las condiciones de estabilidad que implican esta situación.

Si partimos de la cometa en su posición de equilibrio, y le aplicamos una perturbación (Δ) en el borde de salida, se producirá la situación mostrada en la Fig. 12.

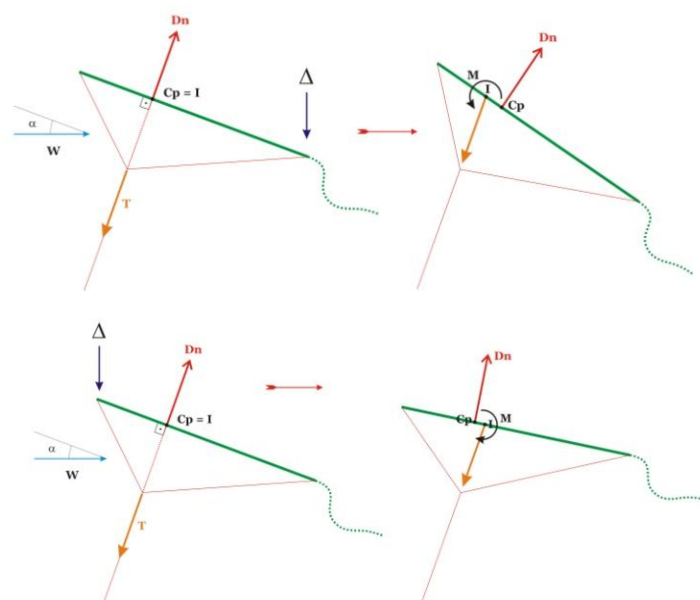


FIGURA 12. Perturbación en el borde de salida (arriba) y en el borde ataque (abajo) durante el vuelo de una cometa ideal.

La perturbación Δ aleja a la cometa de su situación de equilibrio, el centro de presiones y el centro de embridado se separan, por lo tanto las fuerzas dejan de estar alineadas, apareciendo un momento M respecto a I, que en la situación anterior era nulo. Este momento hará que la cometa tienda a girar hasta alcanzar de nuevo la posición de equilibrio. Una situación parecida ocurre si la perturbación se produce en el borde de ataque de la cometa.

B. Condiciones de viento moderado o débil

En el caso de existir un viento moderado, ya no se puede despreciar la fuerza de gravedad, y por tanto la cometa presenta el diagrama de fuerzas mostrado anteriormente. El cálculo del ángulo de ataque en la situación de equilibrio se complica, ya que Cp y I, no coincidirá en el equilibrio. A pesar de todo, de una manera cualitativa podemos prever el comportamiento posible de la cometa. Para lo cual nos plantearemos dos situaciones posibles (Fig. 13).

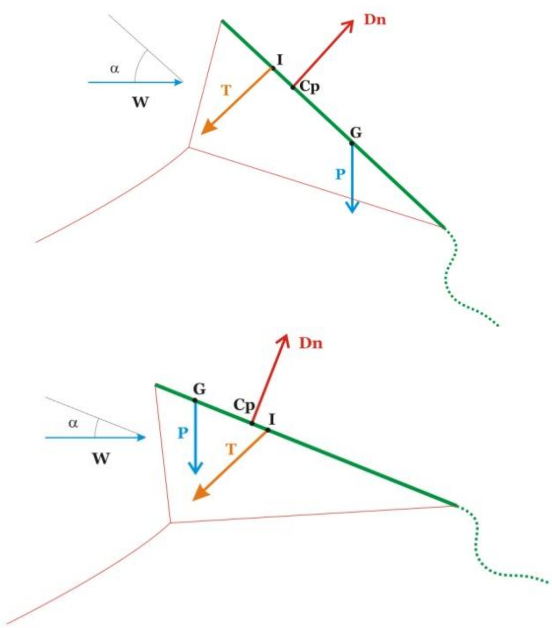


FIGURA 13. Vuelo de la cometa en condiciones de viento moderada con el centro de gravedad detrás (arriba) y delante (abajo).

i) Centro de gravedad detrás

Al ser el viento moderado, lleva consigo una disminución de la fuerza aerodinámica (D_n) y la tensión (T), esto obliga a que la cometa vuele con un gran ángulo de ataque, desplazándose el centro de presiones hacia el centro de gravedad, para intentar alcanzar el equilibrio. Esta situación implica que la cometa volará con poca elevación y si la fuerza aerodinámica no compensa la tensión y el peso, la cometa se caerá.

ii) Centro de gravedad delante

La disminución del viento, hace como en el caso anterior que disminuyan la fuerza aerodinámica (D_n) y por tanto también la tensión (T). Para buscar el equilibrio el centro de presiones tienen que desplazarse hasta el centro de gravedad, disminuyendo el ángulo de ataque, por tanto perdiendo sustentación y por tanto altura, pudiendo caer al suelo, por lo tanto las cometas con el centro de gravedad adelantado no son adecuadas para volar con vientos débiles.

La dinámica del equilibrio, para el caso de las cometas que vuelan con vientos suaves es similar a lo expuesto para vientos fuertes, con la peculiaridad de que el peso tendrá una influencia en el ángulo de ataque inicial.

V. ESTUDIO DEL VUELO DE LA COMETA EMPLEANDO LAS ECUACIONES DE EULER PARA UN SÓLIDO RÍGIDO

Se puede hacer un estudio más detallado de la mecánica del vuelo de la cometa, si empleamos las ecuaciones de Euler para un sólido rígido.[4]

A. Ecuaciones generales del movimiento de la cometa

Sea una cometa en vuelo (Fig. 14), si consideramos que la cometa y la brida forman un sólido rígido, definimos tres sistemas de referencia.

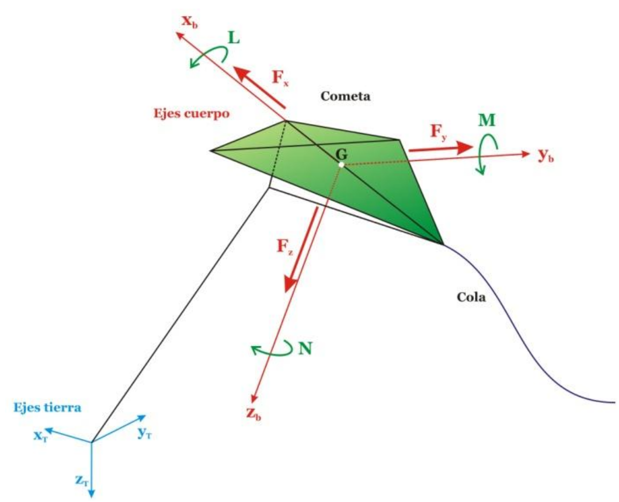


FIGURA 14. Sistemas de referencia y fuerzas en el vuelo de una cometa.

a) Sistema de ejes tierra:

Eje $\mathbf{x_T}$ según la dirección del viento y con sentido contrario. Eje $\mathbf{z_T}$ según la vertical local apuntando al centro de la tierra. Eje $\mathbf{y_T}$ formando un triedro a derechas.

b) Sistema de ejes horizonte local

$\mathbf{x_h}$ $\mathbf{y_h}$ $\mathbf{z_h}$ paralelos a los ejes tierra correspondientes.

c) Sistema de ejes cuerpo.

G centro de masa de la cometa. $\mathbf{X_b}$: según la dirección que marca la varilla central de la cometa. $\mathbf{Z_b}$**:** contenido en el

[4] Ver apéndice.

plano de simetría, perpendicular a X_b y con sentido hacia abajo en actitud normal de vuelo.

