



# LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

[www.lajpe.org](http://www.lajpe.org)

Volume 8

Number 3

September 2014



A publication sponsored by the Latin American Physics Education Network  
and the Institute of Science Education



---

---

# LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

---

---

Electronic version of this journal can be downloaded free of charge from the web-resource:

<http://www.lajpe.org>

## Production and technical support

Daniel Sánchez Guzmán  
dsanchez@ipn.mx  
Rocío Bonilla Castelan  
chio@lapen.org.mx

Latin American Journal of Physics  
Education is indexed in:



## EDITORIAL POLICY

Latin American Journal of Physics Education (LAJPE) is a peer-reviewed, electronic international journal for the publication of papers of instructional and cultural aspects of physics. Articles are chosen to support those involved with physics courses from introductory up to postgraduate levels.

Papers may be comprehensive reviews or reports of original investigations that make a definitive contribution to existing knowledge. The content must not have been published or accepted for publication elsewhere, and papers must not be under consideration by another journal.

This journal is published quarterly (March, June, September and December), by the Latin American Physics Education Network (LAPEN) and the Institute of Science Education. Manuscripts should be submitted to [cmoral@ipn.mx](mailto:cmoral@ipn.mx) or [lajpe@lapen.org.mx](mailto:lajpe@lapen.org.mx). Further information is provided in the "Instructions to Authors" on [www.lajpe.org](http://www.lajpe.org)

Direct inquiries on editorial policy and the review process to: Cesar Mora, Editor in Chief, CICATA-IPN Av. Legaria 694, Col Irrigación, Del. Miguel Hidalgo, CP 11500 México D. F.

Copyright © 2014, *Latin American Physics Education Network*. ([www.lapen.org.mx](http://www.lapen.org.mx))

ISSN 1870-9095

## INTERNATIONAL ADVISORY COMMITTEE

Ann-Marie Pendrill, Göteborgs University (Sweden)  
Bayram Akarsu, Erciyes University (Turkey)  
Carl Wenning, Illinois State University (USA)  
Diane Grayson, Andromeda Science Education (South Africa)  
David Sokoloff, University of Oregon (USA)  
Dean Zollman, Kansas State University (USA)  
Edward Redish, University of Maryland (USA)  
Freidrich Herrmann, University of Karlsruhe (Germany)  
Gordon Aubrecht II, Ohio State University (USA)  
Hiroshi Kawakatsu, Kagawa University (Japan)  
Jorge Barojas Weber, Universidad Nacional Autónoma de México (México)  
Jorge Valadares, Universidade Aberta de Lisboa, (Portugal)  
Laurence Viennot, Université Paris 7 (France)  
Lillian C. McDermott, University of Washington (USA)  
Marisa Micheleni, University of Udine (Italy)  
Marco Antonio Moreira, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brazil)  
Minella Alarcón, UNESCO (France)  
Orhan Karamustafaoğlu, Amasya University, (Turkey)  
Pratibha Jolly, University of Delhi (India)  
Priscilla Laws, Dickinson College (USA)  
Ton Ellermeijer, (Netherlands)  
Verónica Tricio, University of Burgos (Spain)  
Vivien Talisayon, University of the Philippines (Philippines)

## EDITORIAL BOARD

Deise Miranda, Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)  
Eduardo Moltó, Instituto Superior Pedagógico José Varona (Cuba)  
Eduardo Montero, Escuela Superior Politécnica del Litoral (Ecuador)  
Josefina Barrera, Universidade do Estado do Amazonas (Brasil)  
Julio Benegas, Universidad Nacional de San Luis (Argentina)  
Leda Roldán, Universidad de Costa Rica (Costa Rica)  
Celso Ladera, Universidad Simón Bolívar (Venezuela)  
Manuel Reyes, Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela)  
Mauricio Pietrocola Universidad de Sao Paulo (Brasil)  
Nelson Arias Ávila, Universidad Distrital, Bogotá (Colombia)  
Octavio Calzadilla, Universidad de la Habana (Cuba)  
Ricardo Buzzo Garrao, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)  
Zulma Gangoso, Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

## EDITOR-IN-CHIEF

César Mora, Instituto Politécnico Nacional (México)

