

# Sobre las soluciones axiales de vacío y la solución de Schwarzschild



**J. Diaz Polanco<sup>1</sup>, F. Arretche<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Departamento de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Arturo Prat, Avenida Arturo Prat 2120, Iquique, Chile.*

<sup>2</sup>*Centro de Ciências Tecnológicas, CCT; Universidade do Estado de Santa Catarina- UDESC; Rua Paulo Malschitzki, s/número: Campus Universitário Prof. Avelino Marcante: Bairro Zona Industrial Norte, Joinville/SC, Brasil.*

**E-mail:** jose.diaz.polanco@unap.cl

(Recibido el 15 de Junio de 2013, aceptado el 23 de Septiembre de 2013)

## Resumen

En este trabajo presentamos una metodología muy simple para encontrar la representación equivalente a la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Weyl. Evitamos el camino tradicional, basado en la solución de las ecuaciones de Einstein para el caso de vacío axial, usando un método en el cual, realizamos transformaciones de coordenadas sucesivas que permiten conectar la métrica de Weyl, comúnmente usada en modelos con simetría axial, con la métrica de Schwarzschild. Finalmente realizamos una discusión pedagógica sobre la real equivalencia entre ambas soluciones y proponemos algunas estrategias para aclarar las confusiones que son comunes al estudiar este tópico.

**Palabras clave:** Métrica de Schwarzschild, Soluciones axialmente simétricas, transformación de coordenadas.

## Abstract

A simple methodology to find the representation of the Schwarzschild metric in Weyl coordinates is presented. We avoid the traditional way, via Einstein's equations for the axial vacuum, using a method where successive coordinate transformations can be applied to connect the metric of Weyl, commonly used for axially symmetric models, with the Schwarzschild metric. Finally, we discuss about the real equivalence between both solutions and we propose some pedagogical strategies to clarify the confusions that exist in this topic.

**Keywords:** Schwarzschild metric, axial symmetry solutions, coordinate transformation.

**PACS:** 04.20.Jb, 04.20.-q, 04.20.-Cv

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la enseñanza de la Relatividad General (RG), la métrica de Schwarzschild es un tópico ineludible, inclusive para niveles introductorios. Se enmarca como la primera y más simple solución de las ecuaciones de campo de Einstein, representando la geometría del espacio tiempo alrededor de un punto material estático y con simetría esférica. Por esto, la solución de Schwarzschild se clasifica como una solución estática de vacío con simetría esférica [1]. Por otro lado, también sabemos que existen diversas soluciones estáticas de vacío con simetría axial [2], las cuales son comúnmente estudiadas en coordenadas de Weyl [3]. De este modo, resultante interesante preguntarnos: ¿Cuál de todas estas soluciones estáticas con simetría axial es equivalente a la métrica de Schwarzschild?, ya que, en armonía con los principios de la RG, una métrica dada, puede ser escrita en otras coordenadas, consecuentemente la métrica de Schwarzschild se puede escribir en coordenadas de Weyl y más aún, esta representación podría satisfacer las ecuaciones de vacío axial. Este punto que

puede parecer una contradicción, es justamente lo que queremos discutir en este trabajo.

Con la finalidad de responder la pregunta realizada en el párrafo anterior, presentamos un método alternativo y bastante simple para derivar la métrica de Schwarzschild en coordenadas canónicas de Weyl. La metodología empleada permite evitar la complicada resolución del sistema de ecuaciones asociado al modelo de vacío axial, y está basada en la realización de transformaciones sucesivas de coordenadas que nos permiten conectar una métrica genérica en coordenadas de Weyl, con su representación en coordenadas prolatas esferoidales, de este modo, finalmente usamos una apropiada transformación entre las coordenadas prolatas esferoidales y las coordenadas esféricas, para realizar la conexión con Schwarzschild. Además mostramos que la denominada métrica de Schwarzschild en coordenadas de Weyl, satisface las ecuaciones de vacío axial y discutimos este resultado en un nivel pedagógico, ya que, como profesores de RG, uno de los primeros resultados de aprendizaje que esperamos obtener de nuestros alumnos, es aquel que está vinculado con la comprensión de la máxima: "la física inherente a un modelo

dado no debe cambiar al realizar un cambio de coordenadas". Sin embargo, la experiencia del aula nos muestra que esta máxima no es del todo comprendida, generando algunas contradicciones, en donde es común que el alumno confunda un cambio de coordenadas efectuado a una métrica dada, por un cambio de simetría del espacio-tiempo asociado a dicha métrica. Por esta razón, la física inherente a un modelo dado debe ser estudiada en función de analizar los invariantes de coordenadas asociados a una métrica dada.

