

La persistencia de los deferentes y los epiciclos a lo largo de la historia de la astronomía



José Antonio Peralta y Porfirio Reyes López

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, Miguel Othón de Mendizabal s/n, Edificio 9 U. P. Adolfo López Mateos, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07738 México D. F.

E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

(Recibido el 25 de Marzo de 2014, aceptado el 28 de Agosto de 2014)

Resumen

Resumen: Se hace un breve repaso histórico de las diferentes formas como los astrónomos han intentado reproducir el movimiento de los planetas comenzando con los antiguos griegos y terminando con la deducción científica de estas trayectorias por Newton. Se muestra que el uso de los epiciclos y deferentes para describir el movimiento de los planetas en función del tiempo, que se creía un recurso obsoleto luego del modelo tan simple de Kepler que asignaba a los planetas trayectorias elípticas con el Sol en uno de sus focos, reaparece cuando a partir de las leyes de la mecánica y la teoría de la gravitación de Newton se intenta describir la posición de los planetas en función del tiempo y no en función del espacio como lo hizo Kepler. También se muestra que a partir de un modelo de computadora de la superposición de deferentes y epiciclos este modelo es equivalente al uso de una serie de Fourier.

Palabras clave: Planetas, Tolomeo, serie de Fourier.

Abstract

A brief historical review of the different forms how the astronomers have tried to reproduce the movement of the planets, starting with the ancient Greeks and ending with the Newton's scientific deduction of these trajectories. It shows the use of epicycles and deferents to describe the motion of the planets in terms of time, obsolete resource after Kepler simple model, that relied the planets on an elliptical path with the Sun at one focus, reappeared since the mechanic's laws and the Newton's gravitation theory, trying to describe the position of the planets in terms of time and not on a space as Kepler did. It also shows that since a computer model of overlapping deferents and epicycles, is equivalent to using a Fourier series.

Keywords: Planets, Ptolemy, Fourier series.

PACS: 01.65.+g, 01.70.+w, 01.75.+m

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Si hoy fuésemos capaces de pasarnos toda una noche observando a las estrellas, veríamos que éstas se desplazan lentamente al unísono girando en círculos concéntricos alrededor de la Estrella Polar, pero que en noches sucesivas su posición a la misma hora con respecto a un punto de referencia fijo sobre la Tierra, va cambiando hasta que al cabo de un año vuelven a su misma posición. Los antiguos griegos - luego de superar la etapa de representación mítica de los fenómenos naturales en la cual se hacían intervenir seres sobrenaturales para explicarlos - propusieron en principio un modelo muy simple del Universo en el cual la Tierra estaba en el centro y en la parte más externa las estrellas fijas sobre dos esferas, una esfera que gira con un período de 24 horas alrededor de este centro, y otra que gira una vez al año. Este modelo tan sencillo se vio cuestionado por la consideración del movimiento del Sol y de la Luna así como de los 5 planetas que se conocían entonces (Marte, Mercurio, Júpiter, Venus y Saturno), los

cuales eran astros que no tenían una posición fija con respecto al marco de las estrellas, sino que cada determinado tiempo, luego de mantenerse moviendo hacia el este, retrocedían para luego proseguir su camino original; Mercurio lo hacía cada 116 días, Venus cada 584, Marte cada 780, Júpiter cada 399 y Saturno cada 378 días. Esta llamada "retrogradación" tenía las siguientes características: 1) durante ella los planetas aumentaban de brillo, 2) estos astros de comportamiento singular estaban situados en una banda (la banda del Zodiaco) alrededor de la Eclíptica que era la trayectoria que seguía el Sol a lo largo de un año, y 3) su retrogradación podía ocurrir cuando estaban en oposición con el Sol o cuando estaban en conjunción [1].