## ASSOCIATED EDITOR

Josip Sliško, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

# LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Volume 8, Number 3, September 2014

## CONTENTS/CONTENIDO

<b>Editorial</b>	381-382
<b>Papers/Artículos</b>	
Do solved problems in Slovenian secondary school physics textbooks emphasize modeling process? Matej Forjan, Josip Sliško, Marko Marhl & Vladimir Grubelnik	383-389
Fibonacci's motion problem "Two travellers": The solutions given by junior high-school students who were trained for Mathematical Olympiad María Araceli Juárez Ramírez, Lidia Aurora Hernández Rebollar & Josip Slisko	390-396
A brief review of the relevant dielectric theories of solids Suresh Sagadevan, A. Shanmuga Sundaram	397-406
Epistemological and educational study of the electromagnetic wave propagation in the empty space (vacuum), and how students understand the vacuum's concept Rabah Ladj, Abachi Tahar & Taib Belarbi	407-410
Formalismo matricial para la Mecánica y la Termodinámica. I. Traducción J. Güémez & M. Fiolhais	411-428
Alcance y limitaciones en la axiomatización termodinámica de Carathéodory Rafael Andrés Alemañ Berenguer	429-437
Enseñanza y aprendizaje de conceptos termodinámicos con investigación dirigida para estudiantes de bachillerato María de la Cruz Medina Ramos, A. López Ortega & César Mora	439-450
Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação Correa do Nascimento, Janaina, Barbosa de Barros Aragão, Eduardo Cezar, Cardoso de Sousa, Daniel, De Faria Barbosa, Felipe Tuyama, Pereira de Abreu, Guilherme Jean, Magno Barbosa, Itamar, Malmonge Martin, Inácio, Grigoriev Grigorov, Korneli, Edmundo Germano, José Silvério, Gomes e Bogos Nubar Sismanoglu, Marcelo Pego	451-459
Estudio de movimientos en tiempo real. Dificultades de aprendizaje en dos diseños didácticos diferentes Yanitelli, Marta, Concar, Sonia Beatriz, Scancich, Miriam & Pérez Sottile, Ricardo	460-468

*continued/continuación*

**LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION**  
**Vol. 8, Number 3, September 2014**

contents/contenido

Intervenciones transversales basadas en situaciones problemas Meoli, Jorgelina Julia; Martínez, Diana Elina; Concari, Sonia Beatriz	469-474
Perfil sócio-educacional de estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA): um estudo de realidades e interesses acerca do conceito energia André Taschetto Gomes, Isabel Krey Garcia	475-483
Energías renovables: una propuesta para su enseñanza Nelson Arias Ávila, Verónica Tricio Gómez	487-493
Tecnologías emergentes ¿cuáles usamos? Concari, Sonia Beatriz	494-502
Crenças de autoeficácia e a escolha da carreira de professor de Física Bruno dos Santos Simões, José Francisco Custódio, Mikael Frank Rezende Junior	503-511
Génesis y evolución de la enseñanza de la Física en el México colonial Marco A. Moreno Corral1, M. Estela de Lara Andrade	512-520
La persistencia de los deferentes y los epiciclos a lo largo de la historia de la Astronomía José Antonio Peralta y Porfirio Reyes López	521-525
Fundamentación y desarrollo de un hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la Física en carreras de ingeniería Eduardo Carvajal Sánchez, Rolando Serra Toledo, Mikiya Muramatsu	526-532
Biophotonics and optofluidics technology –technical analysis and qualitative review of the novel applications Kamal Nain Chopra	533-540
A technical note on gallium nitride technology and short qualitative review of its novel applications Kamal Nain Chopra	541-547
Digital combinational circuit optimization using invasive weed optimization technique Prabhat K. Patnaik, Dhruva C. Panda, Santosh Kumar Pantina	548-554

*continued/continuación*

**LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION**  
**Vol. 8, Number 3, September 2014**

contents/contenido

Acerca del dicloruro de radio-223 (Ra-223-Cl <sub>2</sub> ) (Alpharadin) en pacientes con cáncer de próstata resistente a la castración CPRC, una aplicación de la Física Médica Harley J. Orjuela Ballesteros	555-560
Aplicación del software estadístico R para evaluar el aprendizaje de conceptos vectoriales en estudiantes de nivel Medio Superior Rubén Sánchez-Sánchez, Diego Fernando Becerra-Rodríguez, César Mora	561-572

Dear colleagues,

We are just at one step in order get the normal rhythm of LAJPE, this is not easy because the road is hard but each day our editorial team is winning, win to time, win to help a lot of people willing to show their research, their experiences in Physics class, and also to fulfill the requirements to get a doctorate in Physics Education.

The roll of the Physics teacher is so important in the modern society, unfortunately the importance of this conception have different acceptance in the World. In theory we can say that is the same or similar, but in practice we find differences so huge, depending the social-economics circumstances, mainly in poor countries where science is one of the last government priorities. What we can do on facing this sad situation? Of course the response to this general question is affected according circumstances, but remembering that circumstances are made by ourselves, therefore is so important to share knowledge related to research on better methods on teaching Physics, on training teachers, on gathering more young student to study science. In this sense, LAJPE is giving not a small contribution but big, because we are an option for teachers and researchers on developing countries. LAJPE is a free access journal sponsored by the Latin American Physics Education Network, and one of the goals of the network is science communication, increase and motivate the research groups on improving teaching Physics. We consider that cultural aspects of Physics are a good strategy for students of all levels. Proudly we found that secondary school and high school students have read LAJPE papers for homework about science projects, science fairs, Physics tournaments, etc.