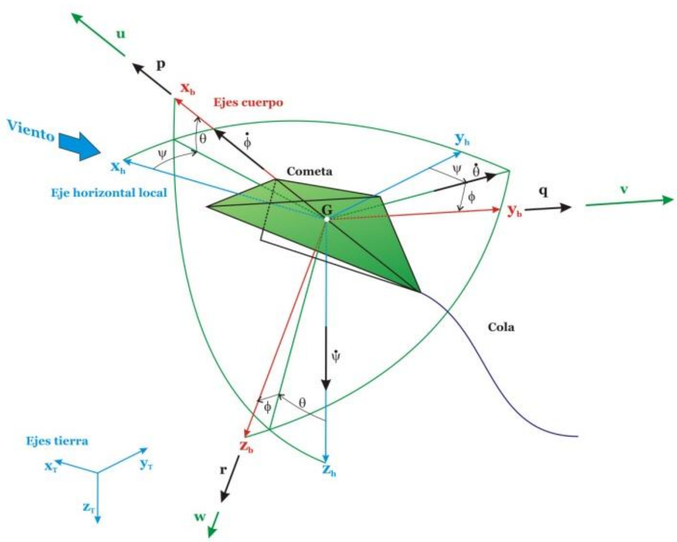


FIGURA 15. Sistemas de referencia y fuerzas en el vuelo de una cometa.

Sea $\mathbf{F_x}$, $\mathbf{F_y}$, $\mathbf{F_z}$, las componentes referidas a los ejes del cuerpo de las fuerzas aplicadas a la cometa y **L, M, N**, los momentos de balance, cabeceo y guiñada respectivamente de la cometa.

Ahora separamos la cometa del hilo (Fig. 15), de forma que la cometa y la brida forman un sólido rígido, sometido a las anteriores fuerzas y momentos. Si denominamos a ψ, θ y ϕ a los ángulos de guiñada, asiento y balance respectivamente, que son los que orientan el sistema de ejes cuerpo respecto al sistema de ejes horizonte local. Denominamos **u, v** y **w** a las velocidades absolutas en ejes cuerpo, **p, q** y **r** serán las velocidades angulares absolutas también referidas a los ejes cuerpo. Entonces se cumplen las siguientes relaciones cinemáticas angulares:

$$\begin{cases} p=\dot{\phi}-\dot{\psi}\cdot sen\phi \\ q=\dot{\theta}\cdot cos\,\phi+\dot{\psi}\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi \\ r=-\dot{\theta}\cdot sen\phi+\dot{\psi}\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi \end{cases}. \qquad (11)$$

Consideremos que el tensor de inercia de la cometa respecto a los ejes del cuerpo es:

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Los productos de inercia $I_{xy}=I_{yx}$ y $I_{zy}=I_{yz}$ son nulos ya que los ejes x e z son ejes de simetría de la cometa, el signo negativo de I_{xz}, es debido a la orientación de los ejes.

Si denominamos $\vec{T}(T_x,T_y,T_z)$ a la tensión del hilo, $\vec{F}_A(F_{A_x},F_{A_y},F_{A_z})$ la fuerza aerodinámica, cuyas componentes se refieren al eje del cuerpo, y $\vec{P}=m\cdot g\cdot\vec{k}_h$ al peso de la cometa respecto al eje horizontal local, pasando al eje del cuerpo tenemos:

$$\vec{P}_n=\begin{pmatrix} -m\cdot g\cdot sen\theta \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot cos\,\phi \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Aplicamos las ecuaciones de la cantidad de movimiento:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= m\cdot\left(\dot{v}_{G_1}+\omega_2\cdot v_{G_3}-\omega_3\cdot v_{G_2}\right) \\ F_2 &= m\cdot\left(\dot{v}_{G_2}+\omega_3\cdot v_{G_1}-\omega_1\cdot v_{G_3}\right) \\ F_3 &= m\cdot\left(\dot{v}_{G_3}+\omega_1\cdot v_{G_2}-\omega_2\cdot v_{G_1}\right) \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases} -m\cdot g\cdot sen\theta+F_{A_x}+T_x=m\cdot\left(\dot{u}+q\cdot w-r\cdot v\right) \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi+F_{A_y}+T_y=m\cdot\left(\dot{v}+r\cdot u-p\cdot w\right) \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot cos\,\phi+F_{A_z}+T_z=m\cdot\left(\dot{w}+p\cdot v-q\cdot u\right) \end{cases}. \qquad (14)$$

Si denominamos L_T, M_T N_T, al los momentos dinámicos que produce la tensión del hilo alrededor del centro de gravedad, y L_A, M_A N_A son los momentos aerodinámicos en ejes cuerpo. Las ecuaciones de Euler son:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \sum_1^3 I_{1j}\cdot\dot{\omega}_j+\sum_1^3\dot{\omega}_j\cdot\left(I_{3j}\cdot\omega_2-I_{2j}\cdot\omega_3\right) \\ G_2 &= \sum_1^3 I_{2j}\cdot\dot{\omega}_j+\sum_1^3\dot{\omega}_j\cdot\left(I_{1j}\cdot\omega_3-I_{3j}\cdot\omega_1\right) \\ G_3 &= \sum_1^3 I_{3j}\cdot\dot{\omega}_j+\sum_1^3\dot{\omega}_j\cdot\left(I_{2j}\cdot\omega_1-I_{1j}\cdot\omega_2\right) \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases} L_A+L_T=I_x\cdot\dot{p}-I_{xy}\cdot\dot{r}+\left(I_z-I_y\right)\cdot q\cdot r-I_{xz}\cdot p\cdot q \\ M_A+M_T=I_y\cdot\dot{q}-\left(I_z+I_x\right)\cdot p\cdot r+I_{xz}\cdot\left(p^2-r^2\right) \\ N_A+N_T=I_z\cdot\dot{r}-I_{xz}\cdot\dot{p}-\left(I_x-I_y\right)\cdot p\cdot q-I_{xz}\cdot q\cdot r \end{cases}. \qquad (15)$$

Luego las ecuaciones generales del movimiento de la cometa son:

$$\begin{cases} -m\cdot g\cdot sen\theta+F_{A_x}+T_x=m\cdot\left(\dot{u}+q\cdot w-r\cdot v\right) \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi+F_{A_y}+T_y=m\cdot\left(\dot{v}+r\cdot u-p\cdot w\right) \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot cos\,\phi+F_{A_z}+T_z=m\cdot\left(\dot{w}+p\cdot v-q\cdot u\right) \\ L_A+L_T=I_x\cdot\dot{p}-I_{xy}\cdot\dot{r}+\left(I_z-I_y\right)\cdot q\cdot r-I_{xz}\cdot p\cdot q \\ M_A+M_T=I_y\cdot\dot{q}-\left(I_z+I_x\right)\cdot p\cdot r+I_{xz}\cdot\left(p^2-r^2\right) \\ N_A+N_T=I_z\cdot\dot{r}-I_{xz}\cdot\dot{p}-\left(I_x-I_y\right)\cdot p\cdot q-I_{xz}\cdot q\cdot r \end{cases}. \qquad (16)$$

Que constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden, que junto a las relaciones cinemáticas angulares, podemos calcular las incógnitas del sistema que son: $u, v, w, p, q, r, \theta, \phi$ y ψ

B. Ecuaciones del vuelo estacionario de la cometa

Para encontrar las soluciones estacionarias debemos hacer que todas las variables en ejes cuerpo del sistema permanezcan constantes con el tiempo. Si además suponemos que todas las velocidades angulares son nulas el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} -m\cdot g\cdot sen\theta + F_{A_x} + T_x = 0 \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi + F_{A_y} + T_y = 0 \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot cos\,\phi + F_{A_z} + T_z = 0 \\ L_A + L_T = 0 \\ M_A + M_T = 0 \\ N_A + N_T = 0 \end{cases}. \qquad (17)$$

Las relaciones cinemáticas angulares implican:

$$\left.\begin{array}{l} p = \dot{\phi} - \dot{\psi}\cdot sen\phi \\ q = \dot{\theta}\cdot cos\,\phi + \dot{\psi}\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi \\ r = -\dot{\theta}\cdot sen\phi + \dot{\psi}\cdot cos\,\theta\cdot sen\phi \end{array}\right\} \Rightarrow p = q = r = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} = 0 \rightarrow \psi = cte \\ \dot{\theta} = 0 \rightarrow \theta = cte \\ \dot{\phi} = 0 \rightarrow \phi = cte \end{cases} \qquad . \quad (18)$$

Al ser la cometa simétrica la ecuación de fuerza según el eje **y**, y las de momento según los ejes **x** y **z** se cumplirán siempre, además se debe tener en cuenta que: el ángulo de balance es nulo (ϕ = 0) y el de asiento coincide con el ángulo de ataque ($\theta = \alpha$). Luego, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\begin{cases} -m\cdot g\cdot sen\theta + F_{A_x} + T_x = 0 \\ m\cdot g\cdot cos\,\theta\cdot cos\,\phi + F_{A_z} + T_z = 0\,. \\ M_A + M_T = 0 \end{cases} \qquad (19)$$

Se ha reducido el problema al estudio del equilibrio sobre el plano vertical del viento, tal como vimos en el apartado IV, pero con las ecuaciones referidas a los ejes cuerpo y tomando momentos respecto al centro de gravedad (Fig. 16).

