

Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação



Correa do Nascimento, Janaina, Barbosa de Barros Aragão, Eduardo Cezar, Cardoso de Sousa, Daniel, De Faria Barbosa, Felipe Tuyama, Pereira de Abreu, Guilherme Jean, Magno Barbosa, Itamar, Malmonge Martin, Inácio, Grigoriev Grigorov, Korneli, Edmundo Germano, José Silvério, Gomes e Bogos Nubar Sismanoglu, Marcelo Pego

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Física, Laboratório de Mecânica, Laboratório de Óptica e Espectroscopia, São José dos Campos, São Paulo.

E-mail: bogos@ita.br

(Recebido em 14 de Mayo de 2014, aceito em 30 de Agosto de 2014)

Resumo

Experimentos que são preparados facilmente podem ser realizados em laboratório por alunos do ensino médio e superior ou, na ausência do laboratório, fato que é infelizmente recorrente no ensino de ciências na América Latina, podem ser demonstrados em sala de aula pelo professor. Este trabalho elenca alguns experimentos e a teoria necessária para que se possa, a partir do procedimento experimental, compreender de maneira robusta os princípios físicos que regem a dinâmica do movimento de um corpo rígido. Basicamente, no estudo do corpo rígido, aplica-se a Lei de Conservação do Momento Angular, a taxa de variação deste em torno do centro de massa do corpo e o Teorema do Impulso de uma força que tende a girar o corpo em torno de seu centro de massa. Este trabalho também fornece ferramentas e técnicas experimentais que podem ser adotados nas aulas de laboratório, em problemas específicos que envolvem corpos rígidos.

Palavras chave: Laboratório didático, Experimentos, Corpo rígido, Leis da mecânica.

Abstract

Experiments that can be easily implemented can be performed in the laboratory by the students of the high school or college or, in the absence of the laboratory ambient, a fact that is unfortunately recurrent in Latin America, can be demonstrated in the classroom by the teacher. This paper lists both experiments and theory necessary so that one can, from the experimental procedure, a way for understanding the physical principles that govern the dynamics of motion of a rigid body. Basically, for the study of the rigid body, we apply the Law of Conservation of Angular Momentum, the rate of change of this around the center of mass of the body and the Theorem of Impulse of a force that tends to rotate the body around its center of mass. This work also provides tools and experimental techniques that can be adopted in the lab to solve problems involving rigid bodies.

Keywords: Didactic laboratory, Experiments, Rigid body, Mechanics laws.

PACS: 01.40.gb, 01.50.Pa, 45.20

ISSN 1870-9095

I. INTRODUÇÃO

Uma das grandes dificuldades no ensino da dinâmica do corpo rígido (CR) está na aplicação das teorias desenvolvidas. Existem muitos exemplos e exercícios com aplicações dos conceitos relacionados ao estudo do CR, como o do momento de inércia, momento angular, torque de uma força, além da Lei da conservação do momento angular, a clássica Lei da conservação da energia mecânica, a Segunda Lei de Newton aplicada ao centro de massa (CM) do CR e o teorema do impulso de uma força, que pode gerar rotação do CR em torno de seu CM.

O bom senso mostra que as aulas de física, ou ciências, em qualquer nível de formação, devem não só contemplar a teoria acompanhada com resolução de exercícios, como também a demonstração de alguns experimentos para que o aluno possa “visualizar” o que foi abordado e, assim, assimilar de maneira mais completa o tema estudado [1, 2, 3, 4]. A maioria das escolas públicas e privadas de nível médio não possui laboratórios e grande parte das Instituições de Ensino Superior mantém uma rotina de aulas práticas em seus laboratórios que não acompanham, em termos de conteúdo e abordagem, o assunto estudado nas aulas teóricas, pelo menos concomitantemente. Deste modo, cabe ao professor, que ministra o conteúdo teórico

em sala de aula, apresentar alguns experimentos conjuntamente com a explanação teórica.

A idealidade seria aquela em que a sala de aula fosse uma “sala ambiente” ou “sala inteligente”, onde teríamos um espaço com toda a infraestrutura necessária para desenvolver de maneira ampla o assunto a ser estudado, acompanhado de equipamentos, material e multimídia como ferramentas de apoio ao professor [5]. No nosso mundo real, na ausência destas salas, o que se pode fazer é desenvolver um conjunto de experimentos para servirem de apoio ao professor.

Este artigo apresenta um conjunto de experimentos de Mecânica Física que esclarecem alguns aspectos na aplicação das Leis da física relacionadas ao estudo da dinâmica (e também da cinemática) do “Corpo Rígido”, tema estudado em nível superior nos cursos de Exatas, mas que também atraem a atenção daqueles alunos do ensino médio que se preparam para estudarem nestes cursos. Portanto, além de abordar a teoria envolvida no tema de corpos rígidos, este trabalho elenca alguns procedimentos experimentais que podem servir de apoio para uma melhor compreensão do assunto. Os experimentos podem ser realizados pelo professor em sala de aula ou pelos alunos no laboratório. Além disto, este trabalho objetiva apresentar montagens experimentais para o conhecimento de alunos e professores que, através do apoio de uma oficina mecânica, poderão construí-las.