Esperamos que este trabajo pueda ser un aporte tanto para profesores como para estudiantes de RG. Además de lo anterior, en el ámbito de la investigación de nuevas soluciones exactas, la métrica de Schwarzschild escrita en coordenadas de Weyl o en prolatas esferoidales, puede ser útil para realizar el acoplamiento entre soluciones interiores con simetría axial y su exterior vacío.

## II. CARACTERISTICAS BASICAS DE LA METRICA DE SCHWARZSCHILD

El comportamiento asintótico de cada una de las soluciones de las ecuaciones Einstein es vital al hacer la interpretación física del espacio-tiempo que ella representa. Por ejemplo, la famosa solución de Schwarzschild, obtenida en 1916 por Karl Schwarzschild durante la primera guerra mundial, representando la geometría del espacio tiempo alrededor de un punto material estático y con simetría esférica. Explícitamente, la métrica de Schwarzschild escrita en términos del elemento de línea característico en coordenadas espaciales esféricas se puede escribir en la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

en donde,  $f(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ . El parámetro  $m = \frac{GM}{c^2}$  se conoce

como la masa geométrica, la cual tiene unidades de longitud y depende de la constante de gravitación universal  $G$ , la velocidad de la luz  $c$  y principalmente de la masa  $M$  del cuerpo central, responsable de la deformación espacio-tiempo y la formación de un horizonte de eventos a una distancia  $r = r_s = 2m$ , donde  $r_s$  es el radio del horizonte de eventos, el cual se conoce como radio de Schwarzschild [4], ver figura 1.

Además, la masa  $M$  se concentra en la singularidad  $r=0$ , la cual es una singularidad física que no depende del sistema de coordenadas, dando origen a una interpretación que conduce a la representación de un objeto exótico, llamado agujero negro de Schwarzschild [5]. En la métrica (1) y las que serán mostradas más adelante consideramos un sistema de unidades, tal que, numéricamente hacemos  $c=1$ . También podemos mencionar que dos agujeros negros de Schwarzschild son sólo distinguibles por su masa. Además para cuerpos celestes comunes, tales como estrellas y planetas, también podemos calcular un radio de

Sobre las soluciones axiales de vacío y la solución de Schwarzschild Schwarzschild, el cual está ubicado, en general, en el interior del cuerpo, en donde la solución de vacío no es válida. Esto nos motiva a pensar que la solución de Schwarzschild es válida para sistemas en su etapa final de evolución, cuando el colapso gravitacional ya ha ocurrido. Por ejemplo, para un cuerpo celeste como nuestro sol, el radio de Schwarzschild es bastante menor que el radio del sol, sin embargo, a pesar de esta limitante, la región externa al sol presenta una gravedad que puede ser muy bien descrita por la Solución de Schwarzschild, de hecho ha sido fundamental para responder satisfactoriamente las pruebas a las que ha sido sometida la relatividad general: la precesión del perihelio de Mercurio, el cambio en las líneas espectrales y la desviación de un haz de luz por interacción con intensos campos gravitatorios [6]. De hecho, al realizar una comparación con la gravedad Newtoniana, podemos mostrar que a pesar de las diferencias conceptuales entre ambas teorías, para grandes distancias ( $r \gg r_s$ ), la solución de Schwarzschild tiene un comportamiento asintótico equivalente al modelo gravitacional Newtoniano de una partícula masiva en el vacío [6]. Más aún, si la masa  $M$  tiende a cero, la métrica de Schwarzschild es equivalente a la métrica de Minkowsky, que representa el espacio-tiempo plano.