La tensión $\vec{T}$ esta aplicada en el punto E, para hallar sus coordenadas (x_E, z_E) en función de las longitudes de la brida (L_1, L_2) y la posición del centro de gravedad (d_1, d_2), se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} L_1^2 = \left(x_E - d_1\right)^2 + z_E^2 \\ L_2^2 = \left(x_E + d_2\right)^2 + z_E^2\,. \\ d_1 + d_2 = c \end{cases} \qquad (20)$$

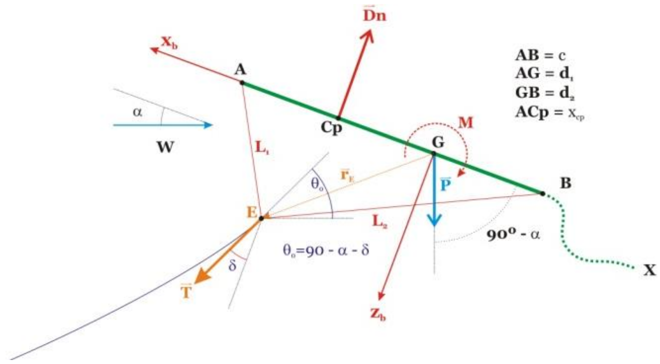


FIGURA 16. Vuelo estacionario de la cometa.

Que constituyen un sistema de ecuaciones no lineales. Por lo tanto se deben introducir los valores (L_1, L_2, D_1, D_2) de tal manera que los hilos puedan unirse en un solo punto ya que de otra manera dicho sistema daría soluciones imaginarias. El momento de $\vec{T}$ respecto al centro de gravedad G es igual a:

$$\vec{M}_T = \vec{r}_E \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i}_b & \vec{j}_b & \vec{k}_b \\ x_E & 0 & z_E \\ T_x & 0 & T_z \end{vmatrix} = \left(z_E\cdot T_x - x_E\cdot T_z\right)\cdot \vec{j}_b\,. \qquad (21)$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$\begin{cases} -m\cdot g\cdot sen\alpha + F_{Ax} + T_x = 0 \\ m\cdot g\cdot cos\,\alpha + F_{Az} + T_z = 0 \\ M_T + M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m\cdot g\cdot sen\alpha + T_x = 0 \\ m\cdot g\cdot cos\,\alpha - D_n + T_z = 0 \\ z_E\cdot T_x - x_E\cdot T_z + D_n\cdot(d_1 - x_{Cp}) = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} -m\cdot g\cdot sen\alpha + T_x = 0 \Rightarrow T_x = m\cdot g\cdot sen\alpha \\ m\cdot g\cdot cos\,\alpha - D_n + T_z = 0 \Rightarrow T_z = D_n - m\cdot g\cdot cos\,\alpha \\ z_E\cdot T_x - x_E\cdot T_z + D_n\cdot(d_1 - x_{Cp}) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_E\cdot m\cdot g\cdot sen\alpha - x_E\cdot(D_n - m\cdot g\cdot cos\,\alpha)$$
$$+ D_n\cdot(d_1 - x_{Cp}) = 0 \Rightarrow z_E\cdot m\cdot g\cdot sen\alpha + x_E\cdot m\cdot g\cdot cos\,\alpha -$$
$$- x_E\cdot D_n + d_1\cdot D_n - x_{Cp}\cdot D_n = 0$$

(22)

Si ahora dividimos la ecuación por $\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot W^2\cdot c$, donde *W* es la velocidad del viento, S la superficie de la cometa, ρ la densidad del aire y c la cuerda de la cometa:

$$\frac{z_E\cdot m\cdot g\cdot sen\alpha}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot W^2\cdot c}+\frac{x_E\cdot m\cdot g\cdot cos\,\alpha}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot W^2\cdot c}- \\ -\frac{x_E\cdot D_n}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot W^2\cdot c}+\frac{d_1\cdot D_n}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot W^2\cdot c}-\frac{x_{Cp}\cdot D_n}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot S\cdot W^2\cdot c}=0 \quad .(23)$$

El denominado *coeficiente de la fuerza normal* (C_n), que tenía como expresión:

$$C_n=\frac{D_n}{\left(\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot W^2\right)\cdot S}\,. \quad (24)$$

Definiendo el coeficiente $\sigma=\frac{m\cdot g}{\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot W^2\cdot S}$, la ecuación del momento queda en función del ángulo de ataque (α):

$$\frac{\sigma}{c}\cdot\left(z_E\cdot sen\alpha+x_E\cdot cos\,\alpha\right)+\left(\frac{d_1-x_E}{c}-\frac{x_{Cp}}{c}\right)\cdot C_n=0\,. \quad (25)$$

Resolviendo esta es la ecuación que nos dará el valor de α que hace que la cometa esté en equilibrio.

C. Aplicación numérica del vuelo estacionario de la cometa

Sea una cometa rectangular con una cuerda c = 0,80m y envergadura b = 0,60m, por lo que su aspecto es de AR = 0,75 y por tanto su superficie es de $S = 0{,}48\text{m}^2$. El centro de gravedad está situado a una distancia d_1= 0,50m del borde de ataque, y la cometa tiene una masa total de 0,1Kg. Suponemos definidos los ejes cuerpo, con origen el centro de gravedad G.

La cuerda se ata a la cometa a través de dos bridas en un punto E de coordenadas respecto a los ejes cuerpo (x_E =0,304, z_E = 0,24). Las longitudes de esas bridas por lo tanto son:

$$\begin{cases} L_1^2=\left(x_E-0{,}5\right)^2+z_E^2 \\ L_2^2=\left(x_E+0{,}3\right)^2+z_E^2 \\ d_2=0{,}8-0{,}5=0{,}3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} L_1=0{,}31\ m \\ L_2=0{,}61\ m \end{cases}. \quad (26)$$

Si la cometa vuela con un viento de velocidad W = 2,1m/s y sabiendo que $\rho = 1.225\text{Kg/m}^3$, podemos calcular el valor de σ = 0,76. Ahora se hallan los valores de α que hacen nula la Ec. (25), para ello obtenemos los valores de C_n y X_{Cp} para AR = 0,75 de las ESDU 70015, calculando valores de la función (25) que podemos representar (Fig. 17). Luego para un viento de 2,1m/s, la cometa dispone de tres puntos de equilibrio (α_1, α_2, α_3), ya que éste es el número de veces que la curva corta al eje "α" y que por lo tanto la suma de momentos (25) se anula. El primer ángulo de ataque de equilibrio (α_1) se presenta en torno a los 36º. Esta posición es la que normalmente adquiere la cometa durante su vuelo y es la que tiene mayor eficiencia.