Oficinas mecânicas bem equipadas poderão construir equipamentos mais sofisticados, porém com maior custo financeiro. Por outro lado, muitos destes experimentos são vendidos por empresas especializadas no ramo de ensino experimental, mas com custo muito elevado de aquisição e com uma qualidade que geralmente é bastante inferior. Por exemplo, ao se adquirir um “pêndulo composto”, tema desenvolvido neste trabalho, geralmente as empresas oferecem uma barra de material plástico que, quando colocada para oscilar, param em alguns segundos. Deste modo, através do uso de material metálico, com o auxílio de uma oficina mecânica, com muita criatividade e com poucos recursos financeiros, consegue-se montar experimentos robustos e duradouros. O ideal, então, é que o equipamento produzido consiga de alguma maneira reproduzir, dentro das incertezas experimentais, aquilo que se estudou na teoria e que fora previsto por ela.

II. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO: A TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DO MOMENTO ANGULAR OBTIDA EM RELAÇÃO A UM PONTO QUALQUER

Seja um corpo rígido (CR) com centro de massa (CM) localizado pelo vetor \vec{R}_o , sendo O um ponto qualquer cujo vetor posição é \vec{r}_o em relação a um referencial inercial (RI). Seja m_i a i -ésima partícula deste corpo, localizada na posição \vec{r}_i e, por fim, \vec{r}_{io} é o vetor posição de m_i em relação ao ponto O (Figura 1) [3, 4].

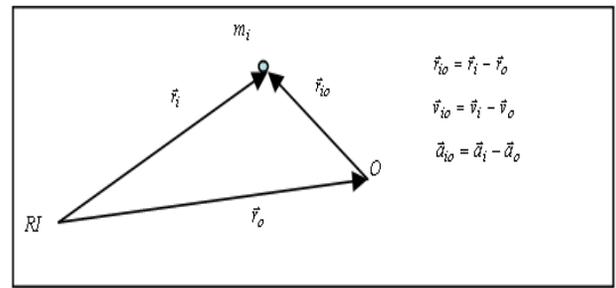


FIGURA 1. Localização da i -ésima partícula, de massa m_i , de um corpo rígido.

O CR está sob a ação de uma força externa \vec{F} . Portanto, o torque da força externa em relação ao ponto O será

$$\vec{N}_o = \sum_i \vec{r}_{io} \times \vec{F} = \sum_i \vec{r}_{io} \times m_i \vec{a}_i. \quad (1)$$

O momento angular em relação ao ponto O é dado por

$$\vec{L}_o = \sum_i m_i \vec{r}_{io} \times \vec{v}_{io}. \quad (2)$$

Logo, a taxa de variação temporal de \vec{L}_o é obtida através da diferenciação da Eq. 2.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_{io} \times (\vec{a}_i - \vec{a}_o) = \vec{N}_o - M \vec{R}_o \times \vec{a}_o. \quad (3)$$

Onde M é a massa total do CR. Na prática, ao aplicarmos a Eq. 3, queremos que o termo negativo se anule, para que possamos resolver um determinado problema com relativa facilidade. O modo mais fácil de fazer isto é considerar o ponto O como o CM do CR, pois neste caso \vec{R}_o será nulo. A Eq. 3 é o equivalente da Segunda Lei de Newton aplicada numa partícula. Portanto, para o CR teremos as equações auxiliares

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{N}_{CM}, \quad \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \vec{F}. \quad (4)$$

O impulso \vec{J} de uma força externa aplicada durante um intervalo de tempo infinitesimal dt pode fornecer a velocidade do CM no instante logo após o impacto.

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt = m \vec{v}_{CM}. \quad (5)$$

E a velocidade angular do CR, calculada em torno do CM, pode se obtida pela equação

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM} \vec{\omega}. \quad (6)$$

Onde I_{CM} é o momento de inércia do corpo em relação ao CM. Por fim, resolvendo estas equações, podemos obter a solução de diversos problemas envolvendo o tema CR. Na próxima seção, forneceremos alguns exemplos de aplicações destas equações em CR.

III. APLICAÇÕES: TEORIA E PRÁTICA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO CORPOS RÍGIDOS

A. Centro de percussão numa barra homogênea

A barra na Fig. 2 está no chão liso, com pouco atrito. Um golpe é dado numa das extremidades da barra. Observa-se nesta figura que logo após o golpe dado na extremidade direita da barra, um ponto localizado próximo à outra extremidade praticamente não se mexe. Este ponto é conhecido como “Centro de Percussão” (CP) e tem muitas aplicações no dia-a-dia.



FIGURA 2. Barra homogênea em repouso no chão liso sendo golpeada na extremidade da direita. A sequência mostra o movimento da barra nos instantes posteriores ao golpe, em intervalos de 33ms. No 2º quadro observa-se que um ponto (centro de percussão) situado a aproximadamente 1/3 da extremidade da barra não se move, relativamente aos outros pontos da barra.