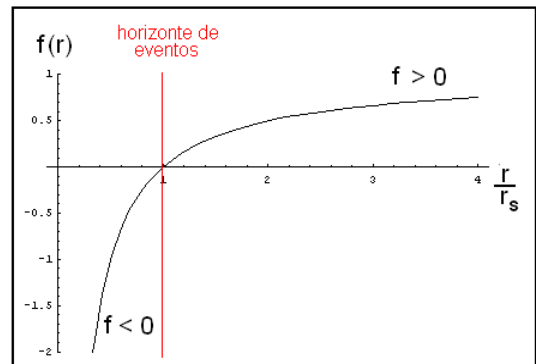


FIGURA 1. Función métrica  $f(r) = 1 - \frac{2m}{r}$  en la métrica de Schwarzschild y su horizonte de eventos en  $r = 2m$ .

## III. ECUACIONES DE VACIO CON SIMETRIA AXIAL

En el contexto de las soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein, es común modelar el espacio tiempo a partir de una métrica que satisface la relación

$$ds^2 = -F(dt + A d\phi)^2 + \frac{e^{2\gamma}}{F} (d\rho^2 + dz^2) + \frac{\rho^2}{F} d\phi^2, \quad (2)$$

donde  $F, A$  y  $\gamma$  son funciones de las coordenadas canónicas de Weyl  $(\rho, z)$ . Esta métrica es comúnmente usada para estudiar soluciones estacionarias con simetría axial [7]. De hecho, un observador local nos muestra que la función

$A(\rho, z)$  está vinculada con una rapidez angular no uniforme que depende de la posición  $(\rho, z)$ , mostrando un arrastre del marco de referencia, lo que se conoce habitualmente como “frame-dragging”. La métrica de vacío más famosa que puede ser estudiada con la métrica (2) es la métrica de Kerr, la cual se refiere a un punto material de masa  $M$  con momento angular  $J$ , es decir, corresponde a un punto material con rotación. En la literatura es común encontrar la métrica de Kerr escrita en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , sin embargo, es vital mostrar al alumno que esta métrica tiene simetría axial, independiente de qué tipo de coordenadas se usen para escribirla. La simetría intrínseca de una métrica dada, puede ser estudiada a través de los vectores de Killing o bien estudiando la invariabilidad de la métrica para traslaciones, rotaciones y/o inversiones de las coordenadas. De este modo, para estudiar la solución de Schwarzschild en las coordenadas de Weyl, debemos garantizar que la métrica sea estática, en la práctica esto lo podemos asumir si imponemos la condición  $A=0$ , en otras palabras asumimos un modelo sin rotación (sin términos cruzados). En este caso, la métrica adecuada para enfrentar el caso de vacío estático satisface la relación

$$ds^2 = -F(\rho, z)dt^2 + \frac{e^{2\gamma(\rho, z)}}{F(\rho, z)}(d\rho^2 + dz^2) + \frac{\rho^2}{F(\rho, z)}d\phi^2. \quad (3)$$

De este modo, las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío estático ( $T_{\alpha\beta} = 0$ ) en coordenadas de Weyl pueden ser escritas en la forma:

$$\gamma_{,\rho} = -\frac{\rho}{4F^2}(F_{,\rho}{}^2 - F_{,z}{}^2), \quad (4)$$

$$\gamma_{,z} = \frac{\rho}{2F^2}(F_{,\rho}F_{,z}), \quad (5)$$

y

$$\gamma_{,\rho\rho} + \gamma_{,zz} = -\frac{\rho}{4F^2}(F_{,\rho}{}^2 + F_{,z}{}^2). \quad (6)$$

en donde, usamos la nomenclatura tradicional en RG, es decir, la coma representa derivación parcial respecto a la coordenada correspondiente al subíndice, por ejemplo,  $F_{,\rho} = \frac{\partial F}{\partial \rho}$ . Es relativamente fácil ver que la condición de integración  $\gamma_{,\rho,z} = \gamma_{,z,\rho}$  obtenida directamente de las ecuaciones (4) y (5) es equivalente a la sustitución directa de las ecuaciones (4) y (5) en (6), permitiendo obtener la misma relación:

$$0 = \frac{F_{,\rho\rho}}{\rho} + F_{,\rho\rho} + F_{,zz} - \frac{1}{F}(F_{,\rho}{}^2 + F_{,z}{}^2), \quad (7)$$

la cual puede ser llamada como la ecuación principal.