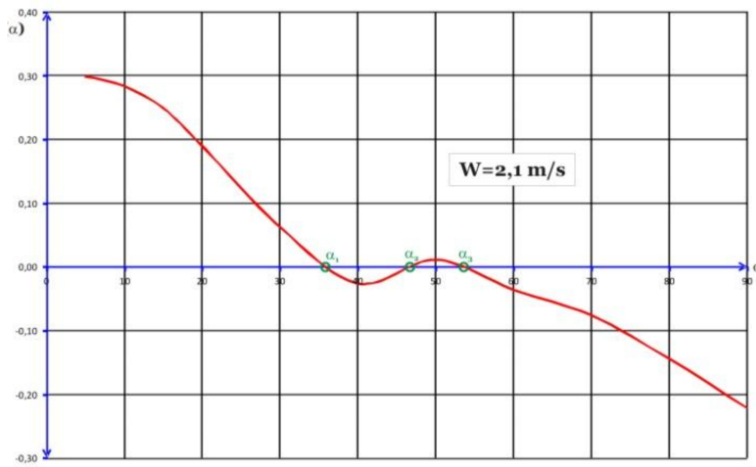
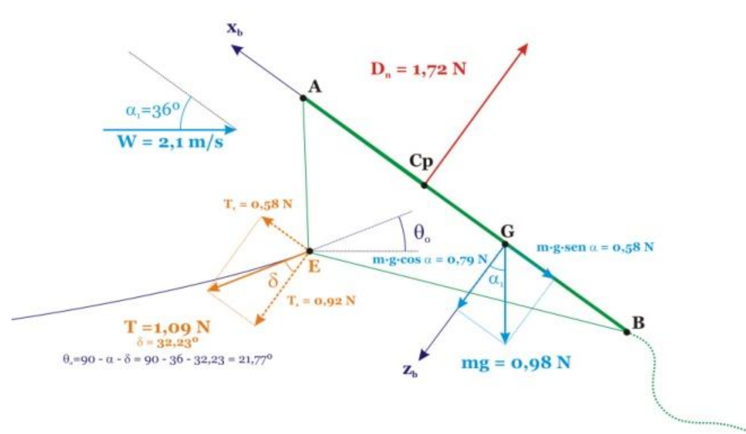


FIGURA 17. Grafica de momentos en función de α.

La segunda posición (α_2) se encuentra cerca de los 47º pero es inestable, ya que la pendiente de la curva mayor que cero en ese punto, esto significa que un incremento del ángulo de ataque produciría un momento positivo que haría aumentar dicho ángulo y sacando a la cometa del equilibrio.



La tercera solución (α_3) está cerca de los 52º, para este ángulo de ataque la resistencia sería muy elevada, en este caso la cometa volaría por debajo de la horizontal, que el ángulo de elevación θ_o sale negativo. La existencia de tres posiciones de equilibrio para ciertas configuraciones de brida ha sido comprobada tanto experimental como teóricamente en [14].

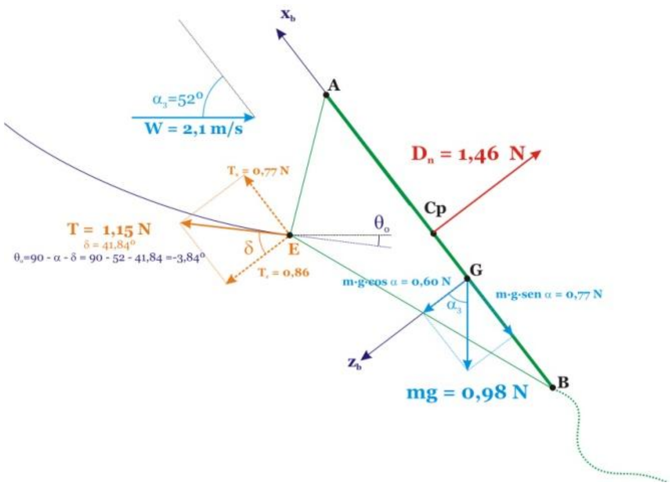


FIGURA 18. Posición de equilibrio para α_1 = 36º y W = 2,1m/s (arriba) y para α_3 = 52º y W = 2,1m/s (abajo).

Veamos cómo influye la velocidad del viento. Sea ahora W= 3m/s (σ = 0, 37), la cometa pasa a tener un solo ángulo de ataque (α_1=21º) menor que en la situación anterior (Fig. 19), este se observa siempre que se vuela una cometa, es decir, siempre que el viento aumenta la cometa disminuye el ángulo α, aumentando su altura sobre el horizonte.

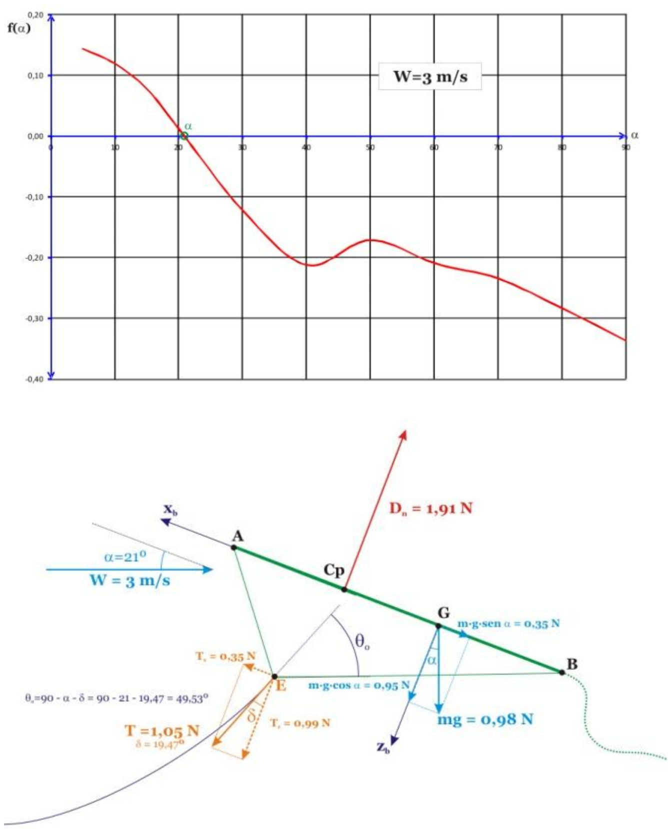


FIGURA 19. Gráfica de momentos en función de α (arriba) y posición de equilibrio para α = 21º y W = 3m/s (abajo).

Con un viento aún mayor, W= 6m/s (σ = 0,09), la cometa disminuye aún más su ángulo de ataque, alcanzando los 10º (Fig. 20). En este caso se comprueba que las condiciones de viento fuerte estudiadas en el apartado IV se cumplen (Fig. 21).

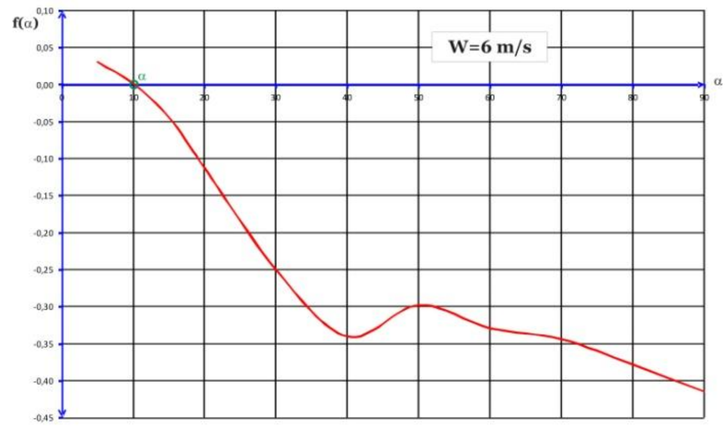


FIGURA 20. Gráfica de momentos para W= 6m/s.