Como a barra é homogênea, $I_{CM} = Ml^2/12$, onde M é a massa da barra e l é seu comprimento. A partir da Eq. 6 podemos escrever [3, 4].

$$L_{CM} = I_{CM}\omega = \int N_{CM}dt. \quad (7)$$

Na solução do problema proposto, obtemos então

$$\int N_{CM}dt = \frac{1}{2} \int Fdt = J \frac{l}{2}.$$

Q que resulta, finalmente, $\omega = 6J/Ml$. Ora, como a barra é considerada um CR, a velocidade de cada ponto da barra logo após o golpe é dado por $\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_t$, onde $v_{CM} = J/M$ e $\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$ é a velocidade de um ponto da barra a uma distância $|\vec{r}|$ do CM que experimenta uma velocidade angular $\vec{\omega}$, ou seja, a barra tende a girar no sentido anti-horário (Fig. 2). O ponto O da barra onde se localiza o CP terá velocidade nula, ou seja, $v_{CM} - v_t = 0$ e, substituindo nesta equação os dados explicitados anteriormente, obtemos finalmente $r = l/6$. Deste modo, a uma distância 1/3 da

Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação
extremidade oposta ao golpe dado, haverá um ponto da barra que não se move no momento logo após o golpe. Na Fig. 2 isto pode ser verificado através da sequência de quadros obtidos através da utilização do software livre VirtualDub [6], cuja aplicabilidade pode ser vista nas referências [1] e [2]. Nesta figura, uma barra está em repouso no chão liso e num dado instante um chute é dado na ponta da barra. No exato instante do golpe, verifica-se que o CP, situado a aproximadamente 1/3 de sua extremidade oposta, praticamente não se move (quadro 2, obtido após 33ms do chute).

Os estudos sobre centros de percussão de corpos rígidos têm aplicações nas máquinas, carros, instrumentos e equipamentos produzidos atualmente, inclusive para o conforto do usuário ou para a proteção do próprio equipamento. Podemos citar alguns exemplos: a) o martelo é projetado para que o CP se situe na cabeça do martelo e o centro de rotação (CR) na outra extremidade, na empunhadura. Isto se faz para que o usuário não fique com “bolhas” na mão devido à trepidação, ou seja, na empunhadura a velocidade de recuo do martelo é praticamente nula; b) Na engenharia de produção, a máquina de ensaio de impacto possui o CP na massa pendular para que não ocorra trepidação e vibração no braço do pêndulo, o que com o tempo de uso resultaria em deformação permanente na região do centro de rotação (pivotamento) deste pêndulo; c) numa simples vassoura doméstica, a empunhadura deve ser se dar num local específico do cabo, para que a varrição ocorra com eficiência e nenhuma sujeira fique para trás; d) por fim, num automóvel é interessante que o CP fique no eixo traseiro para que os passageiros que se sentam no carro não sofram, principalmente nas estradas do país, toda vez que a roda dianteira (geralmente a roda motriz) encontra o famigerado buraco, ou a vultosa lombada.

Mas e quando o centro de rotação é pivotado num ponto O que não seja o CM? Neste caso, observa-se a oscilação ou a rotação do CR em torno deste ponto. E como se aplica a Eq. 3? Simples, basta observar que o pivô é fixo (ponto O) e, neste caso, sua aceleração é nula ($\vec{a}_o = \vec{0}$), o que também anula o termo negativo nesta equação, resultando novamente $\frac{dL_o}{dt} = \vec{N}_o$, só que agora calculado em relação ao ponto O (pivô) do CR. Vamos ver no próximo exemplo a solução de um problema envolvendo CR pivotado.

B. Barra homogênea pivotada em sua extremidade

A Fig. 3 mostra a mesma barra usada na seção anterior, porém, ela está pivotada em sua extremidade e posta na horizontal, onde será abandonada de seu repouso. O objetivo é obter a velocidade angular instantânea (ω) no ponto mais baixo da trajetória circular da barra, usando a Eq. 3. É claro que podemos obter o mesmo resultado muito mais facilmente através da Lei da conservação da energia mecânica e, portanto, faremos a solução do problema através dos dois métodos para que possamos compreender melhor o fenômeno.

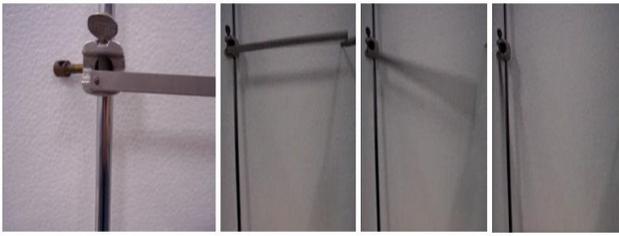


FIGURA 3. Barra metálica pivotada em sua extremidade e posicionada na horizontal (figura da esquerda). Na sequência, os quadros mostram o instante inicial do movimento, o intermediário e o final, quando a barra girou 90° (quadros obtidos através do software VirtualDub).

No procedimento experimental deveremos determinar ω , ou seja, queremos obter a variação temporal do ângulo θ (Figura 3) de 0 a 90°. Isto pode ser feito através do uso dos Softwares VirtualDub, Pasco ou Tracker [1, 2]. A dedução teórica para ω (ou $\dot{\theta}$) é feita com o uso da Eq. 3

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{N}_o \rightarrow I_o \dot{\omega} = \frac{Mgl}{2} \cos \theta. \quad (8)$$

Sabe-se que $I_o = Ml^2/3$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Logo, a Eq. 8 resulta

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \cos \theta. \quad (9)$$

e como o objetivo final é a obtenção da velocidade angular instantânea $\dot{\theta}$ no ponto mais baixo, podemos resolver a Eq. 9 através da seguinte transformação útil

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}^2). \quad (10)$$

Deste modo, a Eq. 9 fica reduzida a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}^2) = \frac{3g}{2l} \cos \theta \rightarrow$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{3g}{l}.$$

o que finalmente resulta em $\omega = \sqrt{3g/l}$. Através da Lei de conservação de energia mecânica podemos obter este mesmo resultado, lembrando que para um CR pivotado no ponto O , a energia cinética de rotação em relação a um eixo que passa por este ponto é dada por

$$T_o = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2.$$

Deste modo, a energia potencial gravitacional inicial da barra será totalmente transformada em energia cinética de rotação no ponto mais baixo

$$\frac{Mgl}{2} = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta}^2 \rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{3g/l}.$$