We hope that this September issue of LAJPE can be helpful to Physics students and teachers, researchers and physicist, also we try to sponsor several activities related with the improving of Science Education.

Thanks for your support and patience.

César Mora  
Editor in Chief

Estimados colegas,

Estamos justo a un paso de alcanzar el ritmo normal de la revista LAJPE, esto no es fácil ya que el camino es difícil, pero cada día nuestro equipo editorial está ganando, ganando en cuando a tiempo, y en ayudar a mucha gente dispuesta a mostrar y compartir sus investigaciones, sus experiencias sobre la clase de física, y también para cumplir con los requisitos para la obtención de un doctorado en Educación en Física.

El rol del profesor de Física es sumamente importante en la sociedad moderna, pero por desgracia la importancia de esta concepción tiene diferente aceptación en el mundo. En teoría, podemos decir que es lo mismo o similar, pero en la práctica nos encontramos con diferencias enormes, claro está, dependiendo de las circunstancias económicas sociales, sobre todo en los países pobres donde la ciencia es una de las últimas prioridades de los gobiernos. Pero, ¿qué podemos hacer frente a esta triste situación? Por supuesto que la respuesta a esta pregunta general se ve afectada según las circunstancias, pero recordando nosotros mismos creamos las circunstancias, por lo tanto, es muy importante compartir los conocimientos relacionados con la investigación sobre mejores métodos en la enseñanza de la Física, en la formación de profesores, en lograr el interés de estudiantes jóvenes para estudiar ciencia. En este sentido, LAJPE no está dando una pequeña contribución, más bien grande, porque somos una opción para los profesores e investigadores de países en desarrollo. LAJPE es una revista de acceso gratuito patrocinada por la Red Latinoamericana de Educación en Física, y uno de los objetivos de la red es la comunicación científica, aumentar y motivar a los grupos de investigación en la mejora de la enseñanza de la Física. Consideramos que los aspectos culturales de la Física son una buena estrategia para los estudiantes de todos los niveles. Orgullosamente nos hemos encontrado con que estudiantes de escuela secundaria y de bachillerato, han leído algunos artículos de LAJPE para la realización de tarea sobre proyectos de ciencia, ferias de ciencias, torneos Física, etc.

Esperamos que esta edición de septiembre de LAJPE puede ser de utilidad para estudiantes y profesores de Física, investigadores y físicos, cabe mencionar que también intentamos patrocinar varias actividades relacionadas con la mejora de la Educación en Ciencias.

Gracias por su apoyo y paciencia.

César Mora  
Editor en jefe

# Do solved problems in Slovenian secondary school physics textbooks emphasize modeling process?



Matej Forjan<sup>1,2</sup>, Josip Sliško<sup>3</sup>, Marko Marhl<sup>4,5</sup>, Vladimir Grubelnik<sup>6</sup>

<sup>1</sup>*School Centre Novo mesto, Novo mesto, Slovenia.*

<sup>2</sup>*Faculty of Industrial Engineering, Novo mesto, Slovenia.*

<sup>3</sup>*Facultad de Ciencias Fisico Matematicas, Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Puebla, Mexico.*

<sup>4</sup>*Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Maribor, Slovenia.*

<sup>5</sup>*Faculty of Education, University of Maribor, Maribor, Slovenia.*

<sup>6</sup>*Faculty of Electrical Engineering and Computer Science, University of Maribor, Maribor, Slovenia.*

**E-mail:** matej.forjan@sc-nm.si

(Received 24 June 2014, accepted 25 August 2014)

## Abstract

This article describes the results of analysis of the content of the two most commonly used Slovenian secondary school physics textbooks, from the standpoint of the presentation of modelling stages in the solved problems. We investigated the extent to which the four main stages of modelling process are presented in the solved examples of individual physical areas and analysed the results. The analysis shows that the conceptual phase is very poorly presented, while, in most cases, the emphasis is on the stage of model analysis, i.e. solving mathematical equations. The validation stage of modelling process can be hardly detected in solved examples. It means that students are not able to recognize the value of the experiment, when assessing the relevance and accuracy of developed models.