II. LA PREGUNTA DE PLATON

Tal como ocurre con toda anomalía, este raro comportamiento rompió el paradigma tan sencillo que

previamente se había elaborado sobre el modelo del Universo, y entre los muchos aspectos trascendentes de la obra de Platón, hay que adjudicarle que supo formular con precisión una pregunta en cuya respuesta trabajaron arduamente durante siglos y siglos algunas de las mentes más brillantes dedicadas al estudio de los astros: *¿Cuáles son los movimientos circulares uniformes cuya superposición reproduce el movimiento observado de los planetas?* [1].

En cierto modo que se recurriera a los movimientos circulares para explicar los movimientos planetarios es natural, dado el carácter divino que se le atribuía al círculo, por otra parte, la pregunta en sí, en caso de que los observadores de los cielos aceptaran responderla, restringía el campo de las respuestas ya que había que lanzarse a la búsqueda específica de las diferentes combinaciones de movimientos circulares uniformes que reprodujeran el movimiento de las estrellas y los planetas, y no divagar con otro tipo de combinaciones. Tan precisa es la pregunta que se ha dicho que tal pregunta conforma lo que hoy se llamaría un auténtico programa de investigación [2]. La pregunta y sus respuestas nos hace reflexionar una vez más cuán importante papel juega en el desarrollo de la ciencia “la pregunta”, en efecto, cualquier investigador sabe que el papel de una investigación o de una serie de observaciones, como es el caso analizado, no es solo descubrir nuevos conocimientos, sino también generar nuevas preguntas, y que mientras estas sean más precisas y densas en significado más incitarán a futuras investigaciones. Es así como se mantiene la dinámica del pensamiento, mediante una interminable cadena de preguntas y respuestas, la respuesta da por terminada una etapa, la pregunta nos lanza hacia adelante.

III. LAS RESPUESTAS

A. Eudoxo y Calipo

Eudoxo y Calipo [3] fueron los primeros astrónomos griegos que para responder a la pregunta de Platón propusieron un modelo matemático, este consistía en una combinación de esferas concéntricas que rotaban a diferentes velocidades angulares y con respecto a diferentes ejes, de manera que cada eje pivotara sobre la esfera inmediatamente superior. Este modelo reproducía la retrogradación de los planetas, pero tenía un defecto esencial: al moverse los planetas sobre esferas concéntricas con respecto a la Tierra no había forma de explicar sus cambios de brillo ya que siempre, por definición, se mantenían a la misma distancia de su centro. Pese a ello, Aristóteles retomó este modelo, lo refinó y su modelo estuvo compuesto por 56 esferas.

B. El modelo de Tolomeo

Fue posteriormente en Alejandría en donde se ensayaron otro tipo de superposiciones, recordemos que en este lugar *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 3, Sept. 2014*

trabajaron los más grandes astrónomos de la antigüedad, tales como Aristarco, quien propuso al Sol como centro del Universo, y a Hiparco quien elaboró un mapa del cielo en donde estaban clasificadas más de 1000 estrellas, con su posición angular y clasificadas de acuerdo a su brillo aparente [4]. Fue en Alejandría en donde se dio la respuesta más aceptada por la posteridad a la pregunta de Platón por Tolomeo en su libro del *Almagesto*; esta propuesta constaba básicamente de un círculo principal llamado deferente y de un conjunto de círculos secundarios llamados epiciclos: el primer epiciclo tenía un centro que se movía sobre el perímetro del deferente, el segundo epiciclo un centro que se movía sobre el primero, y así sucesivamente, tal como se observa en la figura 1.

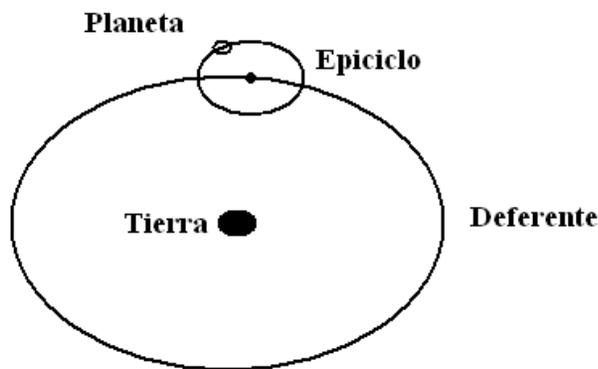


FIGURA 1. Superposición de un deferente y un epiciclo para representar el movimiento de un planeta.