Um incauto poderia querer usar o CM da barra para aplicar esta Lei e cometer um erro grave, a não ser que se lembre

de que se trata de um CR, o que impinge que devemos acrescentar a energia cinética rotacional ($T_{rot,CM}$) desenvolvida pelas partículas constituintes da barra em relação ao próprio CM. Assim,

$$\frac{Mgl}{2} = \frac{1}{2} M\dot{R}_o^2 + T_{rot,CM}. \quad (11)$$

Onde

$$\dot{R} = \dot{\theta}l/2 \text{ e } T_{rot,CM} = \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{12} \dot{\theta}^2,$$

o que resulta, finalmente, de novo, $\dot{\theta} = \sqrt{3g/l}$. Portanto, deveremos ter muito cuidado na aplicação dos conceitos de Momento de Inércia, Torque e Momento Angular, pois eles são obtidos sempre em relação a um determinado ponto do sistema dinâmico previamente escolhido. Também podemos aplicar a equação de energia $\frac{Mgl}{2} = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$ em outro problema bastante interessante, o do disco que rola, tema da próxima seção.

Na Fig. 3 observa-se a aplicação do Software VirtualDub para a obtenção do movimento da barra quadro a quadro. A barra em questão possui comprimento $l = (34,5 \pm 0,4)$ cm e o valor da aceleração da gravidade local é $g = (9,78 \pm 0,06)$ m/s/s. Através da equação teórica $\dot{\theta} = \sqrt{3g/l}$, obtém-se $\omega = (9,22 \pm 0,09)$ rad/s. Através da medição do intervalo de tempo para que a barra atingisse o ponto mais baixo também se pode estimar o valor desta velocidade angular neste instante. Com o auxílio do VirtualDub, observou-se que a barra alcançou o ponto mais baixo no instante $\Delta t \sim 0,32$ s a partir de seu repouso inicial em $t_0 = 0$. Então, a velocidade angular média pode ser expressa como

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\omega}{2}.$$

Pois no instante $t_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ para $\theta_0 = 0$ rad. Assim, substituindo nesta equação $\Delta\theta = \pi/2$, obtém-se finalmente $\omega \sim 9,85$ rad/s, resultado que concorda com aquele obtido anteriormente.

C. Disco rolando plano abaixo, sem escorregamento

Este problema trata de um disco pesado de massa M e raio R que rola sem deslizar ou escorregar por um trilho inclinado, cuja velocidade angular instantânea é $\dot{\theta} = \dot{R}/r$, onde r é o raio do cilindro menor que é concêntrico ao eixo do disco (Figure 4).



FIGURA 4. Disco rolando sem escorregamento através de um plano inclinado.

Como r é pequeno comparado com R , o disco desce plano abaixo, rodando, com uma velocidade do centro de massa \dot{R} pequena. A conservação da energia mecânica em relação ao ponto de apoio do cilindro pode ser escrita como

$$Mgh = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2. \quad (12)$$

Onde $h = \Delta s(\sin\beta)$ é a altura no instante inicial de partida com velocidade nula. A abordagem experimental obriga obter a velocidade média do centro de massa, V_m , através da medição do intervalo de tempo Δt para que o disco percorra a distância Δs até um ponto mais baixo. Deste modo, a velocidade média do CM pode ser escrita em função da velocidade angular instantânea, observando-se que

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\dot{R}}{2} = \frac{r\dot{\theta}}{2} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{2V_m}{r}.$$

Lembrando que V_m do CM nada mais é que a média aritmética entre as velocidades do CM obtidas entre o instante inicial (velocidade nula) e final (\dot{R}). Deste modo, a Eq. 12 torna-se

$$Mgh = \frac{1}{2}I_o\left(\frac{2V_m}{r}\right)^2.$$

E, finalmente, consegue-se facilmente obter o valor de I_o através deste método dinâmico, através do uso da velocidade média do CM. Podemos verificar este resultado, também experimentalmente, através do uso do Teorema de Steiner ou dos eixos paralelos para momentos de inércia

$$I_o = I_{CM} + Mr^2. \quad (13)$$

Lembrando que para o disco,

$$I_{CM} = \frac{1}{2}m_1R^2 + 2\left(\frac{1}{2}m_2r^2\right) = \frac{1}{2}\rho\pi R^2(aR^2 + 2br^2),$$

conforme suas dimensões e massa específica (ρ), desde que o disco e seu eixo sejam feitos do mesmo material. Porém, observa-se na Fig. 4 que o eixo cilíndrico do disco é de ferro, enquanto que o disco é de alumínio. Deste modo, a massa m_2 nesta equação para I_{CM} deverá contemplar a massa específica do ferro, enquanto que a massa m_1 deverá se relacionar com a massa específica do alumínio.