**Keywords:** physics textbook analysis, modeling method, solved problems.

## Resumen

Este artículo describe los resultados de análisis de contenido de dos libros de texto de física que son comúnmente usados en las escuelas preparatorias en Eslovenia, desde el punto de vista de presentación de las fases de la modelación en los problemas resueltos. Hemos investigado hasta qué extensión se presentan las cuatro fases principales del proceso de modelación en los ejemplos resueltos en los áreas individuales de física y hemos analizado los resultados. El análisis demuestra que la fase conceptual se presenta de manera muy pobre, mientras, en la mayoría de los casos, el énfasis está en la fase de análisis de modelo, es decir, en la solución de ecuaciones matemáticas. La fase de modelación del proceso de modelación difícilmente se detecta en los ejemplos resueltos. Eso significa que los estudiantes no son capaces de reconocer el valor de experimento, cuando evalúan la relevancia y la precisión de los modelos desarrollados.

**Palabras clave:** análisis de libros de texto de física, método de modelación, solved problems.

**PACS:** 01.40.E-, 01.40.gb

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCTION

The prevailing opinion of students about physics is that it is boring, too abstract and completely irrelevant to everyday life [1, 2, 3, 4, 5], and as such useless which makes it not worth to learn. Such a view is not so surprising, because in the classroom we often treat such cases where it is necessary only to find an appropriate formula, insert numbers and calculate the unknown quantities [6, 7, 8]. Lillian McDermott [9, page 296] wrote, more than twenty years ago, that the key findings of physics teaching research suggest that “a coherent conceptual framework is not typically an outcome of traditional instruction”. In the traditional physics

*Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 3, Sept. 2014*

teaching, we usually start from the observed physical phenomena, derive equations and show examples of the use of equations in problems solving and all this is supplemented with laboratory work. However, as researches show some shortcomings of traditional physics teaching, in recent decades appear several different approaches, which should improve this situation. All these approaches are, more or less, based on the fact that the students must be mentally active in the classroom, which is one of the main conditions for a functional understanding of physics [10, 11, 12, 13]. Hestenes [14] argues that the situation can be improved with the modelling approach, where the entire teaching of physics is organized around a small number of basic models, which

Dear colleagues,

We are just at one step in order get the normal rhythm of LAJPE, this is not easy because the road is hard but each day our editorial team is winning, win to time, win to help a lot of people willing to show their research, their experiences in Physics class, and also to fulfill the requirements to get a doctorate in Physics Education.

The roll of the Physics teacher is so important in the modern society, unfortunately the importance of this conception have different acceptance in the World. In theory we can say that is the same or similar, but in practice we find differences so huge, depending the social-economics circumstances, mainly in poor countries where science is one of the last government priorities. What we can do on facing this sad situation? Of course the response to this general question is affected according circumstances, but remembering that circumstances are made by ourselves, therefore is so important to share knowledge related to research on better methods on teaching Physics, on training teachers, on gathering more young student to study science. In this sense, LAJPE is giving not a small contribution but big, because we are an option for teachers and researchers on developing countries. LAJPE is a free access journal sponsored by the Latin American Physics Education Network, and one of the goals of the network is science communication, increase and motivate the research groups on improving teaching Physics. We consider that cultural aspects of Physics are a good strategy for students of all levels. Proudly we found that secondary school and high school students have read LAJPE papers for homework about science projects, science fairs, Physics tournaments, etc.

We hope that this September issue of LAJPE can be helpful to Physics students and teachers, researchers and physicist, also we try to sponsor several activities related with the improving of Science Education.

Thanks for your support and patience.

César Mora  
Editor in Chief

Estimados colegas,

Estamos justo a un paso de alcanzar el ritmo normal de la revista LAJPE, esto no es fácil ya que el camino es difícil, pero cada día nuestro equipo editorial está ganando, ganando en cuando a tiempo, y en ayudar a mucha gente dispuesta a mostrar y compartir sus investigaciones, sus experiencias sobre la clase de física, y también para cumplir con los requisitos para la obtención de un doctorado en Educación en Física.

El rol del profesor de Física es sumamente importante en la sociedad moderna, pero por desgracia la importancia de esta concepción tiene diferente aceptación en el mundo. En teoría, podemos decir que es lo mismo o similar, pero en la práctica nos encontramos con diferencias enormes, claro está, dependiendo de las circunstancias económicas sociales, sobre todo en los países pobres donde la ciencia es una de las últimas prioridades de los gobiernos. Pero, ¿qué podemos hacer frente a esta triste situación? Por supuesto que la respuesta a esta pregunta general se ve afectada según las circunstancias, pero recordando nosotros mismos creamos las circunstancias, por lo tanto, es muy importante compartir los conocimientos relacionados con la investigación sobre mejores métodos en la enseñanza de la Física, en la formación de profesores, en lograr el interés de estudiantes jóvenes para estudiar ciencia. En este sentido, LAJPE no está dando una pequeña contribución, más bien grande, porque somos una opción para los profesores e investigadores de países en desarrollo. LAJPE es una revista de acceso gratuito patrocinada por la Red Latinoamericana de Educación en Física, y uno de los objetivos de la red es la comunicación científica, aumentar y motivar a los grupos de investigación en la mejora de la enseñanza de la Física. Consideramos que los aspectos culturales de la Física son una buena estrategia para los estudiantes de todos los niveles. Orgullosamente nos hemos encontrado con que estudiantes de escuela secundaria y de bachillerato, han leído algunos artículos de LAJPE para la realización de tarea sobre proyectos de ciencia, ferias de ciencias, torneos Física, etc.