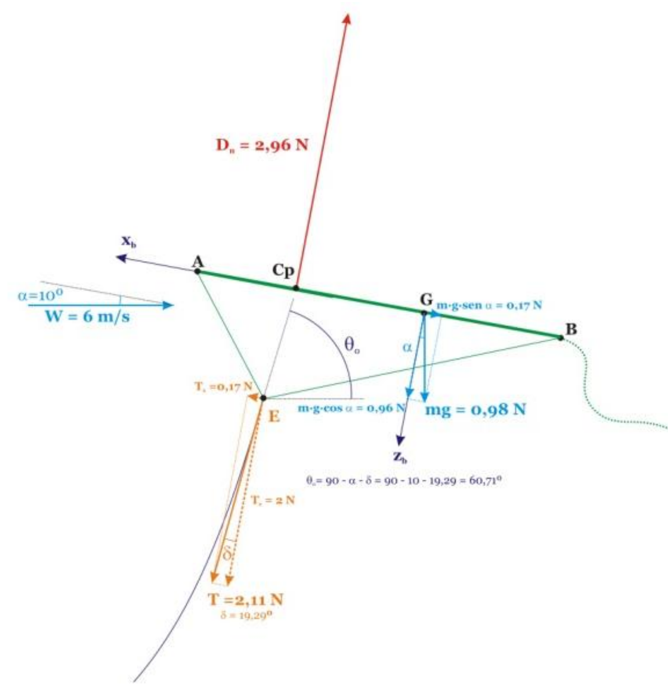


FIGURA 21. Posición de equilibrio para α = 10º y W = 6m/s.

Si ahora, el viento disminuye W=1,8 m/s (σ = 1,03), el ángulo aumenta (α_1 = 75º), disminuyendo la altura, haciéndose más negativo el ángulo θ_o.

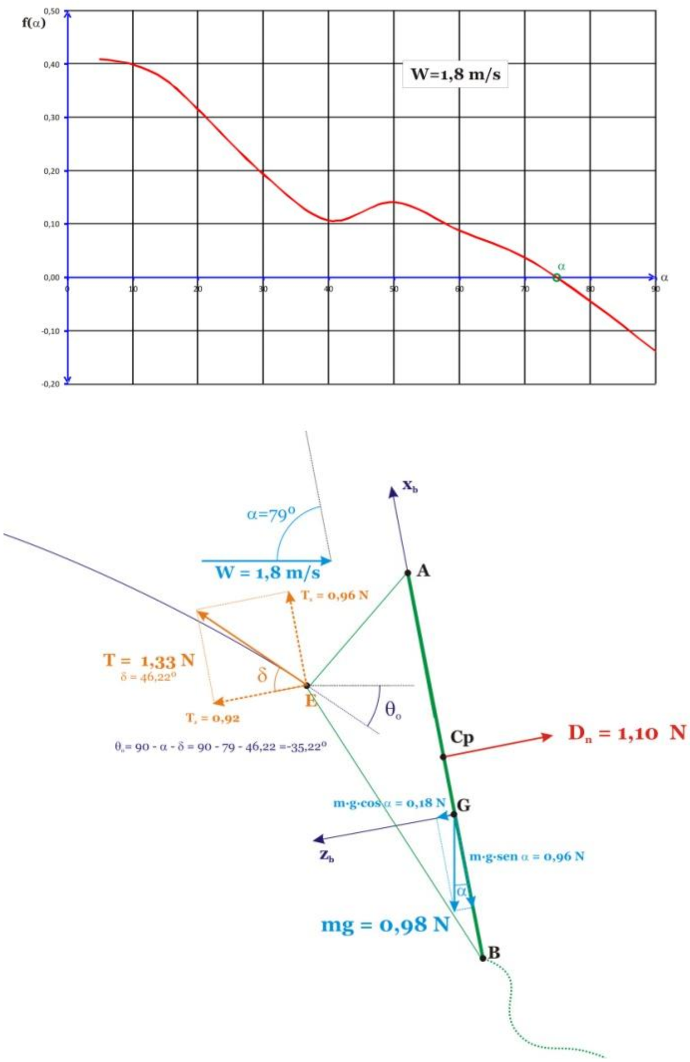


FIGURA 22. Gráfica de momentos en función de α (arriba) y posición de equilibrio para α = 75º y W = 1,8m/s (abajo).

VI. EFECTO DEL VIENTO SOBRE EL HILO DE UNA COMETA

Durante el vuelo, el hilo adquiere la forma de una curva debido a la acción de su propio peso y del viento que le incide, veamos cómo influye en la altura máxima que puede volar una cometa.

Consideremos un hilo con un peso de P_L N/m^2 sometido a una tensión T_o en el punto de la brida de una cometa que se encuentra volando bajo un viento de velocidad W.

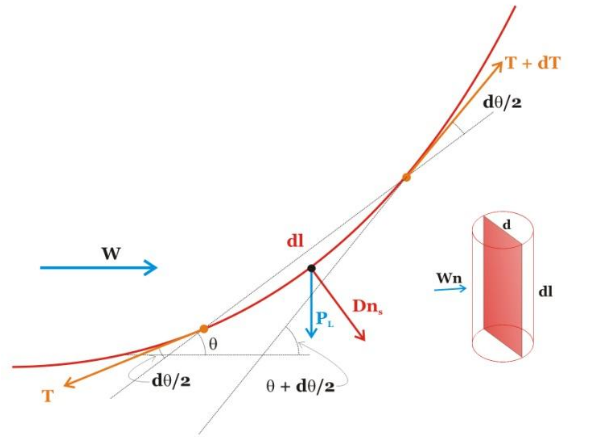


FIGURA 23. Porción de hilo de la cometa (*dl*) sometido a su propio peso, a la acción del viento y a una fuerza de tensión.

A una longitud del hilo *l* consideramos un *dl*. (Fig. 23) Si aplicamos la condición de equilibrio a las fuerzas presentes en este *dl*:

$$\left.\begin{aligned}(P_L\cdot\cos\theta+D_{n_s})\cdot dl=T\cdot d\theta\\ P_L\cdot sen\theta\cdot dl=dT\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{dT}{T}=\frac{P_L\cdot sen\theta}{P_L\cdot\cos\theta+D_{n_s}}\cdot d\theta \qquad (27)$$

Suponemos que la porción de hilo *dl* es un plano de superficie efectiva frontal S igual a d·*dl*, siendo *d* el diámetro del hilo y colocado perpendicular a la dirección del viento, que en este caso tendrá una velocidad de $Wn=W\cdot sen\ \theta$. (Fig. 23).

Ds expresado por unidad de longitud es igual a:

$$\begin{aligned}D_{n_s}&=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot W_n^2\cdot S\cdot C_s=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\underbrace{(W\cdot sen\theta)^2}_{W_n^2}\cdot d\cdot C_s=\\&=\frac{1}{2}\cdot C_s\cdot\rho\cdot W^2\cdot d\cdot sen^2\theta\end{aligned} \qquad (28)$$

Donde el coeficiente Cs podemos considerarlo igual a 1,1 y d es el diámetro del hilo.

Haciendo el cambio de variable ($x=\cos\theta\Rightarrow dx=-sen\theta\cdot d\theta$) y definiendo la constante B:

$$\begin{aligned}&B=\frac{\frac{1}{2}\cdot C_s\cdot\rho\cdot W^2\cdot d}{P_L}\Rightarrow\\&\Rightarrow\frac{D_{n_s}}{P_L}=B\cdot sen^2\theta=B\cdot\left(1-\cos^2\theta\right)=B\left(1-x^2\right)\end{aligned} \qquad (29)$$

Queda:

$$\frac{dT}{T}=\frac{P_L\cdot sen\theta}{P_L\cdot \cos\theta+D_{n_s}}\cdot d\theta=\frac{sen\theta\cdot d\theta}{\dfrac{D_{n_s}}{P_L}+\cos\theta}= \\ =\frac{sen\theta\cdot d\theta}{B\cdot sen^2\theta+\cos\theta}=-\frac{dx}{B\cdot(1-x^2)+x} \quad . \qquad (30)$$

La ecuación se integra:

$$\int\frac{dT}{T}=-\int\frac{dx}{B\cdot(1-x^2)+x}=\int\frac{dx}{B\cdot x^2+x-B}\Rightarrow \\ \Rightarrow \ln T=-\frac{1}{\sqrt{4\cdot B^2+1}}\cdot \ln\left[\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\cdot B^2}}+x-\dfrac{1}{2\cdot B}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\cdot B^2}}-x-\dfrac{1}{2\cdot B}}\right]+C \quad . \qquad (31)$$

