Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Translación

J. Güémez[1], M. Fiolhais[2]

[1]*Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, Avenida de Los Castros s/n 39005, Santander, España.*

[2]*Departamento de Física y Centro de Física Computacional FCTUC. Universidade de Coimbra P-3004-516, Coimbra, Portugal.*

E-mail: guemezj@unican.es

(Recibido el 18 de julio de 2014; aceptado el 29 de julio de 2014)

Resumen

Se desarrolla un formalismo con matrices, para aplicar en una misma ecuación la segunda ley de Newton y el primer principio de la termodinámica, asegurando el cumplimiento del principio de relatividad. En este formalismo matricial se postula primero la denominada *ecuación matricial del centro-de-masas* que permite obtener simultáneamente las correspondientes ecuaciones: la *ecuación vectorial impulso-variación del momento lineal* y la *ecuación escalar del centro-de-masas*. Posteriormente se amplía el formalismo matricial para postular la *ecuación matricial de la energía* que integra en una única ecuación matricial la segunda ley de Newton y el primer principio de la termodinámica. A partir de estas ecuaciones matriciales se obtiene la *ecuación matricial de los efectos térmicos* la cual permite describir los posibles efectos térmicos que se produzcan en procesos que impliquen destrucción o producción de energía mecánica. Una matriz de proyección permite transformar las ecuaciones matriciales entre los diferentes referenciales inerciales, asegurando el cumplimiento del principio de relatividad. Con este formalismo matricial se analizan algunos ejercicios característicos: un bloque que se mueve contra una fuerza de rozamiento, disipando energía mecánica; una persona que se empuja contra una pared, produciendo energía mecánica a partir de reacciones químicas. Dichos ejercicios exigen tanto las leyes de la mecánica como las de la termodinámica para su resolución completa.

Palabras clave: Matrices, mecánica, termodinámica.

Abstract

Matrix formalism is developed to be applied in a same equation Newton's second law and the first law of thermodynamics, ensuring compliance with the principle of relativity. In this matrix formalism was first postulated the so-called *matrix equation of the center-of-mass* that can simultaneously obtain the corresponding equations: *vectorial equation of impulse change in momentum* and *scalar equation from the center-of-mass*. Then the matrix formalism is extended to apply the *matrix equation of energy* that integrates into a single matrix equation of Newton's second law and the first law of thermodynamics. From these matrix equations is obtained a *matrix equation of thermal effects* for describing the possible thermal effects that occur in processes involving destruction or production of mechanical energy. A projection matrix, allows to transform the matrix equations among different inertial reference, ensuring compliance with the principle of relativity. With this matrix formalism discussed some typical exercises: a block that moves against a frictional force, dissipating mechanical energy; a person who is pushed against a wall, producing mechanical energy from chemical reactions. These require both the laws of mechanic and thermodynamic for the full resolution.

Keywords: Matrices, mechanics, thermodynamics.

PACS: 01.30.-y, 01.30.Bb, 01.30.Rr, 01.40.E- **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

La separación entre la mecánica y la termodinámica que se suele dar en los libros de texto [1], significa que muchos ejercicios, particularmente aquellos que implican disipación de energía mecánica o aquellos en los que intervienen máquinas térmicas que se mueven a sí mismas (por ejemplo, la Rocket, máquina de vapor móvil de Stephenson (Figura 1), un automóvil que consume gasolina, una persona que se desplaza andando, etc.), se resuelvan de forma incompleta [2], e, incluso, incorrecta [3].

La segunda ley de Newton, expresada como:

$$\vec{F}_{\rm ext} = M\vec{a}_{\rm cm},$$

aplicada a estos procesos, no parece tener relación con el primer principio de la termodinámica [4], expresado habitualmente como

$$\Delta U = W_{\rm ext} + Q.$$

Para describir completamente el comportamiento físico de sistemas que disipan energía mecánica o cuerpos articulados con fuentes internas de energía libre que producen energía mecánica, es necesario utilizar dos ecuaciones. Se necesita la *segunda ley de Newton*

$$M\Delta\vec{v}_{\rm cm} = \int \big(\sum_j \vec{F}_{{\rm ext},j}\big){\rm d}t,$$

que también puede ser expresada como la *ecuación del centro de masas* [5]

$$\frac{1}{2}M\Delta v_{\rm cm}^2 = \int \big(\sum_j \vec{F}_{{\rm ext},j}\big)\cdot {\rm d}\vec{L}_{\rm cm}\,, \qquad (1)$$

donde $$\frac{1}{2}M\Delta v_{\rm cm}^2 = \Delta K_{\rm cm}\,,$$

es la variación, física, de la energía cinética del centro de masas, y donde la suma

$$\vec{F}_{\rm ext} = \sum_j \vec{F}_{{\rm ext},j}\,,$$

se lleva a cabo sobre todas las fuerzas externas aplicadas [7], siendo $\vec{L}_{cm}$ el desplazamiento del centro de masas del sistema. Y es preciso aplicar también la *ecuación generalizada del primer principio de la termodinámica* como [2]

$$\Delta K_{\rm cm} + \Delta U = \int \sum_j \Big(\vec{F}_{{\rm ext},j}\cdot {\rm d}\vec{L}_j\Big) + Q\,, \qquad (2)$$

donde la suma $$W_{\rm ext} = \int \sum_j \Big(\vec{F}_{{\rm ext},j}\cdot {\rm d}\vec{L}_j\Big),$$

es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas [7], siendo $\vec{L}_j$ el desplazamiento de la propia fuerza $\vec{F}_{{\rm ext},j}$, y no ya el desplazamiento del centro de masas.

Las Ecuaciones 1 y 2 permiten analizar procesos en los que se produzcan fenómenos de disipación de energía mecánica, como en el caso de un bloque movido contra una fuerza de rozamiento, y situaciones en los que cuerpos articulados dotados de fuentes internas de energía libre (química, etc.), producen energía mecánica [8], incluyendo un término de variación de la energía cinética del centro de masas del sistema, como aquellos en los que una máquina térmica se transporta a sí misma (Fig. 1) o, por ejemplo, en el caso de una persona que da un salto y se eleva del suelo.

Por otra parte, al principio de relatividad apenas se le da importancia en mecánica clásica [9] y nunca se considera en los libros de texto de termodinámica. La demostración de que las descripciones de un mismo proceso, llevadas a cabo en distintos referenciales inerciales, en movimiento con velocidad constante unos respecto de otros, son equivalentes, es un punto importante en la resolución de cualquier problema de física, particularmente cuando uno de los cuerpos que interviene en el proceso está dotado de masa cuasi-infinita [10].

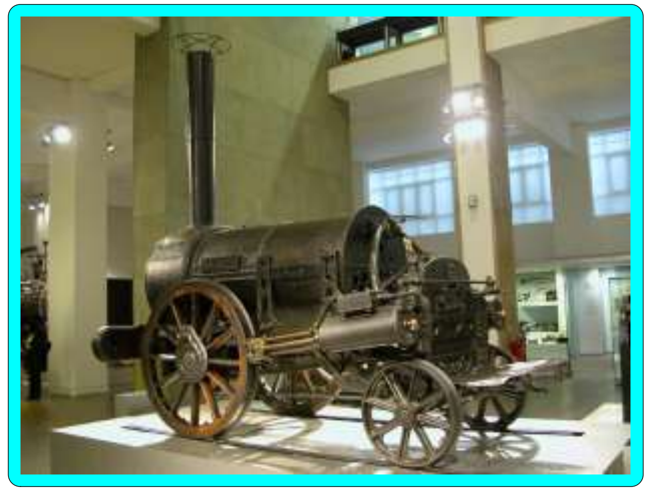

FIGURA 1. Máquina de vapor móvil de Stephenson. Esta máquina térmica se transporta a sí misma. La ecuación que describa el balance de energía para el proceso que tiene lugar desde que la máquina se pone en movimiento hasta que alcanza una velocidad constante, debe incluir un térmico de variación de la energía cinética de traslación del centro de masas ΔK_{cm}.

En la teoría especial de la relatividad de Einstein, la exigencia del cumplimiento del principio de relatividad, que constituye el primer postulado de esta teoría, se traduce en la formulación de las leyes de la física con cuadrivectores de Minkowski [11], y en la aplicación a dichas ecuaciones con cuadrivectores de la correspondiente transformación de Lorentz, para pasar de forma directa de la descripción de un proceso en un referencial inercial, a la descripción del mismo proceso en otro referencial inercial [12]. Esta forma de desarrollar la teoría garantiza también el cumplimiento del segundo postulado de la relatividad, la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Además, la exigencia de descripciones relacionadas mediante la transformación de Lorentz permite predecir las diferentes transformaciones relativistas de las magnitudes físicas, desplazamientos, tiempos, velocidades, fuerzas, frecuencias, etc., predicciones teóricas que pueden ser contrastadas experimentalmente (efecto Doppler relativista, efecto relativista de aberración, etc.). Con este desarrollo Einstein-Minkowski mediante cuadrivectores de la relatividad especial, los postulados en los que esta teoría se basa cobran pleno sentido físico.

En mecánica clásica la situación es muy diferente de la descrita en relatividad especial. En contraste con la relatividad especial [7], en mecánica clásica las diversas transformaciones de Galileo de las diferentes magnitudes físicas se postulan de forma heurística algunas de ellas, por ejemplo, fuerzas y aceleraciones son invariantes galileanos, otras se postulan *ad hoc*, como la invariancia galileana del tiempo, y otras se postulan de tal manera que se asegure el cumplimiento del principio de relatividad, por ejemplo, la invariancia galileana de la energía intercambiada por calor entre un sistema y un foco térmico.

Considerando la situación actual de la enseñanza de la física (la separación entre mecánica y termodinámica y la pobre consideración del principio de relatividad en física clásica), en este artículo se lleva a cabo el desarrollo de un formalismo mediante matrices para la mecánica y la termodinámica, inspirado en el formalismo de cuadrivectores de la formulación de Einstein-Minkowski de la relatividad especial [13]. Mediante la introducción de una velocidad límite clásica v_L, que el formalismo exige pero cuyo valor no se explicita y que se hace tender a infinito al final de los cálculos, se construyen las matrices que permiten postular las ecuaciones matriciales que van a permitir resolver los problemas. El formalismo es particularmente adecuado para analizar aquellos problemas que implicando disipación de energía mecánica (procesos en los que intervienen fuerzas de rozamiento o fricción) o producción de energía mecánica (todo tipo de máquinas térmicas), exigen tanto las leyes de la mecánica como las leyes de la termodinámica para una resolución completa.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En primer lugar se lleva a cabo el desarrollo del formalismo matricial aplicado a la traslación. Posteriormente el formalismo se aplica a dos ejemplos, el de un bloque movido por una fuerza que realiza trabajo y sometido también a una fuerza de rozamiento dando lugar a disipación de energía mecánica por calor; y el caso de una persona que adquiere energía cinética cuando se empuja contra una pared y se mueve, un ejemplo en traslación de producción de energía mecánica mediante procesos químicos. En ambos procesos se aplica el formalismo para mostrar cómo las ecuaciones se transforman entre referenciales inerciales, de acuerdo con el principio de relatividad. En un artículo posterior [14] se desarrollará un formalismo matricial para la rotación.

II. FORMALISMO MATRICIAL

El formalismo matricial que se va a desarrollar ha sido previamente aplicado a la resolución de problemas con producción y destrucción de energía mecánica, utilizando una aproximación histórica [15]. En este artículo se adopta un punto de vista axiomático a la hora de presentar el formalismo, el cual será posteriormente aplicado también a procesos de disipación o creación de energía mecánica.

A. Sistema y referenciales

Elegido explícitamente un sistema que debe identificarse como el conjunto de cuerpos en el interior de una cierta superficie cerrada, que separa el sistema del exterior (esta superficie puede ser física o matemática), para cada proceso en el que este sistema interviene se debe elegir un sistema de referencia. Uno conveniente es el referencial inercial S_∞ en el que las posibles fuentes de trabajo de configuración (la Tierra, la atmósfera, etc.) o cuerpos de masa cuasi-infinita (el suelo, una pared, etc.) con las que interacciona el sistema, (permanecen en reposo) a lo largo del proceso. Si este referencial no puede utilizarse, porque no exista ninguno de los cuerpos de masa cuasi-infinita anteriores, es conveniente elegir el referencial S^0 en el que el centro-de-masas del sistema permanezca en reposo.

B. Velocidad límite clásica

En el formalismo matricial que se va a desarrollar, se considera una velocidad límite, que, además, debe ser la misma para todos los observadores inerciales (lo que, aparentemente, contradice el principio de relatividad de Galileo). Esta velocidad límite, denominada v_{L}, va a jugar en el formalismo matricial, en cierta medida, el mismo papel que el de la velocidad de la luz c en relatividad. Pero, el formalismo no va a exigir que se concrete el valor de v_{L}, admitiendo que v_{L} es una velocidad mucho mayor que las velocidades que habitualmente se puedan encontrar en mecánica (bloques que descienden por planos inclinados, satélites artificiales, etc.), y en tanto en cuanto la velocidad límite no juega un papel especial en los casos concretos que se analizan. No obstante, esta velocidad límite es necesaria para conseguir la coherencia del formalismo.