Esperamos que esta edición de septiembre de LAJPE puede ser de utilidad para estudiantes y profesores de Física, investigadores y físicos, cabe mencionar que también intentamos patrocinar varias actividades relacionadas con la mejora de la Educación en Ciencias.

Gracias por su apoyo y paciencia.

César Mora  
Editor en jefe

are then used in specific situations. Such a view is in contrast to the traditional physics teaching, where the emphasis is on learning the final models and not on the modelling process itself. Modelling approach has shown positive impact on the understanding of basic physical structure [15, 16, 17], therefore Angell and colleagues believe that modelling is becoming an increasingly important component of modern physics curriculum [18].

In addition to teaching methods, a textbook is also an important part of the educational process. The textbooks reflect and implement curriculum, define the sequence of content in them, the laws of physics are explained and a very important part of the textbooks are also solved tasks. Research shows that students when solving physics problems often resort to solved tasks in textbooks and seek analogies that help them in solving [19, 20]. From this perspective, it is important that solved examples in physics textbooks present in detail all the steps in solving the problem. In particular, this applies to solving problems related to complex dynamical systems, where knowledge and proper use of the various phases of mathematical modelling plays an important role in the process of problem solving. Knowing the phases of mathematical modelling combined with experimentation is the basis for solving problems and understanding of systems in various fields of social and natural sciences [21, 22, 23, 24].

In the light of this issue, we focus our attention on the representation and presentation of the various phases of mathematical modelling in the solved examples in Slovenian secondary school physics textbooks. The importance of our research is in finding correlations between the representation of the various phases of mathematical modelling in textbooks and efficiency of solving complex physics problems. The reason for poorer results of Slovenian students in international researches of physics knowledge in problem solving that require higher cognitive skills [25, 26], could therefore be, at least partially, explained by the lack of the various phases of mathematical modelling in textbook examples. In a previous study [27], we have already shown that secondary school physics textbooks don't give enough emphasis on accurate presentation of idealizations and simplifications, which we usually assume when dealing with problems in secondary school physics. In present study we further expand this analysis on the remaining phases of mathematical modelling.

In this articles, we first describe in detail the concept of modelling and model and define each stage of mathematical modelling, which is, in our opinion, essential in solving physics problems at the secondary education level. To get a better insight into the current state, next to review of all the tasks, we do an analysis of individual domains of secondary school physics. Then we present the results of research, where we analyse the representation of the various modelling stages in the two most commonly used Slovenian secondary school physics textbooks. In the end, we discuss the results and we give guidance to achieve better results in solving physical problems that require higher cognitive skills.

## II. MODELING METHOD IN PHYSICS EDUCATION

According to several authors [28, 29, 30, 31, 32], knowledge of the models and the modelling process is crucial for understanding how the science works. Therefore, it is important that we accurately present models which are used in physics teaching. Hestenes, in several articles [14, 33], defines a model as a physical representation of the structure of the system and its characteristics, and explains that in physics we work with mathematical models, which means that we strive to present the observed properties with the quantities. Mathematical model we simulate interprets results and evaluates the validity of the model so that the results of the model are compared with experimental data [34]. The model is then developed to match the simulation results with the experimental results reasonably. We do this as long as this correspondence is not at a satisfactory level. Etkina and colleagues [35] recorded that in setting up a mathematical model we do several types of simplifications and they introduce a model of a body, a model of interaction, a model of the system, which is a combination of first two models, and a model of the process that describes the changes in the system. A more detailed description of the various stages of modelling can be found in works of several authors [36, 37, 38]. Based on the analysis of these methods, we define the phases of mathematical modelling, which in our opinion are appropriate or necessary to deal with the complex physics problems at secondary education level (Figure 1).