D. Cinemática da rotação

Além da dinâmica do CR, podemos estudar a cinemática de um corpo em rotação em torno de um eixo fixo através de outro experimento simples: a cinemática da rotação de um disco, que inicia o movimento devido ao torque de uma força externa. A Fig. 5 mostra em detalhes a montagem experimental, onde se observa que o disco de raio R pode girar livremente na direção vertical, através do torque proveniente de uma força tensora imposta por um fio enrolado em torno de um cilindro menor de raio r concêntrico ao eixo do disco. Na extremidade livre do fio, encontra-se um corpo de massa m suspenso no ar. Portanto,

Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação o corpo desce com aceleração escalar instantânea (a) para baixo e o disco gira com aceleração angular instantânea (α), sendo $a = \alpha r$.

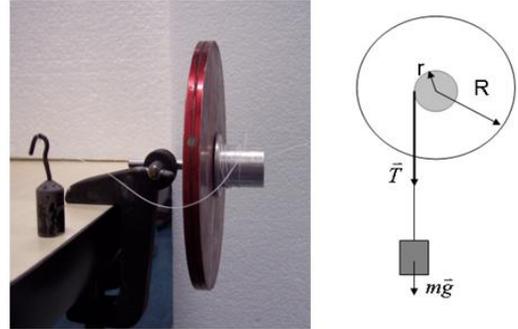


FIGURA 5. Dinâmica e cinemática da rotação de um disco em relação a um eixo fixo que passa pelo CM.

Em relação ao ponto O (no centro do disco = CM do disco), escrevemos o torque da força externa. Devemos tomar o cuidado de observar que a força externa geradora do torque não é a força peso, e sim a força tensora no fio de módulo T , onde

$$N_o = Tr = I_o\alpha. \quad (14)$$

Através do Princípio Fundamental da Dinâmica escrevemos a segunda Lei de Newton para a massa suspensa, que desce com aceleração escalar instantânea a dada pela equação

$$mg - T = ma. \quad (15)$$

Deste modo, resolvendo simultaneamente as Eqs. 14 e 15, obtemos

$$a = \frac{mg}{m + I_o/r^2} \quad e \quad \alpha = \frac{mgr}{mr^2 + I_o}. \quad (16 \text{ a, b})$$

Experimentalmente, basta obter a aceleração do corpo suspenso que desce em Movimento Retilíneo e Uniformemente Variado e, a seguir, obter a aceleração angular do disco. Para verificar as Eqs 16a e 16b, deveremos primeiro calcular I_o (ver cálculo para o disco na seção 3.3.).

Porém, a observação mais importante que se faz neste experimento é a seguinte: o que aconteceria com a e α se enrolássemos o fio no disco de raio maior, R ? O incauto rapidamente responderia que a aumentaria em módulo e como $a = \alpha r$, então α diminuiria. Vamos analisar, através das Eqs. 16a e 16b, se esta resposta esta totalmente correta.

Através da Eq. 16a, observamos que, realmente, quando r aumenta, a aceleração a aumenta, visto que nesta equação o termo $1/r^2$ tende a zero no limite quando r tende ao infinito ($r \rightarrow \infty$). E mais, para um raio R muito grande, $I/R^2 \rightarrow 0$, $a \rightarrow g$, ou seja, praticamente é uma queda livre. Isto é muito fácil de intuir. Por outro lado, com relação à aceleração angular instantânea, de acordo com a Eq. 16b, a análise fica mais complicada, pois a variável r aparece no numerador e no denominador da equação. O que se pode fazer então é obter a derivada da/dr da aceleração angular em relação a r e verificar seu sinal, ou seja, se α aumenta ou

diminui com a variação positiva da dimensão do raio. Esta derivada é

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{mg(I_o - mr^2)}{(I_o + mr^2)^2}. \quad (17)$$

Através da Eq. 17 observam-se duas situações distintas: 1) se $I_o > mr^2$, $\frac{d\alpha}{dr} > 0$ e α aumenta com o aumento de r ; 2) se $I_o < mr^2$, $\frac{d\alpha}{dr} < 0$ e α diminui com o aumento de r . Deste modo, a massa m do corpo suspenso desempenha papel importante para a definição da aceleração angular do disco.

Experimentalmente, basta confeccionar um disco com momento de inércia $I_o > mR^2$ e outro com momento de inércia $I_o < mR^2$, para verificar a Eq. 17. Na situação em que $I_o < mR^2$, deveremos escolher um disco de material de baixa densidade, com o centro de massa localizado bem próximo ao centro do disco. Salientou-se anteriormente que a Eq. 3 é equivalente ao Princípio Fundamental da Dinâmica (PFD), ou seja, $\frac{d\vec{L}_o}{dt}$ é equivalente a $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$. Basta então usar a Eq. 3 ou o PFD para obtermos as variáveis dinâmicas desejadas. A solução envolvendo $\frac{d\vec{L}_o}{dt}$, ou a conservação do momento angular, $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0}$, que implica em $L_o = \text{constante}$ de movimento, apesar de às vezes ser mais trabalhosa, mostra detalhes do movimento que ficariam sem serem percebidos quando se aplica apenas o PFD. Por exemplo, a Lei das Áreas do movimento planetário de Kepler, demonstrada facilmente através da conservação do momento angular, ficaria praticamente imperceptível se usássemos apenas o PFD. Neste exemplo, a força gravitacional atrativa entre o Sol e o planeta considerado é uma força central, ou seja, aponta para o Sol, que é o ponto O , um dos focos da trajetória elíptica.

E. Pêndulo cônico

Um experimento simples que mostra a equivalência citada na seção anterior é o do pêndulo cônico (Fig. 6), onde um corpo de massa m gira em torno de um círculo de centro O' e raio $l \sin \theta$, sendo l o comprimento de um fio que une o corpo a um ponto fixo O .