C. Matrices

Un papel importante de la velocidad límite v_L en el formalismo matricial va a ser el de permitir que una matriz columna con cuatro componentes, tres de un vector más un escalar, sea dimensionalmente homogénea a pesar de estar formada por componentes cuyas magnitudes no sean dimensionalmente homogéneas (por ejemplo, espacio y tiempo o momento lineal y energía). Así, ciertas magnitudes clásicas van a ser multiplicadas (o divididas) por v_L para conseguir que la matriz de la que van a formar parte sea dimensionalmente homogénea, y con sentido físico, es decir, que pueda utilizarse como tal en las ecuaciones matriciales que se postulen.

Una aproximación clásica, en forma de matrices, de algunos de los cuadrivectores de la teoría de la relatividad, se obtendrá tomando el límite $c \to 0$.

La matriz clásica v_{L}(momento-energía cinética y energía interna) se va a representar como $\mathcal{K}$; con componentes con unidades de energía, y la matriz espacio-tiempo-v_{L}, $\mathcal{L}$, con unidades de espacio, vienen definidas como

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M v_x \\ v_{\mathrm{L}} M v_y \\ v_{\mathrm{L}} M v_z \\ \frac{1}{2} M v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_{\mathrm{L}} t \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Las matrices clásicas se van a representar mediante letras caligráficas, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, etc., y se escriben como columnas entre paréntesis, tal como se ha hecho en (3). En el formalismo matricial sólo tendrán sentido físico pleno las matrices $\mathrm{d}\mathcal{K}$ o $d\mathcal{L}$, etc., que serán con las que se formulen las ecuaciones, antes que las propias matrices $\mathcal{K}$ o $\mathcal{L}$.

D. Fuerzas y desplazamientos

En el formalismo matricial, cada vector fuerza $\vec{F} = (F_z, F_y, F_z)$ se identifica por una matriz 4×4 F (denotada por una letra en romano) dada por

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

La expresión de F es la forma que adopta, en la teoría especial de la relatividad, el tensor asociado a un campo eléctrico $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, ejerciendo una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una partícula de carga eléctrica q. A su vez, esta fuerza va a tener asociada una matriz columna desplazamiento $\mathcal{L}_F$ con componentes espaciales (que, para algunas fuerzas, pueden ser nulos) del vector $\vec{L}_F = (L_x, L_y, L_z)$ [en forma infinitesimal $\mathrm{d}L_F = (\mathrm{d}L_x, \mathrm{d}L_y, \mathrm{d}L_z)$], y un componente temporal (que siempre existe) t (infinitesimal dt), tal que

$$\mathcal{L}_F = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \\ v_\mathrm{L} t \end{pmatrix}; \ \mathrm{d}\mathcal{L}_F = \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_x \\ \mathrm{d}L_y \\ \mathrm{d}L_z \\ v_\mathrm{L}\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

La forma de esta matriz columna espacio-tiempo es la forma del cuadrivector espacio tiempo en la teoría especial de la relatividad, con la velocidad de la luz c en lugar de la velocidad límite v_L. Estas definiciones de F y L_L se justificarán cuando la definición matricial de trabajo mediante producto de matrices generalice la definición habitual de trabajo como producto escalar de vectores.

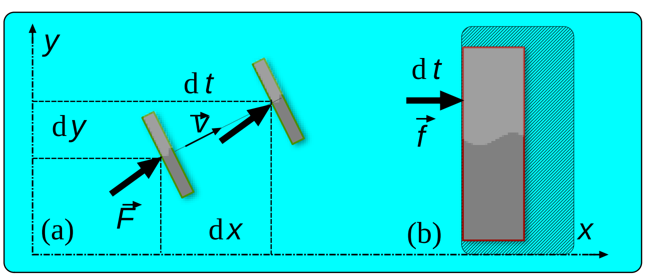

FIGURA 2. Fuerzas que realizan trabajo y fuerzas que no realizan trabajo. (a) La fuerza $\vec{F}$, aplicada sobre un cuerpo finito que se desplaza con ella, tiene asociado desplazamiento espacial y temporal y realiza un trabajo, $\delta W_F = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$. (b) La fuerza $\vec{f}$, aplicada sobre una pared, no tiene asociado desplazamiento espacial y su producto fuerza-desplazamiento espacial es nulo en el referencial en el que la pared sobre la que se aplica permanece en reposo, $\delta W_f = 0$. Cada fuerza ejerce un cierto impulso lineal, $\vec{I}_F = \vec{F}\, dt$ y $\vec{I}_f = \vec{f}\, dt$, respectivamente.

Para un vector fuerza $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ que se representa por su matriz F, Ecuación (4), la matriz v_L-impulso-trabajo δW_F, que tiene unidades de energía, asociado a su *producto fuerza-desplazamiento* [17] generalizado, es $\delta\mathcal{W}_F \equiv F\, \mathrm{d}\mathcal{L}_F$, y explícitamente

$$\delta\mathcal{W}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_x \\ \mathrm{d}L_y \\ \mathrm{d}L_z \\ v_\mathrm{L}\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{L} F_x \mathrm{d}t \\ v_\mathrm{L} F_y \mathrm{d}t \\ v_\mathrm{L} F_z \mathrm{d}t \\ \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{L} \end{pmatrix}.$$

donde $\delta W_F \equiv \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{L} = F_x \mathrm{d}L_x + F_y\, \mathrm{d}L_y + F_z\, \mathrm{d}L_z$, es el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ en su desplazamiento al ser dicha fuerza aplicada sobre el sistema, Figura 2a.

Para poner de manifiesto la versatilidad del formalismo matricial, se puede definir una matriz columna `fuerza' (matriz fuerza-potencia-$v_\mathrm{L}{}^{-1}$) $\mathcal{F}$, con unidades de fuerza, como $\mathcal{F} = v_\mathrm{L}{}^{-1}\, F\, \mathcal{V}$, donde $\mathcal{V} = (v_x, v_y, v_z, v_\mathrm{L})$ (por razones tipográficas, en ocasiones una matriz columna se escribirá como una matriz fila) es la matriz velocidad, donde $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es el vector velocidad con que se desplaza el punto de aplicación de la fuerza sobre el sistema, con:

$$\mathcal{F} = v_\mathrm{L}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_\mathrm{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ v_\mathrm{L}^{-1} \vec{F}\cdot\vec{v} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz $\mathcal{F}$ también se puede poner como

$$\mathcal{F} = v_\mathrm{L}^{-1} \frac{\delta\mathcal{W}_F}{\mathrm{d}t} = v_\mathrm{L}^{-1} \frac{1}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} v_\mathrm{L} F_x \mathrm{d}t \\ v_\mathrm{L} F_y \mathrm{d}t \\ v_\mathrm{L} F_z \mathrm{d}t \\ \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ v_\mathrm{L}^{-1} \vec{F}\cdot\vec{v} \end{pmatrix}.$$

Existen fuerzas (Figura 2b), [6], cuyo desplazamiento es nulo, por lo que su *producto fuerza-desplazamiento* es cero y que no realizan trabajo cuando se aplican sobre el sistema (aunque sí ejercen un impulso). En el formalismo matricial, si la fuerza $\vec{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{f_x}, \boldsymbol{f_y}, \boldsymbol{f_z})$, con matriz $\boldsymbol{f}$, tiene asociado desplazamiento nulo en el referencial $\boldsymbol{S}_\infty$, y en este referencial se tiene su matriz $\boldsymbol{v_L}$-impulso-trabajo $\boldsymbol{\delta\mathcal{W}_f}$, dadas por

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_x \\ 0 & 0 & 0 & f_y \\ 0 & 0 & 0 & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{pmatrix};$$

$$\delta\mathcal{W}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_x \\ 0 & 0 & 0 & f_y \\ 0 & 0 & 0 & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_\mathrm{L}\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{L} f_x \mathrm{d}t \\ v_\mathrm{L} f_y \mathrm{d}t \\ v_\mathrm{L} f_z \mathrm{d}t \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

La cuarta componente de esta matriz $\delta\mathcal{W}_f$ es cero (Figura 2b). Del mismo modo que para las fuerzas que realizan trabajo, para este tipo de fuerzas sin desplazamiento, se puede definir una matriz *fuerza* (fuerza-potencia-${v_\mathrm{L}}^{-1}$) $\mathcal{F}_f$ como $\mathcal{F}_f = {v_\mathrm{L}}^{-1}\, f\, \mathcal{V}_f$, con

$$\mathcal{F}_f = v_\mathrm{L}^{-1}\frac{\delta\mathcal{W}_f}{\mathrm{d}t} = = v_\mathrm{L}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_x \\ 0 & 0 & 0 & f_y \\ 0 & 0 & 0 & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_\mathrm{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde se ha considerado que al no desplazarse su punto de aplicación en S_∞, la velocidad con la que se aplica la fuerza es cero, aunque su matriz velocidad $\mathcal{V}_f = (0, 0, 0, v_\mathrm{L})$ no es idénticamente nula (pues cada fuerza aplicada sobre el sistema siempre ejerce un impulso).

E. Fuerzas Magnéticas

Un campo magnético $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ se identifica por una matriz 4×4 B dada por [13]:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & v_\mathrm{L}B_z & -v_\mathrm{L}B_y & 0 \\ -v_\mathrm{L}B_z & 0 & v_\mathrm{L}B_x & 0 \\ v_\mathrm{L}B_y & -v_\mathrm{L}B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo la expresión de B la forma que adopta, en la teoría especial de la relatividad, con c en lugar de v_L, el tensor asociado a un campo magnético $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

La matriz fuerza $\mathcal{F}_B$ sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ viene dada por la expresión $\mathcal{F}_B = qB\mathcal{V}/v_L$, con

$$\mathcal{F}_\mathrm{B} = \frac{q}{v_\mathrm{L}}\begin{pmatrix} 0 & v_\mathrm{L}B_z & -v_\mathrm{L}B_y & 0 \\ -v_\mathrm{L}B_z & 0 & v_\mathrm{L}B_x & 0 \\ v_\mathrm{L}B_y & -v_\mathrm{L}B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_\mathrm{L} \end{pmatrix} =$$

$$= q\begin{pmatrix} v_yB_z - B_yv_z \\ v_zB_x - B_zv_x \\ v_xB_y - B_xv_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo esta definición el equivalente matricial de la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ clásica.

El formalismo matricial permite obtener directamente que las fuerzas magnéticas no realizan trabajo sobre la partícula sobre la que actúan. El mismo resultado se obtiene con $\delta\mathcal{W}_\mathrm{B} = q{v_L}^{-1}\,\mathrm{B}\,\mathcal{V}\,\mathrm{d}t$.

F. Matrices asociadas al centro-de-masas

El desplazamiento del centro-de-masas de un cuerpo juega un papel físico importante y tiene asociada una velocidad $\vec{v}_{cm}$, dada por el vector $\vec{v}_\mathrm{cm} = (v_{x,\mathrm{cm}}, v_{y,\mathrm{cm}}, v_{z,\mathrm{cm}})$, y un momento lineal $\vec{p}_\mathrm{cm}$, dado por el vector:

$$\vec{p}_\mathrm{cm} = (p_{x,\mathrm{cm}}, p_{y,\mathrm{cm}}, p_{z,\mathrm{cm}}) = (Mv_{x,\mathrm{cm}}, Mv_{y,\mathrm{cm}}, Mv_{z,\mathrm{cm}}),$$

una energía cinética K_cm, dada por el escalar:

$$K_\mathrm{cm} = M{v_\mathrm{cm}}^2/2,$$

un desplazamiento espacial:

$$\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{cm} = (\mathrm{d}L_{x,\mathrm{cm}},\ \mathrm{d}L_{y,\mathrm{cm}},\ \mathrm{d}L_{z,\mathrm{cm}}),$$

con un *desplazamiento temporal* $\mathrm{d}t$, y va a tener asociadas dos matrices: la matriz $\mathrm{d}K_\mathrm{cm}$ de v_L-momento lineal-energía cinética (del centro-de-masas), y la matriz $\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{cm}$ de v_L-desplazamiento espacial-desplazamiento temporal (matriz espacio-tiempo clásica) (del centro-de-masas).
Estas matrices van a ser:

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_\mathrm{cm} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{L}M\mathrm{d}v_{x,\mathrm{cm}} \\ v_\mathrm{L}M\mathrm{d}v_{y,\mathrm{cm}} \\ v_\mathrm{L}M\mathrm{d}v_{z,\mathrm{cm}} \\ \frac{1}{2}M\mathrm{d}v_\mathrm{cm}^2 \end{pmatrix};\ \mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{cm} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_{x,\mathrm{cm}} \\ \mathrm{d}L_{y,\mathrm{cm}} \\ \mathrm{d}L_{z,\mathrm{cm}} \\ v_\mathrm{L}\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

respectivamente.