Para ver el orden de magnitud de la constante B, consideremos una cometa que está volando con una velocidad del viento (W) de 5m/s y posee un hilo de diámetro (d) igual a 0,5mm y un peso del hilo P_L igual a $8{,}83\cdot 10^{-4}$N/m, consideramos la densidad del aire como $1{,}225$kg/m^3.

$$B=\frac{\frac{1}{2}\cdot C_s\cdot\rho\cdot W^2\cdot d}{P_L}= \\ =\frac{\frac{1}{2}\cdot 1{,}1\cdot 1{,}225\,\dfrac{Kg}{m^3}\cdot 5^2\left(\dfrac{m}{s}\right)^2\cdot 0{,}0005\ m^2}{8{,}83\cdot 10^{-4}\ \dfrac{N}{m}}=9{,}55\approx 10 \quad . \qquad (32)$$

Luego es mucho más grande que uno, por lo que podemos hacer las siguientes simplificaciones:

$$\frac{1}{\sqrt{4\cdot B^2+1}}\approx\frac{1}{2\cdot B} \quad , \qquad \sqrt{1-\frac{1}{4\cdot B^2}}\approx 1 \qquad (33)$$

$$\ln T=-\frac{1}{\sqrt{4\cdot B^2+1}}\cdot \ln\left[\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\cdot B^2}}+x-\dfrac{1}{2\cdot B}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4\cdot B^2}}-x-\dfrac{1}{2\cdot B}}\right]\approx \\ \approx\frac{1}{2\cdot B}\cdot \ln\left[\frac{1+\dfrac{1}{2\cdot B}+x}{1-\dfrac{1}{2\cdot B}-x}\right] \quad , \qquad (34)$$

$$\ln T\Big|_{T_0}^{T}=\frac{1}{2\cdot B}\cdot \ln\left[\frac{1+\dfrac{1}{2\cdot B}-\cos\theta}{1-\dfrac{1}{2\cdot B}+\cos\theta}\right]_{\theta_0}^{\theta}\Rightarrow \\ \Rightarrow \ln\frac{T}{T_0}=\ln\frac{\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot B}-\cos\theta}{1-\frac{1}{2\cdot B}+\cos\theta}}{\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot B}-\cos\theta_0}{1-\frac{1}{2\cdot B}+\cos\theta_0}}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{T}{T_0}=\left(\dfrac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2\cdot B}}\\ A(\theta)=\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot B}-\cos\theta}{1-\frac{1}{2\cdot B}+\cos\theta}\end{cases} \qquad (35)$$

Donde T_0 y $A(\theta_0)$ es la tensión y la constante para el punto E de enganche entre la brida y el hilo.

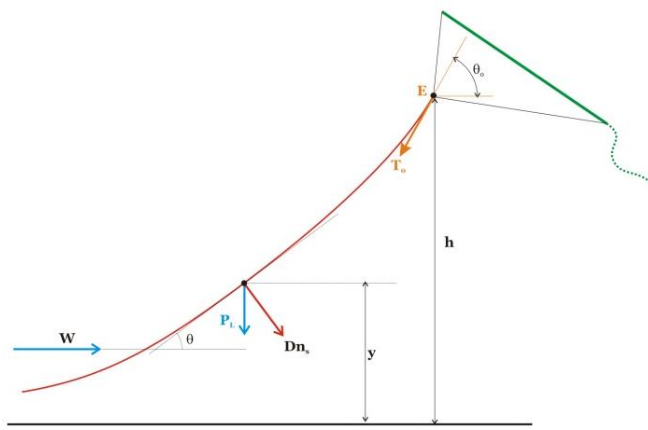


FIGURA 24. Altura máxima de una cometa bajo la acción del viento en su hilo.

Ahora hallaremos la altitud máxima de la cometa. Llamando y a la coordenada perpendicular al suelo (Fig. 24):

$$\left.\begin{array}{l}P_L\cdot sen\theta\cdot dl=dT\\ dy=sen\theta\cdot dl\end{array}\right\}\Rightarrow dy=\frac{dT}{P_L} \quad . \qquad (36)$$

Integrando:

$$\int_h^y dy=\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{P_L}\Rightarrow y-h=\frac{T-T_0}{P_L}=-\frac{T_0}{P_L}\cdot\left[1-\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2\cdot B}}\right] \qquad (37)$$

Analizaremos a continuación la relación entre la altitud alcanzada por una cometa y su hilo ayudándonos de la anterior formula.

Para una cometa de unos 0,3m^2 y las condiciones anteriormente expuestas que hacen que B>>1 y suponiendo que cuando y = h θ_0 = 60º y para y = 0 (en el suelo) θ = 30º. Realizamos un cambio en la ecuación:

$$h-y=\frac{T_0}{P_L}\cdot\left[1-\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)^{\frac{1}{2\cdot B}}\right]=\frac{T_0}{P_L}\cdot\left[1-e^{\frac{1}{2\cdot B}\cdot ln\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)}\right]. \quad (38)$$

$$ln\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\approx ln\frac{\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot B}-cos\,\theta}{1-\frac{1}{2\cdot B}+cos\,\theta}}{\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot B}-cos\,\theta_0}{1-\frac{1}{2\cdot B}+cos\,\theta_0}}= \quad . \quad (39)$$

$$=ln\frac{\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot 10}-cos\,30}{1-\frac{1}{2\cdot 10}+cos\,30}}{\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot 10}-cos\,60}{1-\frac{1}{2\cdot 10}+cos\,\theta_0}60}=ln\frac{0,099}{0,380}=-1,35$$

Entonces:

$$v\left|\frac{1}{2\cdot B}\cdot ln\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right|\ll 1\Rightarrow h-y=\frac{T_0}{P_L}\cdot\left[1-e^{\frac{1}{2\cdot B}\cdot ln\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)}\right]\approx$$

$$\approx h-y=\frac{T_0}{P_L}\cdot\left[-e^{\frac{1}{2\cdot B}\cdot ln\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)}\right]\approx-\frac{T_0}{P_L}\cdot\frac{1}{2\cdot B}\cdot ln\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)$$

(40)

Por lo tanto cuando y = 0 con este valor:

$$h=-\frac{T_0}{P_L}\cdot\frac{1}{2\cdot B}\cdot ln\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right). \quad (41)$$

Luego la altura de la cometa depende $P_L{\cdot}B\approx Dn_s$ fuerza del viento en el hilo y T_o tensión en el punto de la brida. Como Dn_s depende directamente del diámetro del hilo, cuando más fino sea éste mayor altitud alcanzada.

Vamos ahora a calcular la relación existente entre el tamaño de la cometa y su máxima altitud h_{max}.Una cometa de superficie S generará una tensión T_0 en el punto de embridado de aproximadamente:

$$T_0\approx D_n=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot W^2\cdot S\cdot C_N\,. \quad (42)$$

Se supone que estamos en condiciones de viento fuerte, por lo tanto se puede despreciar el peso de la cometa frente a las fuerzas aerodinámicas.