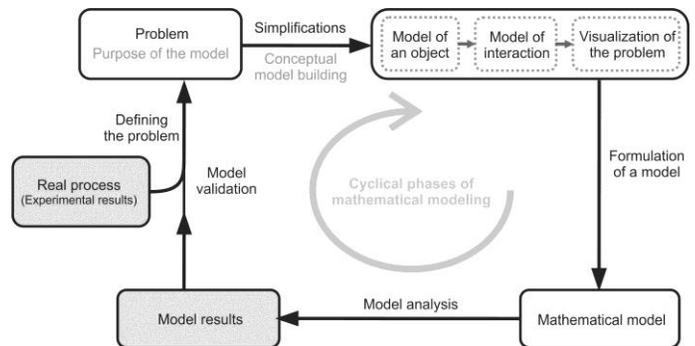


FIGURE 1. Proposed method of mathematical modelling in secondary physics education.

Any mathematical description of the real process requires from us to define the scope of the problem that we are interested in, as well as the goal and purpose of the model. The purpose of the model is important because it leads us to make choices about the complexity of the model, the accuracy of the involved parameters, of the boundaries of the model and other factors. Richardson and Pugh [39] argue that "model without purpose is like a ship without a sail." By selecting the purpose of the model, the criterion is defined, under which the appropriate system and its boundaries are selected. The next step is to decide how the body or system

of bodies will be simplified, which means choosing an appropriate model of the body (eg. particle body, rigid body).

We also need to decide which model of interactions will we choose - which interactions will be considered and which not. After selecting the model of the body and the model of interaction, we select physical quantities, which we believe could affect the behaviour of the body or system of bodies. Then a visualization of the problem follows to demonstrate more clearly the important aspects of physics and highlight the given information. It is important to present as many information about the assumptions as possible. The pictures, graphs, diagrams of forces, motion diagrams, charts rays or any other visual tools can be of great help in this presentation. On the basis of the model of the body and the model of interactions in second modelling stage, also called the formulation of the model, the functional relationships between the variables are developed, thus obtaining a mathematical model of the entire process. Models of the process can be state equations that describe how one or more properties of the system changes with respect to each other, or causal equations describing how the properties of the system change due to interactions with the environment. The result of the second phase is the mathematical representation of equations which must be solved. The third phase is the model analysis and in this phase the equations are solved and the process characteristics and implications of the model are analysed. In the validation phase of the modelling process we compare the results of the mathematical model with the results of the experiment and validate the reasonableness of the results obtained. In the case of discrepancies the whole process of modelling is repeated.

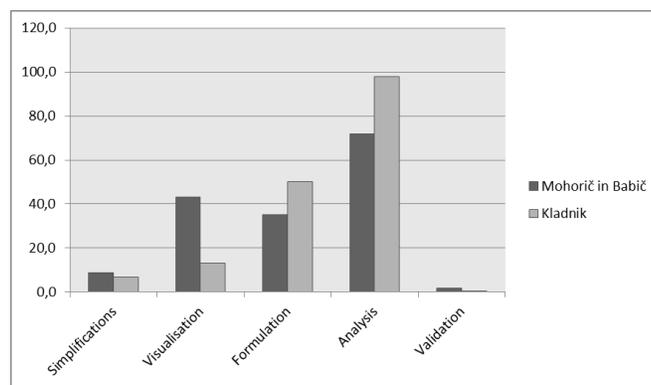
### III. ANALYSIS OF SOLVED PROBLEMS IN TEXTBOOKS FOR SECONDARY SCHOOL PHYSICS IN SLOVENIA

In Slovenia, the official textbooks are confirmed by the Council of Experts for general education, after ascertaining their conformity with the objectives of the curriculum and their content, didactic and methodical suitability. For secondary school physics, there are five approved textbooks, but according to the abundance of use, the two textbooks are standing out and our further analysis is limited only to these two textbooks [40, 41, 42, 43, 44, 45]. While the first edition of the Kladnik textbook has been written in the nineties and their concept didn't change through the years, the Mohorič and Babič is a modern textbook for secondary school physics, which was written in the last three years. In both textbooks there is a large number of solved examples (Mohorič and Babič textbook - 281 solved examples, Kladnik textbook - 201 solved examples), which were analysed from the perspective of the various stages of modelling process.

In the context of the conceptualisation phase we first analysed, whether in the text of the example or in the solution the simplifications, the idealizations or other

assumptions, which we assume when dealing with problems, are explicitly mentioned.