De nuevo para poner de manifiesto la versatilidad del formalismo, se pueden definir las correspondientes matrices momento-lineal-energía cinética-${v_\mathrm{L}}^{-1}$, $\mathrm{d}\mathcal{P}_\mathrm{cm} = {v_\mathrm{L}}^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{K}_\mathrm{cm}$, cuyas componentes tienen unidades de momento lineal, y la matriz tiempo-espacio- ${v_\mathrm{L}}^{-1}$, $\mathrm{d}\mathcal{T}_{cm} = {v_\mathrm{L}}^{-1}\mathrm{d}\mathcal{L}_{cm}$, cuyas componentes tienen unidades de tiempo.

G. Matrices termodinámicas

El desarrollo del formalismo exige definir toda una serie de matrices relacionadas con magnitudes termodinámicas.

G.1 Matrices energía interna. En termodinámica clásica, la energía interna de un cuerpo varía sin que se le asocie ningún cambio en el momento lineal del mismo.

Cualquier matriz columna variación de energía interna $d\mathcal{U}_j$, debe ser de la forma

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}U_j \end{pmatrix};\ \mathrm{d}\mathcal{U}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}U_T \end{pmatrix}. \tag{6}$$

La variación $\mathrm{d}U$ puede recibir contribuciones de la variación de la energía interna, $\mathrm{d}K_\mathrm{int}$(incluyendo la variación de la energía cinética de rotación o energía cinética con respecto al centro-de-masas del sistema, con momento lineal nulo), y cualquier trabajo interno [18], $\mathrm{d}w_\mathrm{int} = -\mathrm{d}\Phi$, es decir, realizado por las fuerzas conservativas internas, de la variación de energía interna asociada a las variaciones de temperatura, $\mathrm{d}U = Mc_V(T)\mathrm{d}T$, donde $c_V(T)$ es el calor específico, que puede depender de la temperatura, con su correspondiente matriz $\mathrm{d}\mathcal{U}_T$, Ec. (6), de las variaciones de energía interna asociadas a reacciones químicas dU_ξ, etc. La matriz asociada a las variaciones de energía cinética interna $d\mathcal{K}_{\text{int}}$, que forman parte de la variación de la energía interna del sistema, es $\mathrm{d}\mathcal{K}_{int} = \mathrm{d}\mathcal{U}_{k,\ \text{int}}$, con

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_{\mathrm{k,\,int}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}K_{\mathrm{int}} \end{pmatrix}; \qquad (7)$$

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}U_\xi \end{pmatrix}, \mathrm{d}\mathcal{U}_{\mathrm{ph}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}U_{\mathrm{ph}} \end{pmatrix}.$$

Para un observador situado en el centro-de-masas, las variaciones de la energía cinética respecto del centro-de-masas se producen con variación nula del momento lineal respecto del centro-de-masas. Cuando un sistema varíe su composición por una reacción química sin cambiar su temperatura, $\mathrm{d}U_\xi$, se tendrá que $\mathrm{d}U_\xi = \sum_p \mathrm{d}U_p - \sum_r \mathrm{d}U_r$ (p para productos de la reacción y r para reactivos de la misma) como diferencia entre las energías de los enlaces formados para dar lugar a los productos, menos las energías de los enlaces previamente rotos en los reactivos. Para una reacción química que se produce en el interior del sistema (una explosión, reacciones bioquímicas en músculos, etc.), conocidos los reactivos y productos de la misma, se tendrá una matriz $\mathrm{d}\mathcal{U}_\xi$, Ec. (7). Si el sistema presenta una transición de fase, la correspondiente variación $\mathrm{d}U_{\mathrm{ph}}$ deberá ser considerada en su correspondiente matriz, $\mathrm{d}\mathcal{U}_{\mathrm{ph}}$, (Ecuación 7).

G.2 Matrices trabajo de configuración. Cuando sobre un sistema se aplique una fuerza externa $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, que tenga asociado un cierto desplazamiento, por ejemplo, la fuerza aplicada sobre el émbolo que cierra un cilindro que contiene un gas (Figura 3a), $\mathrm{d}\vec{L}_F = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$, aplicándose dicha fuerza durante un intervalo de tiempo dt, se define la matriz v_L-impulso-trabajo de configuración $\delta\mathcal{W}_F$, con $\delta\mathcal{W}_F = \mathrm{F}\,\mathrm{d}\mathcal{L}_F$.

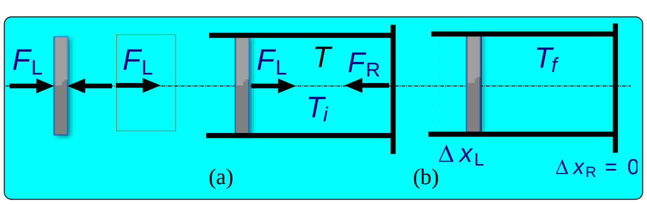

FIGURA 3. *Compresión de un gas.* (a) Gas encerrado en un cilindro apoyado en una pared, comprimido bajo la acción de dos fuerzas, una aplicada sobre la parte del gas en contacto con el \émbolo, y otra sobre la parte del gas en contacto con la base del cilindro que contiene el gas. (b) La fuerza F_L se desplaza Δx_L, realizando trabajo sobre el gas. La fuerza F_R tiene desplazamiento nulo y no realiza trabajo sobre el gas. Los émbolos actúan como intermediarios, de tal forma que el gas ejerce sobre ellos una fuerza igual y de sentido contrario a la que el agente externo aplica sobre el émbolo.

Como ya se ha indicado, en ciertos procesos se pueden encontrar fuerzas que se aplican durante un cierto intervalo de tiempo, pero su desplazamiento es nulo (por ejemplo, la fuerza que se aplica sobre la base de un gas encerrado en un cilindro cuando sobre el émbolo se aplica otra fuerza (Figura 3b), o la fuerza que el suelo ejerce sobre el pie de una persona al andar). Es decir, es posible aplicar una fuerza durante un tiempo, ejerciendo un impulso sobre el cuerpo, sin que dicha fuerza tenga desplazamiento y, por tanto, sin que realice trabajo. Pero no es posible realizar trabajo sobre un sistema con una fuerza sin además ejercer un impulso sobre el sistema (si hay varias fuerzas aplicadas sobre un mismo sistema, el impulso total aplicado puede ser cero y el trabajo total no nulo). En aquellos casos en los que la fuerza no tiene asociado desplazamiento (Figura 3) se tiene que su matriz desplazamiento tiene ceros en las componentes correspondientes y, entonces $\delta\mathcal{W}_f = \mathrm{f}\,\mathrm{d}\mathcal{L}_f$ se obtiene una matriz v_L-impulso--trabajo, con la componente de trabajo nula.

Un tipo de trabajo de configuración importante en un sistema termodinámico es aquel en el que un gas, líquido o sólido, se expanden, o comprimen, contra la presión atmosférica externa P (que no es, en ocasiones, la presión del sistema, que, a lo largo de un proceso irreversible puede no estar definida), con $\delta\mathcal{W}_f = \mathrm{f}\,\mathrm{d}\mathcal{L}_f$, donde $\mathrm{d}V$ es la variación en volumen. La matriz columna trabajo de configuración $\delta\mathcal{W}_P$ para este tipo de procesos debe ser de la forma:

$$\delta\mathcal{W}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P\,\mathrm{d}V \end{pmatrix}; \delta\mathcal{W}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P\,\mathrm{d}V_\xi \end{pmatrix}.$$

También el trabajo realizado contra las fuerzas externas de la presión debido a la variación de volumen de los productos de una reacción química respecto de los reactivos (los posibles gases de una reacción se expanden en todas direcciones), siendo $\delta\mathcal{W}_\xi = -P\,\mathrm{d}V_\xi$, donde $\mathrm{d}V_\xi$ es la variación en volumen de la reacción química. Cuando en un sistema finito se produce una reacción química, por ejemplo, una explosión, produciéndose una variación en el volumen del sistema, el centro-de-masas no puede ni moverse ni adquirir velocidad. Si el sistema en cuestión se encuentra, de alguna manera unido a la Tierra, el centro-de-masas del sistema sí puede variar.

G.3 Matriz calor. En termodinámica clásica se admite, sin que se explicite, que el intercambio de energía por calor entre un cuerpo y su entorno se realiza sin que haya variación en el momento lineal del cuerpo. La energía intercambiada por calor entre un cuerpo y su entorno es una energía que no se puede caracterizar mecánicamente, es decir, haciendo intervenir magnitudes mecánicas, fuerzas, desplazamientos, etc. La energía intercambiada por calor se debe caracterizar recurriendo a diferencias de temperatura, un concepto ausente de la mecánica. La matriz columna calor Q debe ser de la forma [12]:

$$\delta\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta Q \end{pmatrix};\ \delta\mathcal{Q}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T\mathrm{d}S_\xi \end{pmatrix}.$$

La energía intercambiada por calor entre un sistema y su entorno, caracterizado por un foco térmico, se debe intercambiar sin que se produzcan variaciones de la velocidad del centro-de-masas del sistema. El referencial en el que el foco térmico que rodee el sistema se encuentre en reposo, debe ser el referencial S_∞. Cuando se produzca una reacción química en el interior de un sistema, con los reactivos y productos a temperatura T, puede haber un intercambio de energía por calor entre el sistema y su foco térmico a temperatura T, que va a ser de la forma $\delta Q_\xi = T\ dS_\xi$, donde dS_ξ es la variación de entropía de la reacción química. Si $dS_\xi < 0$, entonces $\delta Q_\xi < 0$ y se debe ceder calor δQ_ξ al menos, al foco térmico para evitar que la entropía del universo disminuya.

III. ECUACIÓN MATRICIAL DEL CENTRO-DE-MASAS

Una vez identificadas las diferentes matrices que van a describir un proceso, es necesario escribir las ecuaciones, matriciales, que las relacionan. Las ecuaciones matriciales se van a obtener basándose en las correspondientes ecuaciones, vectoriales y escalares, de la física clásica. En física clásica, para un proceso individual dado, todas las fuerzas se aplican simultáneamente y durante el mismo intervalo de tiempo (y se aplican del mismo modo en todos los referenciales inerciales). Para describir la traslación del centro-de-masas de un sistema, sobre el que actúan fuerzas externas $\vec{F}_{\mathrm{ext},j}$ de diferentes tipos, a partir de las matrices $d\mathcal{K}_{\mathrm{cm}}$, con unidades de energía, $d\mathcal{L}_{\mathrm{cm}}$, con unidades de desplazamiento, y F_j^{ext}, con unidades de fuerza, se postula la *ecuación matricial del centro de masas*, equivalente matricial de la *ecuación (escalar) del centro de masas* $\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} = \vec{F}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}L_{\mathrm{cm}}$,

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} = \mathrm{F}^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{cm}}\,, \tag{8}$$

donde $F^{ext} = \sum_j F_j^{ext}$, que, explícitamente, viene dada por

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M\mathrm{d}v_{x,\mathrm{cm}} \\ v_{\mathrm{L}} M\mathrm{d}v_{y,\mathrm{cm}} \\ v_{\mathrm{L}} M\mathrm{d}v_{z,\mathrm{cm}} \\ \frac{1}{2}M\mathrm{d}v_{\mathrm{cm}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_{x,\mathrm{cm}} \\ \mathrm{d}L_{y,\mathrm{cm}} \\ \mathrm{d}L_{z,\mathrm{cm}} \\ v_{\mathrm{L}}\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

donde $F_x = \sum_j F_{x,j}$, etc. A partir de la *ecuación matricial del centro-de-masas*, se tienen, por componentes, vectorial y escalar, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{L}}\Big[M\mathrm{d}v_x &= \sum_j F_{x,j}\mathrm{d}t\Big], \\ v_{\mathrm{L}}\Big[M\mathrm{d}v_z &= \sum_j F_{z,j}\mathrm{d}t\Big], \\ v_{\mathrm{L}}\Big[M\mathrm{d}v_y &= \sum_j F_{y,j}\mathrm{d}t\Big], \\ \frac{1}{2}M\mathrm{d}v^2 &= \vec{F}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{cm}}, \end{aligned} \tag{9}$$

Donde

$$\vec{F}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{cm}} = \Big(\sum_j F_{x,j}\Big)\mathrm{d}L_{x,\mathrm{cm}} + \Big(\sum_j F_{y,j}\Big)\mathrm{d}L_{y,\mathrm{cm}} + \\ + \Big(\sum_j F_{z,j}\Big)\mathrm{d}L_{z,\mathrm{cm}}\,,$$

es el pseudo-trabajo [19] (producto escalar de la fuerza resultante por el desplazamiento del centro de masas del sistema). Las tres primeras componentes corresponden a la *ecuación (vectorial) de la segunda ley de Newton* aplicada al proceso. La última, Ecuación 9, es la correspondiente *ecuación (escalar) del centro-de-masas* relativa al proceso.