Debido a que su modelo inicial de movimientos circulares no reproducía con suficiente exactitud la evolución temporal de las posiciones de los planetas hubo que introducir nuevos artificios, y el modelo final de Tolomeo quedó conformado de la siguiente manera: el deferente era un círculo pero su centro no coincidía con la Tierra sino que rotaba sobre otro círculo cuyo centro estaba a cierta distancia de la Tierra, por otra parte introdujo el ecuante, un punto desde el cual el movimiento de los centros de los epiciclos se movían con velocidad uniforme. Este refinamiento en realidad era equivalente a agregar un epiciclo más y a sumar un término constante, así, el modelo finalmente se compuso con 84 círculos [1].

Los astrónomos árabes durante la Edad Media, como por ejemplo Abu Abdullah Al-Battani, famosos astrónomo y matemático quien nació en 858 d.C. [4], retomaron las bases de este modelo, pero le hicieron algunas modificaciones de detalle, con todo, el modelo tolemaico fue el que fue aceptado en general hasta antes de la aparición del nuevo modelo propuesto por Copérnico.

C. El modelo de Copérnico

Como es sabido, el modelo de Copérnico sacó a la Tierra del centro del sistema planetario y puso en su lugar al Sol, este modelo explicaba cualitativamente el comportamiento

de los planetas ya que los hacía retrogradar, durante este retroceso, dado que la distancia relativa entre la Tierra y los demás planetas cambiaba a lo largo del tiempo, producía un aumento del brillo cuando esta distancia era mínima, su cercanía de la Eclíptica se explicaba porque todos los planetas se movían aproximadamente en un mismo plano, y la oposición o conjunción de las retrogradaciones se explicaba porque unos planetas eran internos con respecto a la órbita de la Tierra y otros externos. Esto en el plano cualitativo, pero en el plano cuantitativo se presentaban serias divergencias y esto empujó a Copérnico para lograr un acuerdo entre su modelo y los datos empíricos a recurrir una vez más al uso de los epiciclos para conformarse finalmente con 36 círculos [1]; así pues el modelo de Copérnico era en esencia semejante al de Tolomeo, excepto que colocaba en su centro no a la Tierra sino al Sol.

D. Kepler y Newton

Kepler, luego de un arduo trabajo de manipulaciones numéricas con los datos legados por Tycho Brahe [5], vino aparentemente a hacer a un lado toda la sofisticación de los antiguos modelo al proponer sus 3 famosas leyes:

1. Todos los planetas se desplazan en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
2. El radio vector que une a cada planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempo iguales.
3. El cuadrado de su período orbital es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita elíptica.

Es decir, una simple órbita elíptica sustituía el complicado modelo de superposición de deferentes y epiciclos.

Posteriormente el trabajo de Newton, a partir de su teoría de la gravitación universal y de sus leyes de la mecánica, dio una explicación científica a este hecho, si aceptamos, de acuerdo a Aristóteles, que una explicación científica se alcanza *cuando un hecho particular puede ser deducido a partir de primeros principios*. En efecto, que la fuerza gravitatoria de atracción decayera según la inversa de la distancia entra las masas, así como las leyes de la mecánica permitieron a Newton deducir que las trayectorias de los planetas deberían ser elípticas.

IV. REPRESENTACIÓN ESPACIAL Y REPRESENTACIÓN TEMPORAL... EL REGRESO DE TOLOMEO

A partir de las propuestas de Kepler, el recurso a los deferentes y a los epiciclos era pues un recurso obsoleto que había quedado en el pasado, hay que apuntar, sin embargo, que la representación de Kepler del movimiento de los planetas era una *representación espacial*, mientras que las representaciones tanto de Copérnico como de Tolomeo describían la posición de los planetas *en función del tiempo*. ¿Qué ocurre si a partir de las leyes de Newton y su teoría de la gravitación universal intentamos reproducir la posición de los planetas en función del tiempo?