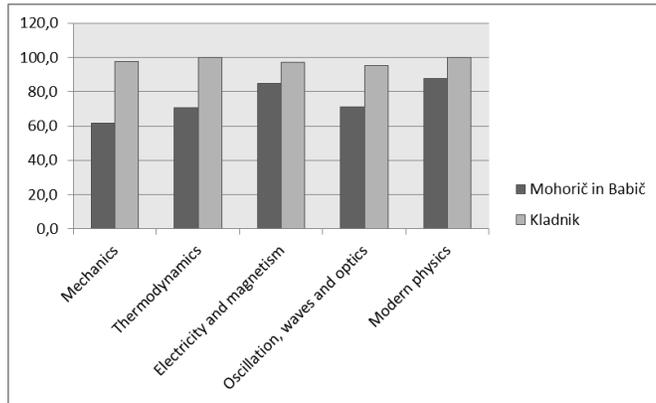
The conceptual stage of modelling includes also the visual representation of the problem, so we analyse how many solved examples are equipped with a sketch, diagram, graph, or other form of visual aids that helps us to illustrate the problem. In order to determine the extent to which the formulation stage of modelling is represented, we reviewed all the examples and determine whether the derivation of the final equation from all assumptions can be clearly seen or it is just written without detailed explanations or derivations. Based on experience, we expect that in solved examples the analysis stage of modelling is the most common one. In the final step, we analyse whether the obtained solutions are validated, if their reasonableness is assessed or whether the solutions are compared with any experimental data, which we include in the validation stage of the modelling process. The proportion of the individual stages of modelling in both analysed textbooks is presented in Figure 2.



**FIGURE 2.** The representation of the various stages of modelling process (in %) in both textbooks.

As expected, the stage of model analysis is the most frequent one. In the textbook from Kladnik the 98 % of solved examples are the classical computational problems, where the model analysis is the main part of problem solving. Such a large percentage of computational examples further reinforces the view that physics is a science in which we solve problems for which it is necessary only to find the right formula, insert numbers and calculate the desired quantity. In textbook from Mohorič and Babič this percentage is smaller, with 72% of such problems in which the model analysis is explicitly presented. This smaller number is attributed to the fact that in this textbook there are more such examples that qualitative treat certain physical problem. A more detailed overview of the various areas of physics, which is shown in Figure 3, exposes an interesting fact that in textbook from Mohoričev and Babič the minimum percentage of computational examples is in the introductory chapter of mechanics. In this chapter, the authors give a greater emphasis on qualitative understanding of basic physical concepts, in which they followed the instructions from the physics curriculum [46]. In curriculum

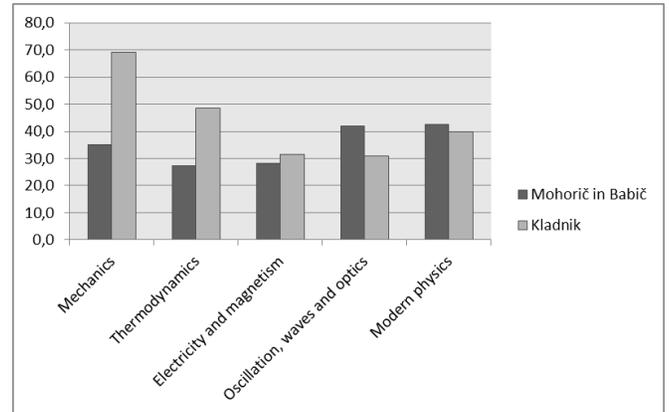
states, that the teaching of physics should be based on qualitative treatment of the subject matter. This qualitative aspect is especially important for students who first encounter with secondary school physics, because in such a way we teach them from beginning that in solving physical problems they must favour a qualitative analysis of the problem in front of a mere computation.



**FIGURE 3.** The proportion of solved examples in both textbooks (in %), that explicitly present the model analysis stage of the modelling process.

At the formulation stage on the basis of basic physical laws in a particular area, together with the models of the bodies and interactions the final equations are recorded. From those equations are in the model analysis then the results calculated. A comparison of two textbooks in Figure 2 shows that the formulation of the model in both textbooks is presented in approximately twice the smaller number of cases as the model analysis stage. This means that in half of computational examples the process of a mathematical model setup from of the initial assumptions to the final equation isn't obvious. In some cases, only a trivial calculation of certain physical quantities is needed and the formulation of the model is not required, but from the examples in the textbook, however, is expected to present a meaningful whole process of physics problems solving in which the formulation of a mathematical model is also included. Detailed representation of model formulation stage in individual physical fields is shown in Figure 4. It reveals that in the textbook from Kladnik 70% of all solved examples in the field of mechanics the model formulation stage is explicitly presented. To students that learn from this textbook, particularly in sections of kinematics and forces, a significant number of solved problems with a clear presented and detached model formulation and model analysis stages are available. Unfortunately this is not the case in other chapters where this percentage decreases to 30% and in these chapters the classical computational tasks such as "compute capacity of the capacitor, if you know the voltage between the plates and the charge on the plates" dominate. In a recent textbook the deviations between physical areas regarding the representation of the model formulation stage are smaller,

but similar as in textbook from Kladnik the smallest proportion of problems that contain this stage is in the field of electricity and magnetism.