La forma tradicional de resolver la ecuación principal (7) sugiere la utilización de una función auxiliar  $\psi = \ln \sqrt{F}$ , que permite reescribir la ecuación (7) de una forma lineal:

$$0 = \frac{\psi_{,\rho}}{\rho} + \psi_{,\rho\rho} + \psi_{,zz}, \quad (8)$$

la cual puede ser resuelta en diferentes coordenadas. Por ejemplo, en coordenadas esféricas  $(r, \theta)$  podemos realizar una separación de variables, la cual nos conduce directamente a una solución en serie, en donde aparecen de manera natural los polinomios de Legendre,  $P_n = P_n(\cos \theta)$ . En este punto, no queremos profundizar en la solución general de (8), más bien nos interesa mostrar que puede poseer diversas soluciones, dependiendo de las condiciones de contorno que se impongan. Sin embargo, al menos una de estas soluciones debería ser equivalente a la solución de un punto material en el vacío, es decir, equivalente a la métrica de Schwarzschild.

En este trabajo proponemos encontrar esta métrica equivalente a Schwarzschild en coordenadas de Weyl, sin necesidad de resolver directamente el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (4), (5) y (6). La metodología que usaremos, se basa en realizar transformaciones sucesivas y de forma apropiada, de modo que nos permitan recaer en la métrica de Schwarzschild.

#### IV. METRICA DE SCHWARZSCHILD EN COORDENADAS DE WEYL

Primero proponemos una transformación de coordenadas desde las coordenadas canónicas de Weyl a las coordenadas prolatas esferoidales [8], tal que:

$$\rho = k\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{1 - y^2}, \quad z = kxy \quad (9)$$

Esta transformación nos permite escribir la métrica (3) en la forma

$$ds^2 = -Fdt^2 + \frac{k^2 e^{2\gamma}(x^2 - y^2)}{F} \left( \frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + \frac{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)}{F} d\phi^2. \quad (10)$$

En seguida, comparando las componentes de esta métrica con las componentes de métrica de Schwarzschild (1), podemos ver que la equivalencia entre las componentes que acompañan a  $d\phi^2$  en (1) y (10) nos exige que:

$$\frac{k^2(x^2 - 1)(1 - y^2)}{F(x, y)} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (11)$$

Esta relación nos sugiere una sustitución adicional que vincule las coordenadas  $(x, y)$  de (10) con las coordenadas  $(r, \theta)$  de la métrica de Schwarzschild (1). Con esta idea en mente, escogemos la siguiente sustitución:

$$x = u(r) \quad \text{e} \quad y = \cos \theta. \quad (12)$$

La cual nos muestra que:

$$dx = \left(\frac{du}{dr}\right) du \quad y \quad dy = -(\operatorname{sen}\theta)d\theta. \quad (13)$$

De este modo, la métrica (10) puede ser reescrita en la forma

$$ds^2 = -Fdt^2 + \frac{k^2 e^{2\gamma} (u^2 - \cos^2 \theta)}{F} \left( d\theta^2 + \frac{dr^2}{u^2 - 1} \left(\frac{du}{dr}\right)^2 \right) + \frac{k^2 (u^2 - 1)}{F} \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (14)$$

la cual nos permite realizar una comparación directa con la métrica de Schwarzschild, de modo que, la igualdad entre las componentes métricas de (14) con (1) puede resumirse en cuatro relaciones:

$$F = f = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (15)$$

$$\frac{k^2 (u^2 - 1)}{F} = r^2, \quad (16)$$

$$\frac{k^2 e^{2\gamma} (u^2 - \cos^2 \theta)}{F} = r^2, \quad (17)$$

$$\frac{k^2 e^{2\gamma} (u^2 - \cos^2 \theta)}{(u^2 - 1)F} \left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (18)$$

De esta forma, para conocer la función  $u(r)$  reemplazamos (16) y (17) en (18), obteniendo la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{r^2}{(u^2 - 1)} \left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (19)$$

la cual puede ser resuelta por simple cuadratura, al reescribirla en la forma:

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{\pm d\left(\frac{r}{m}\right)}{\sqrt{\left(\frac{r}{m} - 1\right)^2 - 1}}. \quad (20)$$

Finalmente, es fácil probar que

$$x = u(r) = \frac{r - m}{m}, \quad (20)$$

es solución de (19) y corresponde a la sustitución adecuada para obtener la solución de Schwarzschild en coordenadas prolatas esferoidales  $(x, y)$ . De hecho, usando la sustitución (20) en la ecuación (15) podemos conocer la función  $F$  en coordenadas  $(x, y)$ , a saber

$$F = 1 - \frac{2m}{r} = \frac{x - 1}{x + 1}. \quad (21)$$

Por otro lado, reemplazando (20) en la ecuación (16), obtenemos la igualdad

$$\frac{k^2 (x^2 - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = (mx + m)^2, \quad (22)$$

la cual es una identidad, siempre que  $k = m$ .

Finalmente, usando los resultados anteriores en la ecuación (17) podemos conocer explícitamente la función  $\gamma(x, y)$  tal que

$$e^{2\gamma} = r^2 \frac{F}{k^2 (u^2 - \cos^2 \theta)} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 - y^2)}. \quad (23)$$

Esto nos permite establecer que la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2.$$

tiene su equivalente en coordenadas prolatas esferoidales, de modo que el elemento de línea satisface la relación

$$ds^2 = -\frac{x - 1}{x + 1} dt^2 + m^2 (x + 1)^2 \left( \frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) + m^2 (x + 1)^2 (1 - y^2) d\phi^2, \quad (24)$$

y por lo tanto, en coordenadas de Weyl, la métrica equivalente a Schwarzschild es de la forma:

$$ds^2 = -Fdt^2 + \frac{e^{2\gamma}}{F} (d\rho^2 + dz^2) + \frac{\rho^2}{F} d\phi^2, \quad (25)$$

en donde

$$F = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad e^{2\gamma} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 - y^2)}, \quad (26)$$

y

$$x = \frac{r_+ + r_-}{2m} \quad y = \frac{r_+ - r_-}{2m}, \quad (27)$$

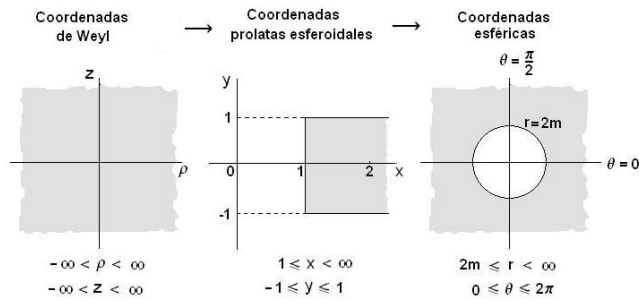
con  $r_{\pm}^2 = \rho^2 + (z \pm m)^2$ .

Notemos que las ecuaciones de transformación en (27) corresponden a la transformación inversa de (9) con la condición  $k = m$ . Explícitamente, podemos ver que la transformación que vincula a la denominada métrica de Schwarzschild en coordenadas de Weyl, con su correspondiente en coordenadas esféricas es de la forma:

$$\rho = \sqrt{r(r - 2m)} \sin \theta, \quad z = (r - m) \cos \theta, \quad (28)$$

la cual, es obtenida substituyendo las relaciones (12) en las ecuaciones de transformación (9), para  $k = m$ . La transformación de coordenadas (28) es claramente incompleta, ya que es válida sólo para  $r \geq 2m$ . De hecho,

esto lo podemos verificar gráficamente, analizando un mapeo de la transformación, ver figura 2.



**FIGURA 2.** Mapeo incompleto de la transformación de coordenadas de Weyl a coordenadas esféricas.

La figura 2 nos muestra que El plano  $\rho z$ , en coordenadas de Weyl, es mapeado completamente dentro de un rectángulo semi-infinito en el plano  $x y$  de las coordenadas prolatas esferoidales y a su vez mapeado completamente en la región externa al horizonte de eventos  $r \geq 2m$ , en coordenadas esféricas, mostrando un mapeo incompleto.