Por de pronto partimos de una constatación: el movimiento elíptico de los planetas representado sobre un plano cartesiano es periódico con respecto a las coordenadas X y Y , por tanto la función que describe este comportamiento periódico puede ser desplegada en una serie de Fourier,

$$X(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_0 t, \quad (1)$$

$$Y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{senn}\omega_0 t, \quad (2)$$

esto considerando que las proyecciones sobre los ejes X y Y solo incluyen en el primer caso a la función coseno, y en el segundo a la función seno.

En esta serie la frecuencia angular ω_0 es igual a $2\pi/T_p$, con T_p el tiempo correspondiente al año de cada planeta. Cuando en un trabajo anterior [6] hemos desplegado los valores de $X(t)$ y de $Y(t)$ con técnicas numéricas utilizando el algoritmo de Verlet, aplicando luego un análisis de Fourier sobre estas series de tiempo para obtener los valores de los coeficientes B_n y C_n , hemos encontrado que son aproximadamente iguales, y por tanto la serie representa ¡una superposición de movimientos circulares uniformes, es decir de deferentes y epiciclos! En efecto, para la mayoría de planetas tal como se puede ver en la tabla I, los valores coinciden al nivel de las centésimas, en algunos hasta las milésimas, aunque Neptuno es la excepción.

TABLA I. Amplitudes de las componentes armónicas de $X(t)$ y $Y(t)$ en unidades astronómicas.

| Planeta | B_1 (uA) | B_2 (uA) | B_3 (uA) |
|----------|--------------------|------------------|------------------|
| | C_1 (uA) | C_2 (uA) | C_3 (uA) |
| Mercurno | 0.380 0.375 | 0.0385 0.0380 | 0.0058 0.0056 |
| Venus | 0.7212 0.7214 | 0.0025 0.0026 | |
| Tierra | 0.9972 0.9972 | 0.0083 0.0083 | |
| Marte | 1.5140 1.5114 | 0.0705 0.0707 | 0.0050 0.0053 |
| Júpiter | 5.1915 5.1935 | 0.1281 0.1297 | 0.0053 0.0065 |
| Saturno | 9.5092 9.5042 | 0.2624 0.2665 | 0.0107 0.0113 |
| Urano | 19.1122 19.0996 | 0.4472 0.4454 | |
| Neptuno | 30.000 29.9952 | 0.1250 0.1213 | |

V. UN MODELO COMPUTARIZADO DEL SISTEMA DE TOLOMEO

Volvamos a analizar la antigua propuesta de Tolomeo en una versión en la cual hemos excluido al ecuante para devolver a los desplazamientos el carácter de movimiento circular uniforme, pero hagámoslo con los recursos actuales de la computación, para ello hemos diseñado un programas que contiene un deferente y 2 epiciclos y cuyos parámetros variables se muestran en la figura 2. En esta figura los valores de X y de Y representan los radios del deferente y de los 2 epiciclos, mientras que ω la frecuencia angular del deferente y n y p los factores que multiplican a esta frecuencia, y que pueden ser enteros o fraccionarios. El programa nos permite observar las curvas resultantes de esta composición conforme se van generando. Los resultados muestran que hay toda una variedad de comportamientos posibles y que no es sencillo reproducir un comportamiento particular aún con el auxilio de una computadora.

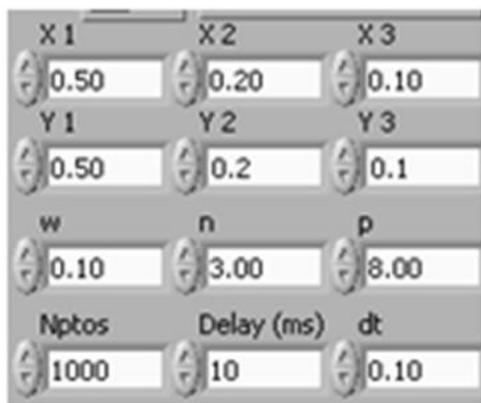


FIGURA 2. Parámetros variables en el programa para dar diferentes valores a los radios de los deferentes y epiciclos así como a sus frecuencias angulares.