Puesto que la ecuación del centro de masas se puede obtener a partir de la ecuación de la segunda ley de Newton, la ecuación matricial del centro de masas contiene información redundante. Esta ecuación matricial se cita a modo de recordatorio y para que destaquen más fácilmente sus diferencias con la *ecuación matricial de la energía*, que se va a obtener a continuación.

Para destacar las simetrías del formalismo, con las matrices $d\mathcal{P}_{cm}$, con unidades de momento lineal, y $d\mathcal{T}_{cm}$, con unidades de tiempo, previamente definidas, se tiene de forma equivalente la *ecuación matricial del impulso-momento lineal* (equivalente matricial de la *ecuación vectorial de la segunda ley de Newton)* expresada como

$$\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{cm}} = \vec{F}_{\mathrm{ext}}\,\mathrm{d}t\ ,$$

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{cm}} = \mathrm{F}^{\mathrm{ext}}\,\mathrm{d}\mathcal{T}_{\mathrm{cm}}\,, \tag{10}$$

y también como:

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{cm}} = \mathcal{F}^{\mathrm{ext}}\,\mathrm{d}t.$$

IV. ECUACIÓN MATRICIAL DE LA ENERGÍA

Como ya se ha considerado con la ecuación matricial del centro-de-masas, se admite que las ecuaciones matriciales mantienen la estructura de las correspondientes ecuaciones en física clásica. Siguiendo este criterio, la *ecuación matricial de la energía*, se postula que es de la forma (equivalente matricial de la *ecuación escalar de la energía* o primer principio de la termodinámica) [5],

$$d\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} + dU = \delta W_{\mathrm{ext}} + \delta Q,$$

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} + \sum_n \mathrm{d}\mathcal{U}_n = \sum_j \big(\mathrm{F}_j^{\mathrm{ext}}\mathrm{d}\mathcal{L}_j\big) + \delta\mathcal{Q}, \tag{11}$$

donde $d\mathcal{U} = \sum_n d\,\mathcal{U}_n$ es la matriz para la variación total de las diferentes formas de energía interna del sistema y $\delta\mathcal{W}_{\mathrm{ext}} = \sum_j (F_j^{\mathrm{ext}}\ d\mathcal{L}_j)$ es la matriz v_{L}-impulso-trabajo de todas las fuerzas externas, con $\delta\mathcal{W}_{\mathrm{ext}} = \sum_j \delta\mathcal{W}_{\mathrm{ext},j}$. En esta ecuación intervienen tanto matrices de origen mecánico (asociadas a las fuerzas externas) como matrices de origen termodinámico (en particular, las diversas formas de variar la energía interna del sistema, y el calor). Los posibles efectos de rotación van a contribuir a la variación de la energía interna del sistema (en un artículo posterior se considera el tratamiento matricial de la rotación y su relación con esta ecuación matricial de la energía [14]).

Explícitamente, desarrollando las matrices, se tiene

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M \mathrm{d}v_{x,\mathrm{cm}} \\ v_{\mathrm{L}} M \mathrm{d}v_{y,\mathrm{cm}} \\ v_{\mathrm{L}} M \mathrm{d}v_{z,\mathrm{cm}} \\ \frac{1}{2} M \mathrm{d}v_{\mathrm{cm}}^2 \end{pmatrix} + \sum_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}U_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{x,j} \\ 0 & 0 & 0 & F_{y,j} \\ 0 & 0 & 0 & F_{z,j} \\ F_{x,j} & F_{y,j} & F_{z,j} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_{x,j} \\ \mathrm{d}L_{y,j} \\ \mathrm{d}L_{z,j} \\ v_{\mathrm{L}} \mathrm{d}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta Q \end{pmatrix},$$

a partir de esta ecuación matricial de la energía, se obtienen, por componentes la *ecuación vectorial de la segunda ley de Newton* y la *ecuación escalar del primer principio de la termodinámica*

$$v_{\mathrm{L}} \left[M \mathrm{d}v_{x,\mathrm{cm}} = \sum_j F_{x,j} \mathrm{d}t \right],$$

$$v_{\mathrm{L}} \left[M \mathrm{d}v_{y,\mathrm{cm}} = \sum_j F_{y,j} \mathrm{d}t \right],$$

$$v_{\mathrm{L}} \left[M \mathrm{d}v_{z,\mathrm{cm}} = \sum_j F_{z,j} \mathrm{d}t \right], \tag{12}$$

$$\frac{1}{2} M \mathrm{d}v_{\mathrm{cm}}^2 + \sum_n \mathrm{d}U_n = \sum_j \left(\vec{F}_{\mathrm{ext},j} \cdot \mathrm{d}\vec{L}_j \right) + \delta Q, \tag{13}$$

donde el trabajo δW realizado por las fuerzas externas viene dado por

$$\delta W = \sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext},j} \cdot \mathrm{d}\vec{L}_j = \sum_j \Big(F_{x,j} \mathrm{d}L_{x,j} + F_{y,j} \mathrm{d}L_{y,j} + + F_{z,j} \mathrm{d}L_{z,j} \Big).$$

En esta Ecuación 11 *todas* las fuerzas externas contribuyen al impulso, pero sólo las *fuerzas externas que se desplazan*, es decir, que tienen asociado un $\mathrm{d}\vec{L}_j$ no nulo, realizan trabajo.

La primera ecuación (12) que es vectorial, es de nuevo, la correspondiente ecuación de la segunda ley de Newton aplicada al proceso. A pesar de que cada matriz 4×4 de una fuerza externa F_j se multiplica por la matriz desplazamiento asociado a esa fuerza $\mathrm{d}L_j$, como todas las matrices desplazamiento tienen la componente temporal en común $v_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t$, también con esta ecuación se obtiene, como componente vectorial, la segunda ley del Newton para el proceso. La segunda ecuación (13), que es escalar, es la correspondiente ecuación del primer principio de la termodinámica aplicado al proceso.

Aunque la ecuación matricial de la energía propuesta se basa en la expresión clásica del primer principio de la termodinámica, generalizado para incluir la energía cinética del centro-de-masas del sistema que, en este caso, tiene relación directa con la segunda ley de Newton (ecuación impulso lineal-variación del momento lineal), del correspondiente proceso.

Es importante destacar la siguiente relación entre la *ecuación matricial del centro de masas* y la correspondiente *ecuación matricial de la energía*. Puesto que la *ecuación matricial de la energía* va a proporcionar la *ecuación (vectorial) de la segunda ley de Newton* $\vec{F}_{\mathrm{ext}}\ \mathrm{d}t = M\ \mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{cm}}$ para un proceso y, a partir de ésta, con $\vec{F}_{\mathrm{ext}}\ \vec{v}_{\mathrm{cm}}\ \mathrm{d}t = M\vec{v}_{\mathrm{cm}}\ \mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{cm}}$, es posible obtener la *ecuación escalar del centro-de-masas*,

$$\frac{1}{2} M \big(\mathrm{d}v_{x,\mathrm{cm}}^2 + \mathrm{d}v_{y,\mathrm{cm}}^2 + \mathrm{d}v_{z,\mathrm{cm}}^2 \big) = F_x \mathrm{d}x_{\mathrm{cm}} + + F_y \mathrm{d}y_{\mathrm{cm}} + F_z \mathrm{d}z_{\mathrm{cm}},$$

para dicho proceso, se tiene que la *ecuación matricial de la energía* contiene toda la información necesaria para resolver un problema (de traslación) dado. Si se ha postulado primero la *ecuación matricial del centro-de-masas* ha sido para explorar las posibilidades del formalismo matricial y para enfatizar las diferencias que en el tratamiento habitual de la mecánica y la termodinámica existen entre la *ecuación escalar del centro-de-masas* y la *ecuación escalar de la energía*, o primer principio de la termodinámica.

V. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD. TRANSFORMACIONES RELATIVISTAS

Sean, por ejemplo, dos referenciales $\mathrm{S_A}$ y S_∞ relacionados mediante transformaciones de coordenadas

$$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}}(x, y, z, v_{\mathrm{L}} t),$$

$$y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{A}}(x, y, z, v_{\mathrm{L}} t),$$

$$z_{\mathrm{A}} = z_{\mathrm{A}}(x, y, z, v_{\mathrm{L}} t),$$

$$v_{\mathrm{L}} t_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{L}} t_{\mathrm{A}}(x, y, z, v_{\mathrm{L}} t).$$

La matriz $\mathrm{J}(x_{\mathrm{A}}, x)$ de la transformación entre estos referenciales viene dada por:

$$\mathrm{J}(x_{\mathrm{A}}, x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_{\mathrm{A}}}{\partial x} & \dfrac{\partial x_{\mathrm{A}}}{\partial y} & \dfrac{\partial x_{\mathrm{A}}}{\partial z} & \dfrac{\partial x_{\mathrm{A}}}{\partial (v_{\mathrm{L}} t)} \\ \dfrac{\partial y_{\mathrm{A}}}{\partial x} & \dfrac{\partial y_{\mathrm{A}}}{\partial y} & \dfrac{\partial y_{\mathrm{A}}}{\partial z} & \dfrac{\partial y_{\mathrm{A}}}{\partial (v_{\mathrm{L}} t)} \\ \dfrac{\partial z_{\mathrm{A}}}{\partial x} & \dfrac{\partial z_{\mathrm{A}}}{\partial y} & \dfrac{\partial z_{\mathrm{A}}}{\partial z} & \dfrac{\partial z_{\mathrm{A}}}{\partial (v_{\mathrm{L}} t)} \\ \dfrac{\partial (v_{\mathrm{L}} t_{\mathrm{A}})}{\partial x} & \dfrac{\partial (v_{\mathrm{L}} t_{\mathrm{A}})}{\partial y} & \dfrac{\partial (v_{\mathrm{L}} t_{\mathrm{A}})}{\partial z} & \dfrac{\partial (v_{\mathrm{L}} t_{\mathrm{A}})}{\partial (v_{\mathrm{L}} t)} \end{pmatrix}.$$

Se enuncia ahora la siguiente Hipótesis de Proyección sobre transformaciones entre referenciales utilizando matrices de proyección:

> Dada una matriz (columna), $\mathcal{A}$, en el referencial S_∞, se obtiene la correspondiente matriz $\mathcal{A}_\mathrm{A}$ en el referencial S_A, (tal que la matriz $\mathcal{A}_\mathrm{A}$ debe corresponder a la descripción del mismo cuerpo o proceso físico que la matriz $\mathcal{A}$, pero en el referencial S_A), llevando a cabo el producto de matrices
>
> $$\mathcal{A}_\mathrm{A} = \mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\mathcal{A}.$$

Esta hipótesis constituye la aplicación en física clásica de la denominada *hipótesis de la formulación asíncrona* en relatividad [12].

Generalizando esta hipótesis, si en el referencial S_∞ se tiene una ecuación matricial del centro-de-masas dada, por ejemplo, por

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_\mathrm{cm} = (\mathrm{G}+\mathrm{N}+\mathrm{F}+\mathrm{R})\,\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{cm}\,,$$

donde G, N, F y R, son las matrices asociadas a las correspondientes fuerzas $\vec{G}, \vec{N}, \vec{F}$ y $\vec{R}$ aplicadas sobre el sistema, para describir un determinado proceso, en el referencial S_A, el mismo proceso vendrá descrito por la ecuación

$$\mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\left[\mathrm{d}\mathcal{K}_\mathrm{cm} = (\mathrm{G}+\mathrm{N}+\mathrm{F}+\mathrm{R})\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{cm}\right],$$

con

$$\begin{gathered}[\mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{d}\mathcal{K}_\mathrm{cm}] = \\ = \left[\mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)(\mathrm{G}+\mathrm{N}+\mathrm{F}+\mathrm{R})\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x)\right] \\ [\mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{cm}]\,, \end{gathered} \tag{14}$$

donde $\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x)$ es la matriz de proyección inversa de $\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x)$, tal que $\mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x) = 1$, y con las transformaciones

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm,\,A}} = \mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{d}\mathcal{K}_\mathrm{cm}\,;$$

$$\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{cm,\,A}} = \mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{cm}\,;$$

$$\mathrm{G}_\mathrm{A} = \mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{G}\,\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x);$$

$$\mathrm{N}_\mathrm{A} = \mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{N}\,\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x);$$

$$\mathrm{R}_\mathrm{A} = \mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{R}\,\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x).$$

$$\mathrm{F}_\mathrm{A} = \mathrm{J}(x_\mathrm{A}, x)\,\mathrm{F}\,\mathrm{J}^{-1}(x_\mathrm{A}, x),$$

Es decir, la Ec. (14) debe corresponder a la ecuación:

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm,\,A}} = (\mathrm{G}_\mathrm{A}+\mathrm{N}_\mathrm{A}+\mathrm{F}_\mathrm{A}+\mathrm{R}_\mathrm{A})\,\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{cm,\,A}}\,, \tag{15}$$

con las correspondientes matrices $\mathcal{K}_{\mathrm{cm,A}}$, $\mathcal{L}_{\mathrm{cm,A}}$, etc., medidas en el referencial S_A. La hipótesis de proyección enunciada asegura que el principio de relatividad se cumpla de forma directa en el formalismo matricial, pues cualquier ecuación matricial mantiene su forma funcional al transformarse entre referenciales.