La resistencia del hilo esta en relación con el cuadrado de su diámetro, ya que, l carga de rotura de un hilo ($\sigma_{máx.}$) se expresa en N/m^2 luego $T_o = \sigma_{máx.}\cdot S = \sigma_{máx.}\cdot\pi d^2/4 = k{\cdot}d^2$. Por lo tanto se puede decir que este diámetro estará en proporción con la raíz cuadrada e la superficie de la cometa.

$$T_0=\frac{1}{2}\cdot C_N\cdot\rho\cdot W^2\cdot S=k'\cdot d^2\Rightarrow d=k\cdot\sqrt{S}\,. \quad (43)$$

Sustituyendo:

$$\left.\begin{array}{l} h=-\dfrac{T_0}{P_L}\cdot\dfrac{1}{2\cdot B}\cdot ln\left(\dfrac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)\\ T_0=\dfrac{1}{2}\cdot C_N\cdot\rho\cdot W^2\cdot S\\ B=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot C_s\cdot\rho\cdot W^2\cdot d}{P_L}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=-\frac{\frac{1}{2}\cdot C_N\cdot\rho\cdot W^2\cdot S}{C_s\cdot\rho\cdot W^2\cdot d}\cdot ln\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)\underset{d=k\cdot\sqrt{S}}{=}\quad . \quad (44)$$

$$=-\frac{C_N}{C_s}\cdot\frac{\sqrt{S}}{2\cdot k}ln\left(\frac{A(\theta)}{A(\theta_0)}\right)$$

La altura máxima se alcanzará cuando en el suelo (y = 0) el ángulo θ sea nulo.

$$\left.\begin{array}{l} h_{max}=-\dfrac{C_N}{C_s}\cdot\dfrac{\sqrt{S}}{2\cdot k}ln\left(\dfrac{A(0)}{A(\theta_0)}\right)\\ A(0)=\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot B}-cos\,0}{1-\frac{1}{2\cdot B}+cos\,0}=\dfrac{1}{4\cdot B-1}\\ A(\theta_0)=\dfrac{1+\frac{1}{2\cdot B}-cos\,\theta_0}{1-\frac{1}{2\cdot B}+cos\,\theta_0}\end{array}\right\}\Rightarrow \quad . \quad (45)$$

$$\Rightarrow h_{max}=\underbrace{-\frac{C_N}{C_s}\cdot\frac{1}{2\cdot k}ln\left(\frac{A(0)}{A(\theta_0)}\right)}_{K}\cdot\sqrt{S}=K\cdot\sqrt{S}$$

Luego la altura máxima es proporcional a la raíz cuadrada de S.

A. Teoría del hilo sin acción del viento

En este caso en las ecuaciones de equilibrio se sustituye Dn_s = 0.

$$\left.\begin{array}{l} P_L \cdot cos\,\theta \cdot dl = T \cdot d\theta \\ P_L \cdot sen\theta \cdot dl = dT \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{sen\theta}{cos\,\theta} \cdot d\theta = tan\,\theta \cdot d\theta$$

$$\frac{dT}{T} = tan\,\theta \cdot d\theta \Rightarrow \int_T^{T_0} \frac{dT}{T} = \int_\theta^{\theta_0} tan\,\theta \cdot d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln\frac{T_0}{T} = ln\frac{cos\,\theta}{cos\,\theta_0} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = \frac{cos\,\theta}{cos\,\theta_0} \qquad (46)$$

$$P_L \cdot sen\theta \cdot dl = dT \Rightarrow P_L \cdot dy = dT \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T - T_0 = P_L \cdot (\,y - h\,) \Rightarrow y - h = \frac{T - T_0}{P_L}$$

La altura máxima de la cometa ocurrirá cuando y = 0 y T sea máximo:

$$T = \frac{T_0 \cdot cos\,\theta_0}{cos\,\theta}\,. \qquad (47)$$

Luego $cos\ \theta = 1$, por lo tanto $\theta = 0$, luego la tensión en el suelo será paralela al mismo e igual a la componente horizontal de la tensión T_o:

$$T_{suelo} = T_0 \cdot cos\,\theta_0\,. \qquad (48)$$

La longitud del hilo obtenido es la mayor que la cometa puede elevar con un viento determinado y $h_{máx.}$ es la altura máxima que alcanzará, siendo inútil desenrollar más hilo, pues el mismo se arrastrara por el suelo sin ganar altura.

$$h_{max} = \frac{T_0 - T_{suelo}}{P_L}\,. \qquad (49)$$

El hilo adquiere la forma de una catenaria (Fig. 25).

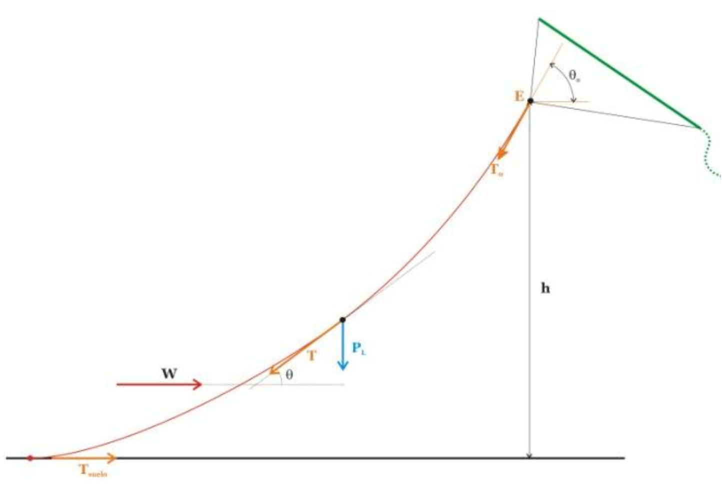


FIGURA 25. Hilo en forma de catenaria.

Así en el ejemplo del apartado V, para las configuraciones en las que θ_o es positivo, si se dispone de un hilo de P_L = 8,83·10^{-4}N/m, tendremos unas alturas máximas (Tabla I)

TABLA I. Alturas máximas de la cometa ejemplo del apartado V.

W (m/s)	α	T (N)	θo	T·cosθo	h_{max} (m)
2,1	36º	1,09	21,77º	1,01	88,04
3	21º	1,05	49,53º	0,68	417,32
6	10º	2,11	60,71º	1,03	1.220,53

VII. CONCLUSIONES

Emplear una cometa como instrumento didáctico no es algo novedoso. En la obra póstuma del filosofo natural holandés Peter van Musschenbroek *Introductio ad Philosophiam Naturalem* (1762), emplea una cometa como ejemplo de cómo una fuerza puede descomponerse en dos, según lo que se conoce actualmente como *regla del paralelogramo*. Tras explicar cómo se analiza *De Motu Composito* en el artículo DLXXIII [15], Musschenbroek lo ilustra con la cometa (Fig. 26).

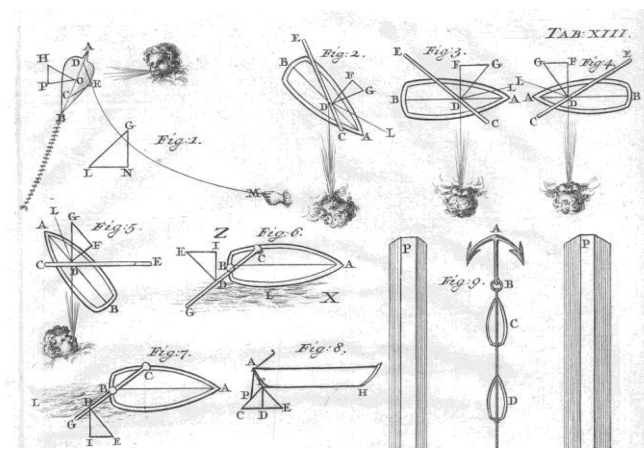


FIGURA 26. Plancha XIII del volumen primero del *Introductio ad Philosophia Naturalem* (1762) de Musschenbroek.

Por lo tanto mi propuesta es una forma de recuperar y reivindicar el uso de objetos cotidianos como recurso didáctico, muy popular en otras épocas. Además si se complementa con la construcción y vuelo de una cometa, podríamos contrastar los resultados obtenidos en los modelos teóricos mostrados, de esta forma de afianzarlos y transformar la física teórica en aplicada.

Hay que tener en cuenta, las simplificaciones que se han empleado en el modelo teórico, y tenerlas en cuenta en la comprobación experimental de dichos resultados.

En definitiva descubrir en la cometa un instrumento didáctico para la física.

APÉNDICE. ECUACIONES DE EULER PARA EL SÓLIDO RÍGIDO

En 1765, el matemático Leonard Euler, publica su libro *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* [16], en la que define el momento de inercia de un sólido rígido y describe matemáticamente su movimiento dado lugar a las denominadas ecuaciones de Euler para un sólido rígido. Estas ecuaciones relacionan las fuerzas y momentos aplicados en el centro de gravedad de un sólido rígido, con la variación del momento lineal y el cinético. Empleando la nomenclatura moderna veamos la forma de estas ecuaciones.