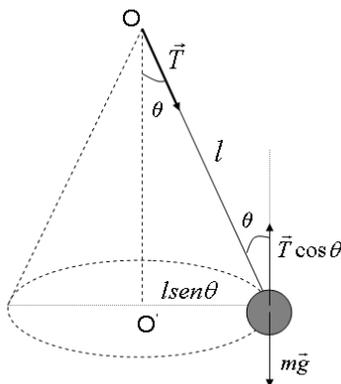


FIGURA 6. Pêndulo cônico.

O corpo executa MCU em torno de O' . Aplicando o PFD à massa, obtemos

$$T \sin \theta = \frac{mv^2}{l \sin \theta} \quad e \quad T \cos \theta = mg. \quad (18)$$

Com a solução $T = mg/\cos \theta$ para a força tensora no fio, o que fornece a solução para a velocidade tangencial do corpo no seu MCU em torno de O' . Obtemos estes mesmos resultados usando a Lei da Conservação do Momento Angular, aplicado, por exemplo, em relação ao ponto O , para onde a força centrípeta $T \sin \theta$ aponta. Deste modo, seu torque é nulo em relação a este ponto. Usando coordenadas cilíndricas para descrever as variáveis, podemos escrever.

$$\vec{N}_{O'} = \vec{r}_{O'} \times \vec{F} = l \sin \theta \hat{\rho} \times (T \cos \theta \hat{z} - T \sin \theta \hat{\rho} - mg \hat{z}) = 0 \rightarrow T = mg \cos \theta.$$

Onde $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ e \hat{z} são os triedros-versores em coordenadas cilíndricas, com $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$ e $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$.

F. Pêndulo balístico

Outro experimento bastante interessante e simples de construir é o que representa o pêndulo balístico (Fig. 7). O diferencial deste pêndulo é que seu braço é um corpo rígido e, portanto, pivotado num ponto fixo O e que oscila até certa altura Δh após receber o impacto inelástico de uma bolinha de metal de massa m .

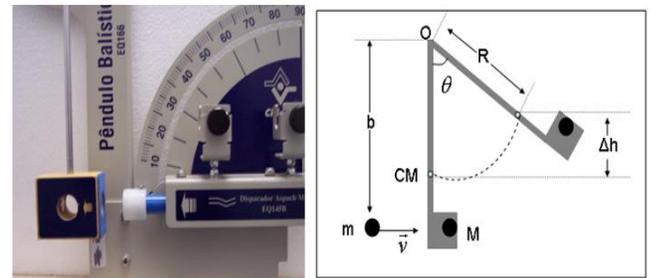


FIGURA 7. Pêndulo balístico.

Nesta figura, R é a distância entre O e o CM do sistema pêndulo + bola de metal. Este CM pode ser facilmente determinado se soltarmos o pêndulo de seu pivô O e, através de uma corda, o equilibrarmos na horizontal juntamente com a bola presa em seu casulo. Deste modo, após o impacto da bola, todas as variáveis mostradas na Fig. 7 podem ser facilmente mensuradas, inclusive o ângulo θ da altura máxima Δh . Esta altura alcançada pelo CM depende da velocidade inicial da bola e de sua massa. Mas também é função do momento de inércia do conjunto que sofre rotação para cima. Diferentemente do sistema pendular que usa fio (pêndulo simples), este caso exige a aplicação da Lei da conservação do momento angular, além é claro da Lei da conservação da energia mecânica. O momento angular da bola em relação ao ponto O , antes da colisão, é dado por $L_b = mbv$.

A energia mecânica do pêndulo logo após o impacto inelástico é $E = 0,5I_o\omega^2$ e seu momento angular é $L_o = I_o\omega$, o que resulta em $L_o = (2I_oE)^{0,5}$. Esta energia E é totalmente convertida em energia potencial gravitacional na altura máxima alcançada, $E = MgR(1 - \cos\theta)$ sendo M a massa total do sistema. Por fim, através da Lei da conservação do momento angular, obtém-se

$$mbv = \sqrt{2MI_o gR(1 - \cos\theta)}. \quad (19)$$

Deste modo, através da Eq. 19, obtém-se a velocidade inicial v da bola, desde que se conheça o valor de I_o . A maneira mais fácil de obter I_o , o momento de inércia do sistema que gira em torno de O , também advém de outro experimento. Sabe-se que todo CR pivotado num ponto que não seja seu CM oscila periodicamente em torno deste ponto.

Deste modo, basta oscilar o sistema e, para ângulos pequenos, mede-se o período desta oscilação e, através da equação

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{MgR}}. \quad (20)$$

Obtém-se I_o . Assim, I_o deve ser obtido através deste segundo experimento, independentemente do problema anterior referente ao pêndulo balístico. O período T na Eq. 20 não pode ser confundido com o tempo de subida no pêndulo balístico, pois esta equação só é válida para ângulos pequenos de oscilação, do mesmo modo que é feito para pêndulos simples. O leitor pode verificar que no problema do pêndulo balístico não há conservação da energia cinética.

Uma rápida inspeção na Eq. 20 remonta àquela deduzida para pêndulos simples. Isto mostra que sempre existirá um “pêndulo simples equivalente” ao pêndulo balístico, tema que será discutido na próxima seção.