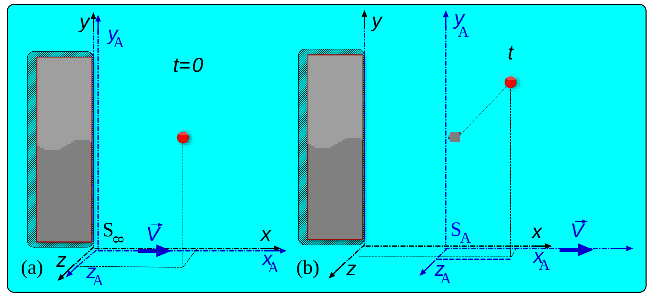

FIGURA 4. Referenciales S_∞ y S_A en configuración estándar. (a) Referenciales S_∞, en el que un cuerpo de masa cuasi-infinita permanece en reposo, y referencial S_A, en configuración estándar con respecto a S_∞, a tiempo $t = 0$. (b) Al cabo de un tiempo t, el referencial S_A se ha desplazado en horizontal una distancia Vt respecto de S_∞.

A. Referenciales en configuración estándar

Escribiendo las ecuaciones de los procesos físicos mediante ecuaciones matriciales, y eligiendo de forma adecuada una matriz de proyección entre referenciales, se consigue que todas las descripciones de los procesos cumplan el principio de relatividad. Con dicha matriz de proyección actuando sobre las matrices obtenidas en el referencial S_∞ se pueden obtener las correspondiente matrices tal y como los describe un observador en el referencial S_A en movimiento respecto del anterior.

Para un referencial S_A que se desplaza con su eje x_A paralelo al eje x del referencial S_∞, con velocidad $\vec{V} = (V, 0, 0)$, la denominada configuración estándar, se tiene la matriz de transformación

$$\Theta(V) = \lim_{v_\mathrm{L}\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -V/v_\mathrm{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -V/v_\mathrm{L} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para lograr la transformación entre referenciales de una ecuación, por ejemplo, de S a S_A, primero se aplica la matriz $\Theta(V)$ sobre las correspondientes matrices de la ecuación correspondiente en S, para posteriormente tomar el límite de $v_\mathrm{L} \to \infty$, reteniendo los términos constantes o proporcionales a v_L, obteniéndose las correspondientes ecuaciones matriciales en S_A.

B. Transformación de Galileo

Se debe notar que la matriz de transformación $\Theta(V)$ antes de tomar el límite $v_\mathrm{L} \to \infty$, no es la matriz de la transformación de Galileo, puesto que al aplicar $\Theta(V)$ a la matriz espacio-tiempo da lugar a:

$$\begin{pmatrix} x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{A} \\ v_\mathrm{L} t_\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -V/v_\mathrm{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -V/v_\mathrm{L} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_\mathrm{L} t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x - \frac{V}{v_\mathrm{L}}\, v_\mathrm{L} t \\ y \\ z \\ v_\mathrm{L} t - \frac{V}{v_\mathrm{L}}\, x \end{pmatrix}.$$

Formalmente se tienen las transformaciones de coordenadas entre referenciales en configuración estándar para el método matricial desarrollado:

$$x_\mathrm{A} = x - \frac{V}{v_\mathrm{L}}(v_\mathrm{L} t),$$
$$y_\mathrm{A} = y,$$
$$z_\mathrm{A} = z,$$
$$(v_\mathrm{L} t_\mathrm{A}) = (v_\mathrm{L} t) - \frac{V}{v_\mathrm{L}} x.$$

En este formalismo matricial el tiempo no es una magnitud absoluta sino que depende del referencial en que se describa el proceso (algo semejante a lo que sucede en relatividad). Cuando se toma el límite de $v_\mathrm{L} \to 0$, se recupera un tiempo absoluto, el mismo en todos los referenciales y se recupera la transformación de Galileo:

$$\lim_{v_\mathrm{L}\to\infty} \begin{pmatrix} x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{A} \\ v_\mathrm{L} t_\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - Vt \\ y \\ z \\ v_\mathrm{L} t \end{pmatrix}.$$

Aunque se utilice un formalismo matricial, si se emplea directamente la transformación de Galileo, y su matriz de transformación correspondiente, y no la matriz $\Theta(V)$ no se obtendrían las transformaciones correctas entre referenciales en configuración estándar. Se debe aplicar primero la matriz de transformación estándar $\Theta(V)$ para tomar posteriormente el límite de $v_\mathrm{L} \to \infty$ y mantener aquellos términos que no se anulan en este límite.

La matriz $\Theta(V)$ es una matriz simétrica, su inversa es:

$$\Theta^{-1}(V) = \Theta(-V),$$

tal que

$$\Theta(V)\Theta^{-1}(V) = \Theta^{-1}(V)\Theta(V) = 1.$$

Su generalización para traslaciones en cualquier dirección es inmediata, con la propiedad (hasta términos del orden de $\mathcal{O}(v_\mathrm{L}{}^{-2})$ antes de tomar el límite):

$$\Theta(V_1 + V_2) = \Theta(V_1)\,\Theta(V_2).$$

VI. TRANSFORMACIONES MATRICIALES DE MAGNITUDES

Las predicciones debidas a la aplicación de la matriz de proyección $\Theta(V)$ a las diferentes magnitudes matriciales pueden ser contrastadas experimentalmente, pues su aplicación anticipa las eventuales observaciones que serán llevadas a cabo por un observador respecto de un cierto proceso, si se conocen las observaciones llevadas a cabo por otro observador en movimiento relativo respecto del primero. Es decir, en vez de suponer la forma de ciertas transformaciones entre magnitudes, tal y como se hace en física clásica con las transformaciones de Galileo, dichas transformaciones entre referenciales en configuración estándar se pueden predecir a partir de la aplicación de la matriz de proyección $\Theta(V)$ y, posteriormente, estas predicciones se pueden contrastar experimentalmente.

A. Transformación matricial de desplazamiento, velocidad y aceleración

Si el desplazamiento del centro-de-masas de un cuerpo en S_∞ viene caracterizado por la matriz $\mathcal{L}_\mathrm{cm} = (L_\mathrm{cm}, 0, 0, v_\mathrm{L} t_0)$, para el desplazamiento del centro-de-masas en el referencial $\mathrm{S_A}$ se tiene la matriz $\mathcal{L}_\mathrm{cm,A} = \Theta(V)\,\mathcal{L}_\mathrm{cm}$, con

$$\mathcal{L}_\mathrm{cm,A} = \Theta(V) \begin{pmatrix} L_\mathrm{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_\mathrm{L} t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_\mathrm{cm} - V t_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_\mathrm{L} t_0 \end{pmatrix}.$$

En esta descripción el desplazamiento en $\mathrm{S_A}$ será $L_\mathrm{cm,A} = L_\mathrm{cm} - V t_0$, mientras el tiempo es absoluto y es un invariante del formalismo matricial (Fig. 4). Si la velocidad del centro-de-masas de un cuerpo en S_∞ viene caracterizada por la matriz $\mathcal{V}_\mathrm{cm}$, la matriz $\mathcal{V}_\mathrm{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_\mathrm{cm} = (v_\mathrm{cm}, 0, 0, v_\mathrm{L})$ en $\mathrm{S_A}$ vendrá dada por:

$$\mathcal{V}_\mathrm{cm,A} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{cm,A} \\ 0 \\ 0 \\ v_\mathrm{L} \end{pmatrix} = \Theta(V) \begin{pmatrix} v_\mathrm{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_\mathrm{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{cm} - V \\ 0 \\ 0 \\ v_\mathrm{L} \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la transformación matricial de las velocidades $v_\mathrm{cm,A} = v_\mathrm{cm} - V$ que como se ha indicado anteriormente, se puede contrastar experimentalmente. La cuarta componente de estas matrices velocidad es siempre v_L, la misma para todos los observadores (lo que también sucede en relatividad con *c*).

Por ejemplo, si para un cuerpo que se mueve con aceleración $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en S_∞ se tiene la matriz $\mathcal{A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V = (a_x, a_y, a_z, 0)$, para el observador en $\mathrm{S_A}$ se tendrá la matriz $\mathcal{A}_\mathrm{A}$, con

$$\mathcal{A}_\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{x,\mathrm{A}} \\ a_{y,\mathrm{A}} \\ a_{z,\mathrm{A}} \\ 0 \end{pmatrix} = \Theta(V)\,\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

que corresponde a lo que ve el observador en $\mathrm{S_A}$. Se concluye entonces que la aceleración es un invariante del formalismo matricial. Procediendo de esta forma, se obtienen las transformaciones matriciales de las diversas magnitudes físicas.

B. Transformación matricial de las fuerzas

En el referencial $\mathrm{S_A}$, la matriz 4×4 $\mathrm{F_A}$ asociada a la matriz de fuerza F en S_∞ se obtiene haciendo $\mathrm{F_A} = \Theta(V)\mathrm{F}\,\Theta^{-1}(V)$. Esta definición es necesaria para que el formalismo matricial resulte coherente y que, por ejemplo, se cumpla que

$$\delta\mathcal{W}_{F,\mathrm{A}} = \mathrm{F_A}\,\mathrm{d}\mathcal{L}_{F,\mathrm{A}} =$$
$$= \left[\Theta(V)\mathrm{F}\,\Theta^{-1}(V)\right][\Theta(V)\,\mathrm{d}\mathcal{L}_\mathrm{F}] =$$
$$= \Theta(V)\,\delta\mathcal{W}_\mathrm{F}\,,$$

y la matriz $\delta\mathcal{W}_\mathrm{F}$ se transforme correctamente entre referenciales. Se puede a su vez comprobar que [hasta el orden $\mathcal{O}(v_\mathrm{L}{}^{-1})$, y tomando el límite correspondiente $v_\mathrm{L} \to \infty$]

$$\mathrm{F_A} = \Theta(V)\,\mathrm{F}\,\Theta^{-1}(V) = \mathrm{F}\,.$$

Esto implica que en este formalismo matricial las fuerzas pueden ser consideradas invariantes. Esta misma invariancia de las fuerzas se considera en física clásica.

C. Transformación matricales de magnitudes termodinámicas

Una vez obtenidas las matrices termodinámicas en un referencial en el que el sistema permanece en reposo, junto con las posibles fuentes de trabajo y focos térmicos $\boldsymbol{S}_\infty$, en el referencial $\boldsymbol{S_A}$, en configuración estándar con respecto al primero, se tendrá, por ejemplo, para la variación de energía interna $\boldsymbol{d\mathcal{U}_A}$ que

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_\mathrm{R} = \Theta(V)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\mathrm{d}U\end{pmatrix} = \lim_{v_\mathrm{L}\to\infty}\begin{pmatrix}-v_\mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}U}{v_\mathrm{L}^2}V\\0\\0\\\mathrm{d}U\end{pmatrix} =$$
$$= (0,0,0,\mathrm{d}U)\,.$$

En el formalismo matricial, la expresión de la variación de energía interna en S_∞ interviene, inicialmente, como $v_\mathrm{L}{}^{-2}\,\mathrm{d}U$, en la expresión del momento lineal en $\mathrm{S_A}$, pero esta contribución desaparece cuando se toma el límite $v_\mathrm{L} \to \infty$.

Un resultado similar se obtiene para δQ y las demás matrices termodinámicas (esta contribución inicial al momento lineal es un efecto relativista que desaparece en física clásica).

Debido a la estructura de las matrices termodinámicas (con sus tres componentes vectoriales nulos), $\mathrm{d}U$ y δQ son invariantes, iguales en todos los referenciales.