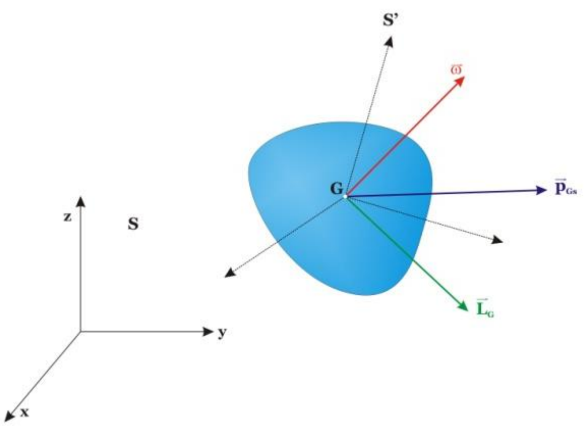


FIGURA 27. Sólido Rígido.

Sea un sólido rígido (Fig. 27), sobre el que definimos un sistema local de coordenadas solidario con el mismo (S'), cuyo origen coincide con el centro de gravedad del sólido (G). Seo O, un punto exterior o no al sólido, en el que definimos un sistema de coordenadas cartesiano fijo (S). Si $\vec{\omega}$ el vector velocidad angular instantánea del solido respecto del centro de gravedad G, y $\overrightarrow{p_{G_s}}$ es la cantidad de movimiento en G respecto de S, y $\vec{F}$ la suma de todas las fuerzas absolutas, es decir respecto de S, aplicadas al solido.

Sea $\vec{u_i}$ (i = 1, 2, 3) los vectores unitarios del sistema S', entonces definimos las componentes de la cantidad de movimiento como:

$$\vec{p}_{G_S} = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot \vec{u}_i = m \cdot \sum_{i=1}^{3} v_{Gi} \cdot \vec{u}_i \;. \tag{50}$$

Donde v_{Gi} son las componentes de la velocidad del centro de gravedad del solido respecto a S'. La segunda ley de Newton estable que la suma de las fuerzas aplicadas es igual a la variación respecto al tiempo de la cantidad de movimiento:

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{p}_{G_S}}{dt}\right|_S \;. \tag{51}$$

Sustituyendo y derivando, tenemos:

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{p}_{G_S}}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{p}_{G_S}}{dt}\right|_{S'} + \vec{\omega}\times\vec{p}_{G_S} = m\cdot\sum_{i=1}^{3}\dot{v}_{G_i}\cdot\vec{u}_i + \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ v_{G_1} & v_{G_2} & v_{G_3} \end{vmatrix} \tag{52}$$

Para un desarrollo más detallado ver [17]. Cuyas tres componentes se denominan *ecuaciones del momento lineal* para el sólido rígido:

$$\begin{cases} F_1 = m\cdot(\dot{v}_{G_1} + \omega_2\cdot v_{G_3} - \omega_3\cdot v_{G_2}) \\ F_2 = m\cdot(\dot{v}_{G_2} + \omega_3\cdot v_{G_1} - \omega_1\cdot v_{G_3}) \, . \\ F_3 = m\cdot(\dot{v}_{G_3} + \omega_1\cdot v_{G_2} - \omega_2\cdot v_{G1}) \end{cases} \tag{53}$$

Sea $\vec{G}$ la suma de todos los momentos aplicados en el centro de gravedad, y $\vec{L}$ el momento cinético del sólido debido a su movimiento alrededor del centro de masas y I es el tensor de inercia del sólido, se tiene que:

$$\vec{L} = I\cdot\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} . \tag{54}$$

Donde I_{11}, I_{22}, I_{33} son los momentos de inercia de los tres ejes y I_{12}, I_{12}, I_{23} son los productos de inercia. Luego:

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{S'} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \\ &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{vmatrix} \Rightarrow . \\ &\Rightarrow \begin{cases} L_1 = I_{11}\cdot\omega_1 + I_{12}\cdot\omega_1 + I_{13}\cdot\omega_1 \\ L_2 = I_{12}\cdot\omega_1 + I_{22}\cdot\omega_1 + I_{23}\cdot\omega_1 \\ L_3 = I_{13}\cdot\omega_1 + I_{23}\cdot\omega_1 + I_{33}\cdot\omega_1 \end{cases} \end{aligned} \tag{55}$$

Desarrollando y poniéndolo en función de las tres componentes, sale las denominadas *ecuaciones de Euler* para el sólido rígido:

$$\begin{cases} G_1 = \sum_j^3 I_{1j} \cdot \dot{\omega}_j + \sum_j^3 \omega_j \cdot (I_{3j} \cdot \omega_2 - I_{2j} \cdot \omega_3) \\ G_2 = \sum_j^3 I_{2j} \cdot \dot{\omega}_j + \sum_j^3 \omega_j \cdot (I_{1j} \cdot \omega_3 - I_{3j} \cdot \omega_1) . \\ G_3 = \sum_j^3 I_{3j} \cdot \dot{\omega}_j + \sum_j^3 \omega_j \cdot (I_{2j} \cdot \omega_1 - I_{1j} \cdot \omega_2) \end{cases} \quad (56)$$

REFERENCIAS

[1] Hart, C., *Kites an historical survey,* (Paul, P. Appel Publisher, Mount Vernon, New York, 1982).

[2] Suay, J. M., *El vuelo transcultural de la cometa,* En: Herran, N., Simon, J., Guillem-Llobat, X., Lanuza-Navarro, T., Ruiz, C. P., Navarro, J., (eds.) *Synergia: Jóvenes investigadores en Historia de la Ciencia*, (CSIC, Madrid, 2007), pp. 283-299.

[3] Franklin, B., *A letter of Benjamin Franklin, Esq; to Mr. Peter Collinson, F.R.S. concerning an electrical Kite*, Philosophical Transactions of The Royal Society of London ILVII, 565-567 (1753).

[4] Euler, J. A., *Des cerfs – volans*, Histoire de l´Académie Royale des Sciences et Belles Letters, année MDCCLVI, 322-64 (1758).

[5] Suay, J. M., *Los Molinos y las Cometas de Mr. Euler Le fils. Modelos matemáticos para las máquinas hidráulicas en el siglo XVIII*, Quaderns d'Història de l'Enginyeria **IX**, 117-44 (2008).

[6] Abbe, C., *The Development of the Kite by European Scientists*, Monthly Weather Review, 58-61 (1897).

[7] Bertinet, E., *Théorie élémentaire du cerf-volant,* F. Michaud, Reims, (1887).

[8] Marvin, C. F., *The Mechanics and Equilibrium of Kites,* (Weather bureau, Washington, 1897).

[9] Bois, Th., *Le cerf-volants et l'eus applications militaires,* (Nancy: Berger-Laurealt et Cie, París, 1906).

[10] Ito, T., Komura, H., *Kites. The Science and the Wonder,* (Japan Publications, Inc, Tokio, 1983).

[11] Wright, C., *Kite flight. Theory and practice,* (Middlesex University Press, London, 1998).

[12] Sanchez, G., *Dynamics and control of single-line kites*, The Aeronautical Journal **110**, 615-621 (2006).

[13] ESDU, *Fluid forces and moments on flat plates*. *Data Item 70015*, (ESDU, Denver, 1970), p. 12.

[14] Alexander, K., Stevenson, J., *Kite Equilibrium and Bridle Length*, Aeronautical Journal **105**, 535-541 (2001).

[15] Musschenbroek, P. V., *Introductio ad Philosophiam Naturalem Tomus I*, (Lugduni Batavorum, Apud Sam. Et Joh. Luchtmans, 1762).

[16] Euler, L., *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum,* (1765).

[17] Gonzalez, C. F., *Mecánica del sólido rígido,* (Ariel, Madrid, 2003), pp. 261-279.