G. Pêndulo composto ou pêndulo físico

Todo pêndulo composto possui um equivalente mecânico pêndulo simples, ou seja, haverá um pêndulo simples de comprimento l com massa pendular m igual à massa do pêndulo composto que oscila periodicamente exatamente igual a este. A Fig. 8 mostra um pêndulo composto no formato de uma barra homogênea, repleto de furos equidistantes. A barra tem massa M e comprimento L .

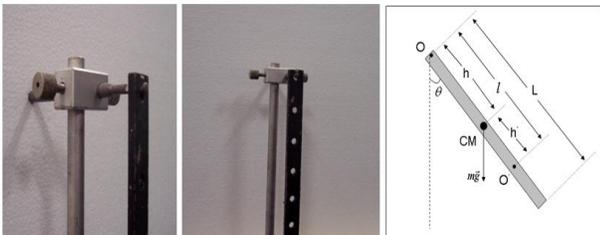


FIGURA 8. Pêndulo composto em formato de barra homogênea repleta de furos igualmente espaçados.

Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação É bastante comum na Engenharia a definição de raio de giração $K_o = \sqrt{I_o/M}$ quando não se sabe como calcular o momento de inércia I_o exato de um corpo de massa M em relação a um ponto O . Este valor para K_o é obtido experimentalmente. Portanto, neste próximo experimento, obtemos K_o e l para o pêndulo composto da Fig. 8. Nesta figura, OO' define o pêndulo simples equivalente que desejamos encontrar, de comprimento l . O é conhecido como “centro de oscilação” e é análogo ao “centro de percussão” visto anteriormente no 1º experimento e, portanto, para a barra homogênea, deverá estar localizado a uma distância $2L/3$ da extremidade pivotada da barra (ponto O). O torque total do peso está relacionado ao momento angular, em relação ao ponto O , através da relação

$$\dot{L} = N_o = I_o\ddot{\theta} \rightarrow Mgh \sin\theta = -MK_o^2\ddot{\theta}.$$

O sinal negativo aparece porque o torque é sempre restaurador. Isto resulta

$$\ddot{\theta} = -\frac{gh}{K_o^2} \sin\theta. \quad (21)$$

Uma rápida observação desta equação identifica a muito bem conhecida equação para o pêndulo simples.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta. \quad (22)$$

Ora, fazendo-se $l = K_o^2/h$, obtém-se o ponto O' que define o pêndulo simples equivalente (Fig. 8), onde

$$l = h' + h \rightarrow lh = h'h + h^2$$

$$\therefore K_o^2 = h'h + h^2. \quad (23)$$

A Eq. 23 nos remete novamente ao teorema de Steiner dos eixos paralelos, onde o momento de inércia em relação a um ponto O (MK_o^2) é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo ($Mh'h$), somado a Mh^2 , sendo h a distância entre os dois pontos considerados do CR. Deste modo, a Eq. 23 fica

$$MK_o^2 = Mh'h + Mh^2 \quad (24)$$

Assim, como h define a localização do CM da barra, $Mh'h = K_{CM}^2$, ou seja, o produto hh' define o raio de giração em relação ao CM. Como esta equação é simétrica em h e h' , conclui-se que se a barra fosse pivotada em O' , o centro de oscilação estaria agora no ponto O [3, 4]. A Eq. 23 então fica $h^2 - lh + K_{CM}^2 = 0$. Esta é uma equação do 2º grau em h e as raízes podem ser obtidas facilmente através da relação entre a soma e o produto entre elas, $h_1h_2 = K_{CM}^2$ e $h_1 + h_2 = l$.

Para o estudo do movimento oscilatório da barra em torno do ponto O , a Eq. 21 pode ser simplificada, fazendo-se $\sin\theta \sim \theta$, para que experimentalmente possamos obter o ponto O' , o centro de oscilação. Deste modo,

$$\ddot{\theta} = -\frac{gh}{K_o^2} \theta \quad \text{para } \sin \theta \sim \theta. \quad (25)$$

A Eq. 25 é uma equação diferencial de um MHS, cujo período é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{CM} + Mh^2}{Mgh}}. \quad (26)$$

Observa-se que na Eq. 26, T varia com h de um modo mais complicado quando comparado com o período de um pêndulo simples. Esta equação mostra que podem haver dois pontos (pivôs) na barra que fornecem o mesmo período, algo que não ocorre em pêndulos simples. Agora temos condições de seguir com o procedimento experimental para a barra homogênea com furos equidistantes.

No procedimento experimental, pivotamos a barra pelo 1º furo, o mais próximo da extremidade. O furo deverá estar apoiado num suporte horizontal, com o mínimo de atrito, para poder oscilar. A barra deve ser metálica, relativamente pesada e o suporte horizontal deve ser de metal maciço, cilíndrico, possuindo uma cunha na ponta para reduzir o atrito no contato com o furo da barra, bem no ponto de apoio. O ideal é fabricar o equipamento numa oficina mecânica, pois os equivalentes vendidos por empresas especializadas são extremamente ruins e bastante onerosos, como a maioria dos equipamentos para experimentos de mecânica ofertados no mercado.

Em seguida, deve-se obter o período para cada furo da barra, até alcançar o CM (para uma barra com 1m de comprimento, o ideal é ter pelo menos 20 furos). Para a medição do período T , colocamos a barra para oscilar 10 vezes para cada furo e cronometrarmos o tempo. Obtemos o período correspondente a cada furo dividindo o tempo por 10. A incerteza nas medições deverá ser especificada apropriadamente através da propagação de incertezas e de acordo com a teoria de erros. Uma vez obtidos os períodos até o furo correspondente ao CM, plotamos o gráfico $T \times d$, onde d é a distância entre a extremidade da barra e o ponto exato de apoio na cunha, para cada furo (Fig. 9).