Para la matriz v_L-impulso-trabajo de configuración $\delta\mathcal{W}_F$ para una fuerza $\vec{F}$ que realiza trabajo, se tiene que se transformar como:

$$\delta\mathcal{W}_{F,\mathrm{A}} = \begin{pmatrix}v_\mathrm{L}I_{x,\mathrm{A}}\\v_\mathrm{L}I_{y,\mathrm{A}}\\v_\mathrm{L}I_{z,\mathrm{A}}\\\delta W_{F\mathrm{A}}\end{pmatrix} = \Theta(V)\begin{pmatrix}v_\mathrm{L}F_x\,\mathrm{d}t\\v_\mathrm{L}F_y\,\mathrm{d}t\\v_\mathrm{L}F_z\,\mathrm{d}t\\\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{L}_F\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}v_\mathrm{L}F_x\,\mathrm{d}t\\v_\mathrm{L}F_y\,\mathrm{d}t\\v_\mathrm{L}F_z\,\mathrm{d}t\\\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{L}_F - VF_x\,\mathrm{d}t\end{pmatrix}.$$

La expresión del trabajo en S_∞ interviene, inicialmente, como $v_\mathrm{L}{}^{-2}\,\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{L}_F$, en la expresión del momento lineal en $\mathrm{S_A}$, pero esta contribución desaparece cuando $v_\mathrm{L} \to \infty$**.** Por el contrario, la expresión del momento lineal en el referencial S_∞ sí interviene en la expresión del trabajo en $\mathrm{S_A}$, como $-VF_x\,\mathrm{d}t$, y esa contribución no desaparece en el límite clásico. Esto mismo sucede cuando se transforma la matriz $\mathrm{d}\mathcal{K}_\mathrm{cm}$. En el referencial $\mathrm{S_A}$, a la componente F_x de la fuerza se le asocia un desplazamiento dado por $\mathrm{d}L_{F,\mathrm{A}} = \mathrm{d}x - V\,\mathrm{d}t$, y a dicho componente se le asocia un *producto fuerza-desplazamiento* dado por $\delta\mathcal{W}_{F,\mathrm{A}} = F_x(\mathrm{d}x - V\,\mathrm{d}t)$.

Para la matriz columna fuerza $\mathcal{F}$ para una fuerza $\vec{F}$ que realiza trabajo, se tiene que se transforma como:

$$\mathcal{F}_\mathrm{A} = \begin{pmatrix}F_{x,\mathrm{A}}\\F_{y,\mathrm{A}}\\F_{z,\mathrm{A}}\\v_\mathrm{L}^{-1}\vec{F}_\mathrm{R}\cdot\vec{v}_\mathrm{R}\end{pmatrix} = \Theta(V)\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\\v_\mathrm{L}^{-1}\vec{F}\cdot\vec{v}\end{pmatrix} =$$
$$= \left(F_x, F_y, F_z, v_\mathrm{L}^{-1}\left[\vec{F}\cdot\vec{v} - VF_x\right]\right).$$

Cuando una fuerza $\vec{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{f_x}, \boldsymbol{f_y}, \boldsymbol{f_z})$, que no realiza trabajo, se proyecta sobre otro referencial, su matriz $\boldsymbol{v_L}$-impulso--trabajo, se transforma como

$$\delta\mathcal{W}_{f,\mathrm{A}} = \begin{pmatrix}v_\mathrm{L}I_{x,\mathrm{A}}\\v_\mathrm{L}I_{y,\mathrm{A}}\\v_\mathrm{L}I_{z,\mathrm{A}}\\\delta W_{f\mathrm{A}}\end{pmatrix} = \Theta(V)\begin{pmatrix}v_\mathrm{L}f_x\,\mathrm{d}t\\v_\mathrm{L}f_y\,\mathrm{d}t\\v_\mathrm{L}f_z\,\mathrm{d}t\\0\end{pmatrix} =$$
$$= \left(v_\mathrm{L}f_x\,\mathrm{d}t, v_\mathrm{L}f_y\,\mathrm{d}t, v_\mathrm{L}f_z\,\mathrm{d}t, -Vf_x\,\mathrm{d}t\right).$$

También se tiene que la matriz $\mathcal{F}_f$ se transforma en $\mathcal{F}_{f,\mathrm{A}}$ como:

$$\mathcal{F}_{f,\mathrm{A}} = \begin{pmatrix}f_{x,\mathrm{A}}\\f_{y,\mathrm{A}}\\f_{z,\mathrm{A}}\\v_\mathrm{L}^{-1}\vec{f}_\mathrm{R}\cdot\vec{v}_\mathrm{R}\end{pmatrix} = \Theta(V)\begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\\0\end{pmatrix} =$$
$$= \left(f_x, f_y, f_z, -v_\mathrm{L}^{-1}Vf_x\right).$$

Aunque la fuerza $\vec{f}$ no tenga asociado desplazamiento espacial, y no realice trabajo en el referencial S_∞, en el referencial $\mathrm{S_A}$ tiene asociado un desplazamiento $\mathrm{d}L_{f,\mathrm{A}} = -V\,\mathrm{d}t$ en x, y se le asocia un *producto fuerza-desplazamiento* (trabajo) $\delta W_{f,\mathrm{A}} = -f_x\,V\,\mathrm{d}t$.

VII. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD. TRANSFORMACIONES DE ECUACIONES

Con la hipótesis anterior sobre la matriz $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{V})$, se tiene que el principio de relatividad se cumple directamente, pues el formalismo garantiza que las ecuaciones matriciales mantienen su forma funcional al cambiar de referencial. Esta hipótesis, además de predecir transformaciones de magnitudes entre referenciales -- predicciones que se pueden contrastar experimentalmente, tiene otras consecuencias. Si en el sistema de referencia S_∞ se obtienen, a partir de la ecuación matricial del centro-de-masas, las ecuaciones por componentes, vectoriales para la segunda ley de Newton, y escalar, para la ecuación del centro de masas,

$$\mathrm{d}\vec{p} = \mathrm{d}\vec{I} = \left(\sum_k \vec{F}_k\right)\mathrm{d}t;$$

$$\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} = \left(\sum_k \vec{F}_k\right)\cdot \mathrm{d}\vec{x}_{\mathrm{cm}}\,,$$

en el referencial $\mathrm{S_A}$ que se mueve en configuración estándar con velocidad V respecto de S_∞, se tendrán las ecuaciones:

$$\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{A}} = \mathrm{d}\vec{I} = \left(\sum_k \vec{F}_k\right)\mathrm{d}t;$$

$$\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} - \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{p} = \left(\sum_k \vec{F}_k\right)\cdot \mathrm{d}\vec{x}_{\mathrm{cm}} - \vec{V}\cdot\vec{I}\,.$$

La segunda ley de Newton no se ve modificada entre referenciales (d$\vec{p}$, las fuerzas y el intervalo de tiempo, son invariantes del formalismo; aunque la velocidad se transforma, su variación no lo hace). La ecuación del centro-de-masas sí se ve transformada. Es decir, en $\mathrm{S_A}$ la ecuación del centro-de-masas se puede descomponer, sumando miembro a miembro, como la combinación lineal de ecuaciones que se cumplen en S_∞

$$-\vec{V}\cdot\left[\mathrm{d}\vec{p} = \vec{I}\right]$$
$$+$$
$$\left[\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} = \left(\sum_k \vec{F}_k\right)\cdot \mathrm{d}\vec{x}_{\mathrm{cm}}\right],$$

que son ecuaciones (entre corchetes) que se cumplen en S_∞ cada una de ellas. Los factores de esta combinación lineal de ecuaciones siempre serán funciones (o constantes) que dependerán de la velocidad $\vec{V}$ entre referenciales. Exactamente lo mismo va a suceder con la ecuación del primer principio de la termodinámica en $\mathrm{S_A}$, que se podrá expresar como combinación lineal de las ecuaciones de la segunda ley de Newton y del primer principio de la termodinámica en S_∞.

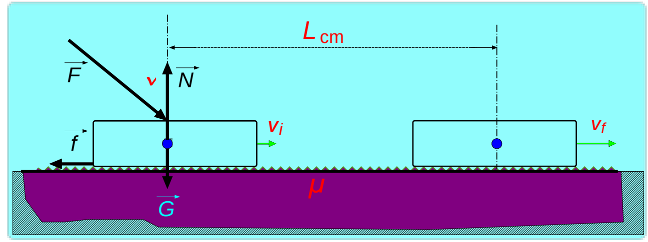

FIGURA 5. Bloque desplazado por una fuerza que realiza trabajo y contra una fuerza de rozamiento. Sistema de referencia S_∞ en el que el suelo permanece en reposo. Bloque moviéndose bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ que realiza trabajo y contra una fuerza de rozamiento $\vec{f}$. (i) Velocidad inicial $v_i = 0$. (f) Velocidad final, al cabo de un tiempo t_0 de aplicación de las fuerzas, $v_f = v$.

VIII. EJEMPLO 1. BLOQUE CON FUERZA Y ROZAMIENTO

Un ejercicio característico de un libro de texto es el movimiento en horizontal de un bloque sometido a algún tipo de fuerza ejercida por una fuente de trabajo y sometido además a una fuerza de rozamiento. En la Figura 5 se muestra un esquema de un proceso de este tipo. Un bloque sólido de masa M, se desplaza una distancia L_{cm} durante un intervalo de tiempo t_0, con una fuerza $\vec{F}$, proveniente de una fuente de trabajo, y contra una fuerza de rozamiento $\vec{f}$ con el suelo, que permanece en reposo en el referencial S_∞.

Para las fuerzas del proceso, fuerza aplicada $\vec{F} = (F\,\sin\theta\,, -F\,\cos\theta\,,\ 0)$, peso $\vec{G} = (0, -Mg, 0)$ y normal $\vec{N} = (0, N, 0)$, todas ellas con el desplazamiento espacial igual al del centro de masas, se tienen las matrices fuerza 4×4 y matrices columna desplazamiento,

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 0 & 0 & -F\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ F\mathrm{sen}\,\theta & -F\cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Mg \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Mg & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{d}\mathcal{L}_{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

y

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{d}\mathcal{L}_{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

respectivamente. La fuerza de rozamiento $\vec{R} = (-\mu N, 0, 0)$ se describe utilizando las leyes de Amontons y Coulomb para el rozamiento, con su matriz R dada por:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mu N \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix},\quad (18)$$

donde $\mathrm{d}\mathcal{L}_R$ es su matriz desplazamiento espacio-temporal, teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento dinámico no tiene desplazamiento espacial asociado pero sí ejerce un impulso sobre el bloque.

Puesto que todas las fuerzas son constantes, la matriz variación v_{L}-momento lineal-energía cinética del centro de masas es:

$$\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M(v_f^2 - v_i^2) \end{pmatrix}, \mathcal{L}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}} t_0 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathcal{L}_{\mathrm{cm}}$ la matriz del desplazamiento del centro-de-masas.

La *ecuación matricial del centro-de-masas* para este proceso de arrastre con fricción con fuerzas aplicadas constantes viene dada por:

$$\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} = [\mathrm{G} + \mathrm{N} + \mathrm{F} + \mathrm{R}]\mathcal{L}_{\mathrm{cm}}\,,$$

y explícitamente:

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M(v_f^2 - v_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_x & F_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}} t_0 \end{pmatrix},$$

donde $F_x = F\ \mathrm{sen}\theta - \mu N$ y $F_y = -F\ \cos\theta + N - Mg$, son las dos componentes de la fuerza resultante. A partir de la ecuación matricial se tienen las ecuaciones, vectorial y escalar, por componentes:

$$\begin{cases} v_{\mathrm{L}}\left[M(v_f - v_i) \right. & = (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)t_0\left.\right], \\ v_{\mathrm{L}}\left[0 \right. & = (-F\cos\,\theta + N - Mg)t_0\left.\right], \\ \frac{1}{2} M(v_f^2 - v_i^2) & = (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)L_{\mathrm{cm}}. \end{cases} \quad (19)$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene el valor de la fuerza normal, que es $N = Mg + F\cos\theta$, y las expresiones

$$\begin{cases} a_{\mathrm{cm}} & = \frac{1}{M}(F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N), \\ L_{\mathrm{cm}}(t_0) & = \frac{1}{2} a_{\mathrm{cm}} t_0^2, \\ v_f^2(L) - v_i^2 & = 2\left[\frac{1}{M}(F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)\right] L_{\mathrm{cm}}. \end{cases} \quad (20)$$

Se debe cumplir la condición $\mathrm{sen}\,\theta > \mu N/F$ para que el bloque se mueva. Conocidas las magnitudes M, μ, $\vec{F}$ y t_0, se pueden obtener a_{cm}, v_{cm}, N y L_{cm}, respectivamente.

Pueden obtenerse evidencias experimentales de efectos térmicos a lo largo del proceso descrito, efectos no contemplados en las anteriores ecuaciones, por lo que se necesita la *ecuación matricial de la energía* para poder caracterizar por completo el proceso.