Mostramos en la figura 3 algunos de los resultados obtenidos,

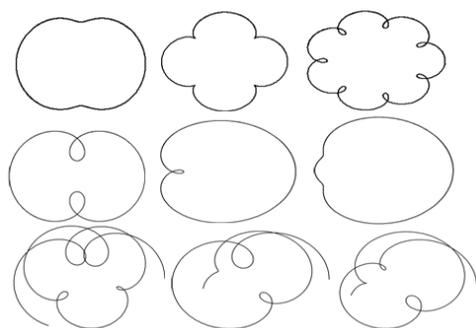


FIGURA 3. Diferentes trayectorias variando los radios y las frecuencias angulares del deferente y los epiciclos.

Ahora bien, un resultado interesante es que para que las trayectorias sean cerradas en un solo ciclo, es decir, para que el movimiento sea periódico, las frecuencias angulares de los epiciclos deben ser múltiplos de la frecuencia

angular del deferente, si esto no es así no se cumple esta periodicidad.

En razón de estos resultados podemos decir que si la forma como Tolomeo logró reproducir el movimiento de los planetas fue superponiendo movimientos circulares uniformes, forma que traducida al lenguaje de las matemáticas actuales es

$$X(t) = X_1 \cos \omega t + X_2 \cos n\omega t + X_3 \cos p\omega t, \quad (1)$$

$$Y(t) = Y_1 \sin \omega t + Y_2 \sin n\omega t + Y_3 \sin p\omega t, \quad (2)$$

dato que para que el movimiento sea periódico en un ciclo se requiere que n y p sean enteros, las ecuaciones 1 y 2 representan una serie de Fourier;

VI. CONCLUSIONES

Este breve repaso histórico de las formas como lo astrónomos han tratado de describir el comportamiento de los planetas con respecto al tiempo o con respecto al espacio, nos ha mostrado que hay una rara continuidad de fondo en estas representaciones. En efecto, con las trayectorias elípticas propuestas por Kepler se creyó que los complicados modelos hechos a base de una gran cantidad de movimientos circulares uniformes, propuestos no solo por Tolomeo sino aún por el mismo Copérnico, eran antiguallas, formas de representación obsoletas, sin embargo no es así, y cuando los movimientos de los planetas se hacen en función del tiempo inesperadamente los deferentes y epiciclos tienden a reaparecer aún dentro de la Física Clásica. Por otra parte adelantándose por muchos siglos al descubrimiento de las herramientas matemáticas de la época moderna, aunque sin su grado de generalización, los antiguos griegos ya hicieron tal vez – como lo sugiere nuestro modelo- uso de la serie de Fourier, hecho que nos confirma una vez más en que con ellos nace verdaderamente la ciencia moderna. En forma paradójica, el posterior desarrollo histórico daría marcha atrás a estos avances, y cuando el Imperio Romano comenzó su declinación hasta desembocar en la Edad Media, el fanatismo religioso reviviría los míticos modelos burdos del pasado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la COFAA el apoyo dado para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Kuhn, T. S., *La Revolución Copernicana* (Ed. Planeta-Agostini, No. 45, España, 1993).
 [2] Taton, R., *Historia general de las ciencias* (Ediciones Orbis, S.A., España, 1988).

- [3] Crombie, A.C., *Historia de la Ciencia: de San Agustín a Galileo*, (Alianza Editorial, 5ª Edición, España 1985).
[4] Abetti, G., *Historia de la Astronomía* (Breviarios del Fondo de Cultura Económica, No. 18, México, 1966).
[5] Koestler, A., *Kepler* (SALVAT Editores, S.A., Barcelona, 1985).

- [6] Peralta, J. A., Calles, A., Yépez, E., *El análisis de Fourier de la trayectorias planetarias y el modelo copernicano del sistema solar*, *Revista Mexicana de Física* **49**, 283-289 (2003).