#### IV. DISCUSION PEDAGOGICA

Los resultados obtenidos en este trabajo nos permiten afirmar que existe una equivalencia entre la métrica de Schwarzschild (1) y la métrica tipo Weyl definida en (25). En muchos textos [3] y artículos [2] se refieren a esta equivalencia, expresando que la métrica (25), en términos de las funciones métricas dadas en (26), representa a la solución de Schwarzschild en coordenadas canónicas de Weyl. Sin embargo, esta frase puede ser mal interpretada. De hecho, nuestra experiencia en aula, nos muestra que la mayoría de los estudiantes tienden a pensar que ambas métricas son exactamente iguales, ya que, existe una transformación de coordenadas que las vincula. Sin embargo debemos ser cautelosos ante esta afirmación, ya que, en la sección mostramos que la transformación que vincula ambas métricas no es completa, ya que no permite mapear la región interior al horizonte de eventos en la métrica de Schwarzschild. De esta forma, podemos afirmar que la equivalencia entre ambas métricas no es una igualdad, a pesar de que para la región externa al horizonte de eventos, ambas métricas aparentemente son iguales. Además de esto, si fueran iguales, entonces esta igualdad debería trascender también a la simetría, lo que de hecho no ocurre. Este es otro punto que merece ser discutido: ¿Qué simetría posee la llamada métrica de Schwarzschild en coordenadas de Weyl? Para responder esta pregunta, nos apoyamos en el hecho de que las funciones métricas, encontradas con nuestra metodología (26), que pertenecen a la llamada métrica de Schwarzschild en coordenadas de Weyl (25), satisfacen las ecuaciones de vacío axial (4), (5) y (6). Esto se puede probar substituyendo directamente las funciones  $F(\rho, z)$  y  $\gamma(\rho, z)$ , definidas en (26), en la

ecuación principal (7) y en las ecuaciones (4) y (5) respectivamente. A primera vista parece existir una paradoja, ya que, la llamada métrica de Schwarzschild en coordenadas de Weyl es una solución de las ecuaciones de vacío axial y además, existe una transformación de coordenadas que la conecta directamente con una métrica conocida por su simetría esférica: La métrica de Schwarzschild. La respuesta a esta controversia puede ser respondida usando la idea del párrafo anterior. Ambas métricas tienen su simetría intrínseca, una es axial y la otra es esférica, sin embargo existe una transformación de coordenadas que las conecta, esta transformación es incompleta, excluyendo la región en donde se encuentra la singularidad que da origen a la simetría en cada caso, ver figura 2. Es justamente esta incompletitud inherente a las coordenadas canónicas de Weyl, la que las diferencia de las coordenadas polares cilíndricas, las cuales si son completas pues permiten mapear todo  $\mathbb{R}^2$  en cartesianas, pero que no conducen a la solución dada en (26).

Por todo lo anterior, podemos afirmar que la ambas métricas no son iguales, sólo son equivalentes en cuanto a forma, para  $r \geq 2m$ .

#### AGRADECIMIENTOS

J. Díaz Polanco agradece a la Dirección de Investigación de la Universidad Arturo Prat, Chile, por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo

F. Arretche agradece a la Universidad del estado de Santa Catarina-UDESC, Brasil, por apoyar la estadía en Chile para la realización de este trabajo.

#### REFERENCIAS

- [1] Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M., *Introduction to General Relativity*, (McGraw-Hill Inc., New York, 1975), p. 195.
- [2] Voorhees, B. H., *Static axially symmetric gravitational fields*, Phys. Rev. D **2**, 2119-2122 (1970).
- [3] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., and Herlt, E., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002), p. 305.
- [4] Wald, R., *General Relativity*, (The University of Chicago Press, Chicago, 1984), p.124.
- [5] Frolov, V. P., and Novikov, I. D., *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, (Springer, New York, 1997), p. 14.
- [6] Foster, J., David Nightingale, J., *A Short Course in General Relativity*, (Springer, New York, 2006), pp. 89, 131, 141 and p.144.
- [7] Letelier, P. S., *On the gravitational field of static and stationary axial symmetric bodies with multipolar structure*, Class. Quant. Grav. **16**, 1207-1213 (1999).
- [8] Quevedo, H., *General static axisymmetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates*, Phys. Rev. D **39**, 2904-2911 (1989).