Las matrices para la variación de energía interna $\mathrm{d}\mathcal{U}$ y para la energía intercambiada por calor con el entorno $\delta\mathcal{Q}$, son:

$$\mathrm{d}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Mc_V \mathrm{d}T \end{pmatrix}; \delta\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta Q \end{pmatrix},$$

respectivamente. La ecuación matricial de la energía

$$\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} + \Delta\mathcal{U} = \mathcal{W}_G + \mathcal{W}_N + \mathcal{W}_{\mathrm{F}} + \mathcal{W}_{\mathrm{R}} + \mathcal{Q},$$

para este proceso es:

$$\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} + \Delta\mathcal{U} = \mathrm{G}\mathcal{L}_G + \mathrm{N}\mathcal{L}_N + \mathrm{F}\mathcal{L}_F + \mathrm{R}\mathcal{L}_R + \mathcal{Q},$$

y, explícitamente:

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M(v_f^2 - v_i^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Mc_V(T_f - T_i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} F\,\mathrm{sen}\,\theta t_0 \\ -v_{\mathrm{L}} F\cos\theta t_0 \\ 0 \\ F\,\mathrm{sen}\,\theta L_{\mathrm{cm}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_{\mathrm{L}}\mu N t_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -v_{\mathrm{L}} Mg t_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\mathrm{L}} N t_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}.$$

Se tienen para el proceso las ecuaciones:

$$M(v_f - v_i) = (F\cos\theta - \mu N)t_0,$$

$$N - (Mg + F\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0,$$

$$\frac{1}{2} M(v_f^2 - v_i^2) + Mc_V(T_f - T) = F\,\mathrm{sen}\,\theta L_{\mathrm{cm}} + Q. \quad (21)$$

admitiendo que $T_f = T$ (proceso lento, la temperatura del bloque no varía), los efectos térmicos son $Q = -\mu N L_{\mathrm{cm}}$, energía disipada como calor, con el incremento de entropía del universo $\Delta S_{\mathrm{U}} = \frac{\mu N L_{\mathrm{cm}}}{T} > 0$. El proceso es irreversible, procediendo con aumento de la entropía del universo, en particular, del foco térmico que rodea al bloque. El papel de la fuerza de rozamiento es el de un intermediario que permite disipar en forma de trabajo disipativo o en forma de calor, (desde un punto de vista termodinámico, ambos son equivalentes) parte del trabajo realizado por la fuerza conservativa, o similar, no realizando dicha fuerza de rozamiento ningún trabajo ella misma.

A. Descripción en el referencial $\mathrm{S_A}$

Se va a considerar ahora la descripción del proceso descrito en la Fig. 5 en el referencial $\mathrm{S_A}$, en configuración estándar con respecto a S_∞, con velocidad V. Se tienen las matrices en S_A

$$\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm,A}} = \Theta(V)\,\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M\left(v_f^2 - v_i^2\right) - VM(v_f - v_i) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cm,A}} = \Theta(V)\mathcal{L}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} L_{\mathrm{cm}} - Vt_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}} t_0 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathcal{L}_{\mathrm{cm,A}}$ la matriz del desplazamiento del centro-de-masas en S_A. La *ecuación matricial del centro-de-masas* en S_A es

$$\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm,A}} = [\mathrm{G}+\mathrm{N}+\mathrm{F}+\mathrm{R}]\mathcal{L}_{\mathrm{cm,A}}\,,$$

las fuerzas son invariantes del formalismo) de donde se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} v_{\mathrm{L}}\Big[M(v_f - v_i) & = (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)t_0\Big], \\ \qquad v_{\mathrm{L}}\Big[0 & = (-F\cos\,\theta + N - Mg)t_0\Big], \\ \frac{1}{2}M\left(v_f^2 - v_i^2\right) & -VM(v_f - v_i) = \\ & = (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)(L_{\mathrm{cm}} - Vt_0). \end{cases} \tag{22}$$

Este conjunto de Ecuaciones (22) es equivalente a las Ecuaciones (19). Así, la ecuación del centro-de-masas en S_A se puede poner, sumando miembro a miembro, como la combinación lineal de las ecuaciones

$$-V\Big[M(v_f - v_i) \underset{+}{=} (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)t_0\Big]$$
$$\Big[\frac{1}{2}M\left(v_f^2 - v_i^2\right) = (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)L_{\mathrm{cm}}\Big],$$

previamente obtenidas en S_∞. Los desplazamientos de las fuerzas $\vec{F}, \vec{G}$ y $\vec{N}$ en S_A son

$$\mathcal{L}_{F,\mathrm{A}} = \mathcal{L}_{G,\mathrm{A}} = \mathcal{L}_{N,\mathrm{A}} = \Theta(V)\,\mathcal{L}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} L_{\mathrm{cm}} - Vt_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}} t_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{R,\mathrm{A}} = \Theta(V)\,\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} -Vt_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}} t_0 \end{pmatrix}.$$

siendo $\mathcal{L}_{R,\mathrm{A}}$ la matriz del desplazamiento en S_A de la fuerza de rozamiento $\vec{R}$. La *ecuación matricial de la energía* en S_A es

$$\Delta\mathcal{K}_{\mathrm{cm,A}} + \Delta\mathcal{U}_{\mathrm{A}} = \mathcal{W}_{F,\mathrm{A}} + \mathcal{W}_{G,\mathrm{A}} + \mathcal{W}_{N,\mathrm{A}} + \mathcal{W}_{R,\mathrm{A}} + \mathcal{Q}_{\mathrm{A}}\,,$$

con las ecuaciones vectorial y escalar,

$$\begin{cases} v_{\mathrm{L}}\Big[M(v_f - v_i) & = (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)t_0\Big], \\ \qquad v_{\mathrm{L}}\Big[0 & = (-F\cos\,\theta + N - Mg)t_0\Big], \\ \frac{1}{2}M\left(v_f^2 - v_i^2\right) & -VM(v_f - v_i) + Mc_P(T_f - T_i) = \\ & = F\,\mathrm{sen}\,\theta(L_{\mathrm{cm}} - Vt_0) + \mu NVt_0 + Q\,. \end{cases} \tag{23}$$

Este conjunto de Ecuaciones 23, es equivalente a las Ecuaciones 21. La ecuación de la energía en S_A se puede descomponer, sumando miembro a miembro, como

$$-V\Big[M(v_f - v_i) \underset{+}{=} (F\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu N)t_0\Big]$$

$$\frac{1}{2}M\left(v_f^2 - v_i^2\right) + Mc(T_f - T_i) = F\,\mathrm{sen}\,\theta\,L_{\mathrm{cm}} + Q\,,$$

con ecuaciones previamente obtenidas en S_∞ . En el referencial S_A

$$Q = -\mu(Mg + F\,\cos\,\theta)L_{\mathrm{cm}}\,;$$

$$\Delta S_{\mathrm{U}} = \frac{\mu(Mg + F\,\cos\,\theta)L}{T} \geq 0\,.$$

Tanto la energía intercambiada por calor Q como la variación de entropía del universo ΔS_U a lo largo del proceso, son invariantes galileanos.

IX. EJEMPLO 2. PERSONA EN PATINES QUE EMPUJA CONTRA UNA PARED

Un proceso relativamente sencillo de un cuerpo articulado con fuentes internas de energía libre que produce energía mecánica (una máquina térmica que se desplaza a sí misma), es el de una persona que adquiere energía cinética como un todo, apoyándose en una pared con los brazos contraídos y empujándose contra ella.

En la Figura 6 se muestra un esquema de un proceso en el que una persona, de masa M, colocada sobre patines para evitar el rozamiento con el suelo, empuja contra una pared.

Cuando la persona pierde el contacto con la pared, la velocidad de su centro-de-masas es $v_{\mathrm{cm}} \equiv v$. La fuerza del peso $\vec{G}$ de la persona y la fuerza normal $\vec{N}$ de reacción del suelo sobre ella, no intervienen en la descripción, pues se anulan mutuamente.

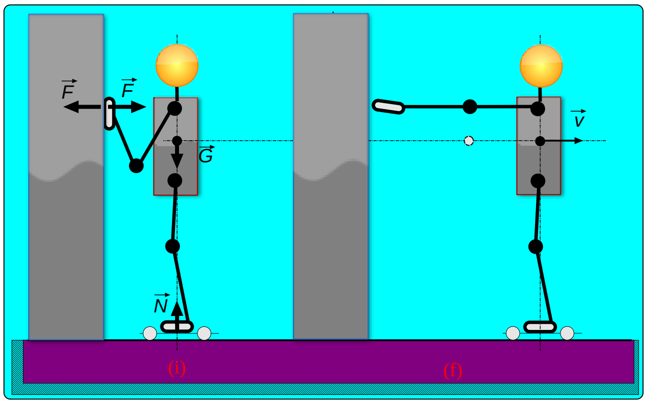

FIGURA 6. *Persona que empuja contra un muro* Sistema de referencia S_∞ en el que el muro permanece en reposo. (i) Persona que empuja contra un muro. La fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la mano de la persona no tiene desplazamiento espacial asociado. (f) El centro-de-masas de la persona se mueve con velocidad *v* cuando sus manos pierden contacto con la pared.

La fuerza $\bar{F}$ -- que se toma como una fuerza promedio entre la pared y la mano de la persona, $\vec{F} = (\bar{F}, 0, 0)$, tiene una matriz $\bar{\mathrm{F}}$ asociada

$$\bar{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{F} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

siendo su vector desplazamiento espacial $\mathrm{d}\vec{L}_F = (0,0,0)$, es decir, esta fuerza no tiene asociado desplazamiento espacial, pues siempre se aplica en el punto de contacto de la mano con la pared. Para la variación de la energía cinética del centro-de-masas de la persona se tienen las matrices $\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm}}$ y $\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{cm}}$,

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M \mathrm{d}v \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M \mathrm{d}v^2 \end{pmatrix}, \mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

pues para el centro-de-masas de la persona se tiene el vector desplazamiento $\mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{cm}} = (\mathrm{d}L_{\mathrm{cm}}, 0, 0)$ donde $L_{\mathrm{cm}} \equiv L_0$ será, aproximadamente, la longitud de su brazo. Alternativamente, se pueden escribir las matrices momento lineal--energía cinética-$v_{\mathrm{L}}{}^{-1}$ del centro-de-masas $\mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{cm}}$ y espacio-$v_{\mathrm{L}}{}^{-1}$—tiempo $\mathrm{d}\mathcal{T}_{\mathrm{cm}}$ como

$$\mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} M \mathrm{d}v \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}^{-1} \frac{1}{2} M \mathrm{d}v^2 \end{pmatrix}, \mathrm{d}\mathcal{T}_{\mathrm{cm}} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}}^{-1}\,\mathrm{d}L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Sólo se está interesado en el proceso que va desde que la mano comienza a presionar contra la pared hasta que mano y pared pierden el contacto. Para este proceso se tiene la *ecuación matricial del centro-de-masas* $\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} = \bar{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}\mathcal{L}_{\mathrm{cm}}$, y, alternativamente, como $\mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{cm}} = \bar{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}\mathcal{T}_{\mathrm{cm}}$, que explícitamente, es

$$\begin{pmatrix} M, \mathrm{d}v \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}^{-1} \frac{1}{2} M \mathrm{d}v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{F} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}}^{-1}\,\mathrm{d}L_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

que también puede expresarse como $\mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{cm}} = \bar{\mathcal{F}}\,\mathrm{d}t$. A partir de cualquiera de estas ecuaciones matriciales se obtienen las ecuaciones

$$M \mathrm{d}v = \bar{F} \mathrm{d}t;$$

$$\frac{1}{2} M\,\mathrm{d}v^2 = \bar{F}\,\mathrm{d}L_{\mathrm{cm}}.$$

Para el proceso con $L_{\mathrm{cm}} = L_0$, $v_{\mathrm{cm}} = v$, se tienen las ecuaciones

$$M v = \bar{F} t_0;$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = \bar{F} L_0.$$

Sin reparar en que la fuerza de contacto entre la persona y el muro (que se aplica sobre la persona durante un intervalo de tiempo t_0) no realiza trabajo, se suele presentar, incorrectamente, el problema como un ejercicio de aplicación del teorema trabajo-energía, siendo sin embargo, la *ecuación (escalar) del centro-de-masas* la que se obtiene. Se tiene también que

$$a_{\mathrm{cm}} = \frac{\bar{F}}{M};$$

$$v = a_{\mathrm{cm}} t_0;$$

$$L_0 = \frac{1}{2} a_{\mathrm{cm}} t_0^2.$$

Eliminando el tiempo t_0 entre *v* y L_0 se obtiene la ecuación del centro-de-masas anterior. Si se mide la velocidad final del centro-de-masas de la persona, y L_0, se puede conocer la fuerza $\bar{F}$ aplicada y el tiempo t_0 de aplicación de la misma.