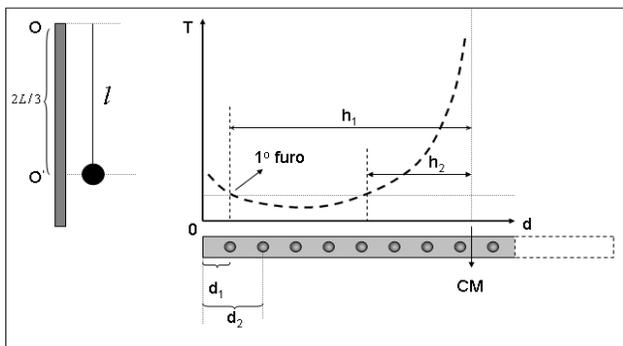


FIGURA 9. Perfil do gráfico do período versus a distância entre a extremidade da barra e o furo (pivô) para o pêndulo físico em formato de barra homogênea.

No gráfico da Fig. 9, marcamos o CM da barra ($L/2$) e observamos que o período da barra tende ao infinito quando o pivô se posiciona próximo ao CM. Identificamos o 1º furo nesta curva e traçamos uma reta horizontal ao eixo das abscissas, para identificar o 2º ponto da barra que possui período igual ao do 1º furo. Deste modo, identificamos no gráfico os valores de h_1 e h_2 e, conforme deduzido anteriormente, obtemos K_{CM} , K_o e l .

O pêndulo simples equivalente tem comprimento teórico dado por $l = K_o^2/h = I_o/Mh$. Podemos efetuar um cálculo através desta equação para confrontar com o resultado experimental anteriormente obtido. Para uma barra homogênea, o momento de inércia I_o em torno de um ponto localizado em sua extremidade é $I_o = ML^2/3$ e o comprimento l do pêndulo simples equivalente será então $l = I_o/Mh = ML^2/(3Mh)$. Como $h = L/2$, que é a localização do CM da barra, obtemos, finalmente, $l = 2L/3$. Ou seja, para a barra suspensa no ponto O (extremidade), o centro de percussão fica localizado no ponto O' , a $1/3$ da extremidade inferior da barra (Fig. 9).

IV. CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou divulgar alguns experimentos simples de mecânica física relacionados ao tema dinâmica do corpo rígido e cinemática do corpo rígido. Ao mesmo tempo, elencou-se a teoria necessária para a compreensão do problema e para a validação dos resultados experimentais obtidos. Apesar de serem de fácil montagem, os experimentos são reveladores das Leis e Teoremas que explicam o movimento geral do corpo rígido, como a Lei da conservação da energia mecânica, Lei da conservação do momento angular, Teorema do impulso de uma força resultante externa, Lei da conservação do momento angular em relação a um eixo, taxa de variação do momento angular e sua relação com o torque de uma força externa e momento de inércia do corpo rígido em relação a um eixo. Neste último, verificou-se também o teorema dos eixos paralelos.

Este trabalho pretende auxiliar professores de física e ciências em suas aulas teóricas, oferecendo exemplos práticos de aplicações que podem facilmente ser realizados em sala de aula, objetivando a aplicação imediata do conteúdo abordado nas aulas. Ao mesmo tempo, este trabalho fornece ferramentas e técnicas experimentais que podem ser adotados nas aulas de laboratório, em problemas específicos que envolvem corpos rígidos. Em alguns casos, adentrou-se no tema das oscilações de corpos rígidos, como o do pêndulo físico. No caso específico de movimentos com alta velocidade angular, o trabalho reapresentou a técnica da filmagem e utilização do software gratuito VirtualDub, que transforma o filme num agrupamento de quadros separados por um intervalo de tempo suficiente para que se possa determinar com relativa precisão a posição e o tempo de um determinado ponto do corpo rígido em rotação. Com isto, é possível obter a taxa de variação da posição angular e a velocidade angular instantânea correspondente.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio parcial das agências FAPESP e CNPq sob nº FAPESP/12/13064-4, CNPq/MCTI/SECIS406035/2013-0, CNPq/310419/2012-3DT, CNPq/306095/2013-0 PQ e Capes 88881.030340/13-01 BJT.

REFERÊNCIAS

[1] Sismanoglu, B. N., Germano, J. S. E., Amorim, J. e Caetano, R., *A utilização da filmadora digital para o estudo do movimento dos corpos*, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 1501-1–1501-7, (2009).

Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação

[2] Sismanoglu, B. N., Caetano, R. F., Germano, J. S. E., Rezende, M. V. O., Hoyer, Y. D., *Dinâmica de massa variável: corrente suspensa na máquina de Atwood*, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 2310-1 – 2310-7 (2011).

[3] Symon, K. R., *Mecânica*, (Editôra Campus, Rio de Janeiro, 1982).

[4] Goldstein, H., *Classical Mechanics* 2nd ed., (Addison-Wesley, Reading, 1980),

[5] Divisão de Ciências Fundamentais do ITA, <http://www.ief.ita.br/portal/?q=node/114>, consultado em 06 de março de 2014.

[6] www.virtualdub.org, consultado em 06 de março de 2014.