Para los procesos bioquímicos, notados genéricamente con ξ, que tienen lugar en los músculos de la persona se tiene una variación de energía interna $\mathrm{d}U_\xi$, un trabajo de expansión contra la presión externa, $\delta W_P = P\,\mathrm{d}V_\xi$, y que hay energía intercambiada por calor con el entorno, $\delta Q = T\,\mathrm{d}S_\xi$ para asegurar que la entropía del universo no disminuye, con las matrices termodinámicas para variación de energía interna, trabajo de configuración y calor previamente definidas.

Para este proceso se tiene la *ecuación matricial de la energía*,

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} + \mathrm{d}\mathcal{U}_\xi = \delta\mathcal{W}_{\mathrm{F}} + \delta\mathcal{W}_\xi + \delta\mathcal{Q}_\xi$$

donde

$$\delta\mathcal{W}_{\mathrm{F}} = \bar{\mathrm{F}}\,\mathrm{d}\mathcal{L}_F,$$

con

$$\delta\mathcal{W}_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{F} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} \bar{F}\,\mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

A partir de esta ecuación matricial se obtienen las ecuaciones

$$M\mathrm{d}v = \bar{F}\mathrm{d}t;$$
$$\frac{1}{2}M\mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}U_\xi = -P\mathrm{d}V_\xi + T\mathrm{d}S_\xi\,.$$

Se tiene:

$$Mv = \bar{F}t_0\,;$$
$$\frac{1}{2}Mv^2 = -\Delta G_\xi\,.$$

La energía cinética de la persona proviene del alimento ingerido por ella y de la energía química acumulada en sus músculos.

En la ecuación escalar de la energía obtenida no interviene la fuerza $\bar{F}$, pues dicha fuerza no realiza trabajo. Comparando la ecuación escalar del centro-de-masas y la ecuación escalar de la energía, también se obtiene que $-\Delta\, G_\xi = \bar{F}L_0$. Si se mide la velocidad final v_f se puede hacer una estimación del gasto energético que exige el gasto de la persona.

Este proceso de una persona que se empuja contra una pared y se desplaza, es un ejemplo de un sistema articulado dotado de fuentes internas de energía libre que es capaz de moverse a sí mismo en su interacción con un cuerpo de masa cuasi-infinita, empleando fuerzas internas, que no se especifican, y utilizando para ello una fuerza externa que no realiza trabajo, aunque sí ejerce un impulso, sobre el sistema.

La fuerza $\vec{F}$ que ejerce la pared sobre la persona es sólo un intermediario que permite la transformación de la energía bioquímica en energía cinética, sin ella misma realizar trabajo.

Este proceso de producción de energía mecánica es, en principio reversible. Puesto que se ha supuesto que el calor $Q = T\Delta S_\xi$ intercambiado con el foco térmico es el necesario para compensar la posible disminución de la entropía en la reacción química de los músculos de la persona, el proceso como un todo se ha desarrollado sin aumento de la entropía del universo, $\Delta S_\mathrm{U} = 0$. La reversibilidad del proceso se pone de manifiesto desde el momento en que, idealmente, pero sin contravenir ninguna ley de la física, la energía mecánica producida se puede transformar completamente en otros tipos de energía mecánica, eléctrica, química, particularmente, en el aumento de la función de Gibbs de una reacción química en $-\Delta G_\xi$.

A. Descripción en el referencial $\mathrm{S_A}$

Aplicando la matriz de proyección $\Theta(V)$ a la ecuaciones obtenidas en S_∞ para este proceso, se obtienen las ecuaciones matriciales del centro-de-masas,

$$\Delta\mathcal{K}_\mathrm{cm,A} = \bar{\mathrm{F}}\mathcal{L}_\mathrm{cm,A}\,,$$

con

$$\begin{pmatrix} v_\mathrm{L}Mv \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{L}\bar{F}t_0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}(L_\mathrm{cm} - Vt_0) \end{pmatrix},$$

y de la energía

$$\Delta K_\mathrm{cm,A} + \Delta\mathcal{U}_\xi = \bar{\mathrm{F}}\mathcal{L}_{F,\mathrm{A}} + \mathcal{W}_\xi + \mathcal{Q}_\xi\,,$$

con

$$\begin{pmatrix} v_\mathrm{L}Mv \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_\xi \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} v_\mathrm{L}t_0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{F}Vt_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P\Delta V_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T\Delta S_\xi \end{pmatrix},$$

en el sistema de referencia $\mathrm{S_A}$, en configuración estándar con respecto a S_∞, con velocidad *V*. Se obtienen las ecuaciones en el referencial $\mathrm{S_A}$

$$M(v-V) + MV = \bar{F}t_0\,,$$
$$\frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \bar{F}(L_\mathrm{cm} - Vt_0)\,,$$
$$\frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 = -\bar{F}Vt_0 - \Delta G_\xi\,.$$

La descripción corresponde a un proceso en el que el centro-de-masas se desplaza en el referencial $\mathrm{S_A}$ en $L_\mathrm{cm,A} = L_\mathrm{cm} - Vt_0$ y la fuerza $\bar{F}$ tiene asociado un desplazamiento $L_{F,\mathrm{A}} = -Vt_0$. Cada una de las ecuaciones obtenidas en $\mathrm{S_A}$ se puede expresar como una combinación lineal de ecuaciones previamente obtenidas en S_∞. Además también en $\mathrm{S_A}$ se tiene que $\Delta G_\xi = \bar{F}\,L_\mathrm{cm}$, por lo que el gasto energético de la persona durante el proceso es un invariante relativista del formalismo matricial.

Si la persona, moviéndose sobre patines con velocidad *v* chocara contra una pared y se detuviera por completo, se tendrían (admitiendo que la fuerza, en sentido contrario, que ejerce la pared sobre su mano para frenarle es la misma que ejerció para acelerarle) se tiene la ecuación matricial de la energía

$$\begin{pmatrix} -v_\mathrm{L}Mv \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}Mv^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_\mathrm{L}\bar{F}t_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix},$$

con

$$Mv = \bar{F}t_0\,,$$
$$\frac{1}{2}Mv^2 = \bar{F}L_\mathrm{cm}\,,$$
$$-\frac{1}{2}Mv^2 = Q\,.$$

Las ecuaciones mecánicas que se obtienen son las mismas para ambos procesos, siendo la ecuación del primer principio muy diferente en el caso de la aceleración (reversible, función de Gibbs) y en el de frenado (irreversible, calor).

X. CONCLUSIONES

Para resolver completamente problemas en los que intervengan máquinas térmicas que se mueven a sí mismas (trenes, coches, personas, etc.), es necesario considerar tanto la segunda ley de Newton, por ejemplo, en su forma de ecuación del centro de masas $\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} = (\sum_j \vec{F}_{\mathrm{ext},j}) \cdot \mathrm{d}\vec{L}_{\mathrm{cm}}$, así como el primer principio de la termodinámica expresado como $\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} + \mathrm{d}U = \sum_j (\vec{F}_{\mathrm{ext},j} \cdot \mathrm{d}\vec{L}_j) + \delta Q$. De forma semejante, se necesitan ambas leyes para describir los efectos térmicos que se producen en procesos en los que intervienen fuerzas disipativas y en los que parte de la energía mecánica inicial del sistema se pierde como tal.

El formalismo matricial desarrollado, con las matrices definidas, las ecuaciones matriciales postuladas y las matrices de transformación entre referenciales encontradas, integra en la *ecuación matricial de la energía*

$$\mathrm{d}\mathcal{K}_{\mathrm{cm}} + \sum_n \mathrm{d}\mathcal{U}_n = \sum_j \delta\mathcal{W}_j^{\mathrm{ext}} + \delta\mathcal{Q},$$

tanto la segunda ley de Newton como el primer principio de la termodinámica, lo que permite resolver de forma sistemática problemas de mecánica y termodinámica. Así, el formalismo matricial es especialmente indicado para tratar con la descripción física de aquellos procesos que, implicando disipación o producción de energía mecánica, exigen que se consideren tanto las leyes de la mecánica como las leyes de la termodinámica para obtener una descripción completa de dichos procesos.

Para un proceso de traslación llevado a cabo por una máquina térmica como la representada en la Fig. 1, se tiene la ecuación matricial de la energía [2]

$$\begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} M v_{\mathrm{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_\xi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_{\mathrm{L}} F t_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P\Delta V_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T\Delta S_\xi \end{pmatrix},$$

siendo F la fuerza externa que se ejerce sobre las ruedas, fuerza que no realiza trabajo, con

$$M v_{\mathrm{cm}} = F t_0 \,,$$

$$\frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2 = F L_{\mathrm{cm}} \,,$$

$$\frac{1}{2} M v_{\mathrm{cm}}^2 = -\Delta G_\xi \,,$$

donde $\Delta G_\xi = \Delta U_\xi + P\Delta V_\xi - T\Delta S_\xi$ es la magnitud relacionada con el consumo del combustible que hace que la máquina se mueva.

Este formalismo matricial permite una consideración conjunta de procesos y fenómenos que en física clásica suelen tratarse de forma separada y, a veces, de manera equivocada. En la aplicación de este formalismo las diversas magnitudes matriciales se deben articular de tal precisa manera que se pueden evitar los errores que a veces se cometen en el tratamiento habitual de este tipo de problemas.

Las ventajas de este formalismo matricial para física clásica, posiblemente, más para los profesores que para los alumnos, serían, entre otras:

1. Si las ecuaciones se expresan en forma matricial, su transformación entre referenciales es directa.
2. Las magnitudes espacio-tiempo, velocidad, aceleración, etc., se transforman automáticamente (sin errores) entre referenciales.
3. El principio de relatividad se cumple automáticamente: (i) las ecuaciones matriciales tienen la misma forma funcional en todos los referenciales inerciales y (ii) las ecuaciones vectoriales o escalares en un referencial, por ejemplo $\mathrm{S_A}$, son combinación lineal de las ecuaciones vectoriales y escalares en S, y viceversa.
4. Introduciendo dos ecuaciones matriciales diferentes, la *ecuación matricial del centro de masas* y la *ecuación matricial de la energía* (aunque ésta última incluye la información proporcionada por la primera) se evitan errores conceptuales importante, como, por ejemplo, confundir la ecuación del centro de masas con la ecuación del primer principio de la termodinámica.

REFERENCIAS

[1] Sherwood, B. A., *Pseudowork and real work*, Am. J. Phys. **51**, 597-602 (1983).
[2] Güémez, J. and Fiolhais, M., *Forces on wheels and fuel consumption in cars*, Eur. J. Phys. **34**, 1005-1013 (2013).
[3] Bauman, R. P., *Physics that textbook writers usually get wrong, I. Work*, Phys. Teach. **30**, 264-269 (1992).
[4] Zemansky, M. W. and Dittman, R. H., *Heat and Thermodynamics: An Intermediate Textbook*, 7th Ed. (McGraw-Hill International Editions, USA, 1997).
[5] Güémez, J. and Fiolhais, M., *From mechanics to thermodynamics: analysis of selected examples*, Eur. J. Phys. **34**, 345-357 (2013).
[6] Güémez, J., *Fuerzas que no realizan trabajo*, Rev. Esp. Fis. **27**, 3, 59-61 (2013).
[7] Güémez, J., *Special Relativity and textbook exercises*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 3, 537-543 (2011).
[8] Güémez, J. and Fiolhais, M., *The physics of aywalking robot*, Phys. Educ. **48**, 455-458 (2013).
[9] Kleppner, D. and Kolenkow, R. J., *An Introduction to Mechanics*, (Cambridge U. Press, 2010), p. 451.
[10] Galili, I. and Kaplan, D., *Extending the application of the relativity principle: Some pedagogical advantages*, Am. J. Phys. **65**, 328-335 (1997).
[11] Güémez, J., *Es posible una termodinámica relativista*, Rev. Esp. Fis. **24**, 47-57 (2010).

[12] Güémez, J., *An undergraduate exercise in the first law of relativistic thermodynamics*, Eur. J. Phys. **31**, 1209-1232 (2010).
[13] Freund, J., *Special Relativity for Beginners. A Textbook for Undergraduates*, (World Scientific, Singapore, 2008).
[14] Güémez, J. y Fiolhais, M., *Formalismo matricial para mecánica y termodinámica. II. Rotación*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **8**, 4, (2014).
[15] Güémez, J. and Fiolhais, M., *A 4-vector formalism for classical mechanics*, Rev. Bras. Ens. Fis. **35**, 4, 4310 (2013).
[16] Hecht, E., *How Einstein confirmes* $E = mc^2$, Am. J. Phys. **79**, 591-600 (2011).
[17] Hilborn, R. C., *Let's ban work from Physics* Phys. Teach. **38**, 447 (2000).
[18] Mallinckrodt, A. J. and Leff, H. S., *All about work*, Am. J. Phys. **60**, 356-365 (1992).
[19] Penchina, C. M., *Pseudowork-energy principle*, Am. J. Phys. **46**, 295-296 (1978).