**FIGURE 4.** The proportion of solved examples in both textbooks (in %), that explicitly present the model formulation stage of the modelling process.

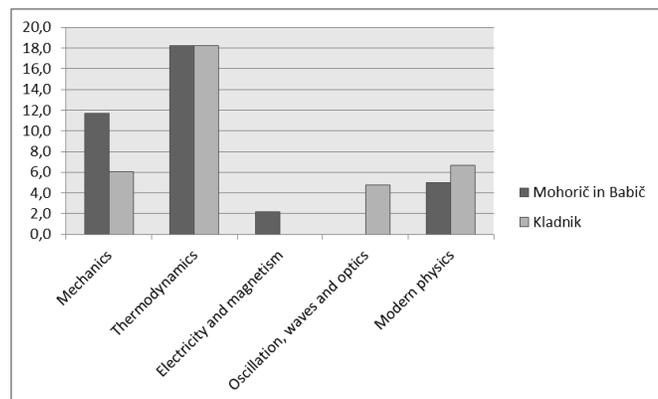
Simplifications and idealizations are a key part of the solution of physical problems and so are all the more surprising results presented in Figure 2 that in both the analysed textbooks there are less than 10% of solved tasks where the default assumptions are explicitly presented. A small number of assumptions in the textbook from Mohorič and Babič can be attributed to the fact that the model of bodies and interactions are explained in the text, so the authors didn't further interpreted those models in solved examples. In previous study [27], we showed that in textbook from Kladnik the simplifications and idealizations in the text are not explained in detail, so we expected them to be described in greater detail in the solved examples. The analysis of the solved tasks did not confirm our expectations.

Figure 5 shows the percentage of solved cases in various physics fields, where the default assumptions are explicitly present. It can be seen that in both textbooks the thermodynamics stands out, where the majority of the default assumptions are relating to the model of an ideal gas, or the stationary heat conduction. In the field of mechanics the proportion of the solved tasks with these assumptions is small, which especially in textbook from Kladnik leads to tasks that do not have too much contact with reality. For example, in the chapter on linear motion we can find an example of the hunter airplane that descends at a speed of 300 m/s and drop a bomb, for which from the equations of the free fall is calculated that over 10 seconds it will fall to the ground with the velocity 400 m/s.

Despite the velocity that is greater than the speed of sound in air at normal conditions, the reader doesn't find out, why the equations of free fall are applied. As the obtained result is not commented, similar tasks can cause confusion regarding the applicability of equations of the free fall. In our opinion for that task would be appropriate to clarify that, while air resistance in this case is not negligible, by using

equations of the free fall we can estimate the order of magnitude of the falling time, while for a more accurate determination of that time we must also take air resistance into account.

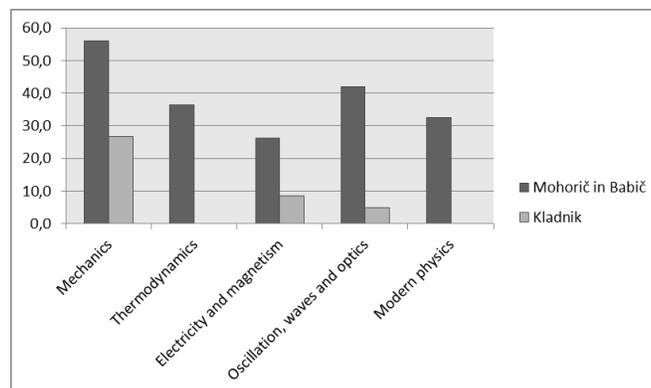
With such a clarification the use of model of the free fall becomes more meaningful and students start from the very beginning to think that greater precision requires a more sophisticated models.



**FIGURE 5.** The proportion of solved examples in both textbooks (in %), that explicitly present the default assumptions or models of the body and interaction.

Visualization of every physical problem is an important step in the conceptualisation stage, because with the help of the picture, graph, diagram, or other means for the visual presentation of the problem it is easier to present and organize our knowledge. Textbook from Mohorič and Babič, where 43% of solved examples are visualized (Figure 2), at first glance gives the visualization great importance, but on closer inspection, which is shown in Figure 6, we find some interesting things. For example, this textbook in chapters on mechanics presents a large number of solved examples that are visualized and the percentage of such examples exceeds 50%. But when dealing with other physical fields the number of solved tasks as well as the percentage of visualized tasks decreases despite the fact that there are treated subjects whose visualization is crucial, such as geometric optics, or electric and magnetic fields. In these areas of physics apply other visualization means, such as drawing ray diagrams of electrical circuits or diagrams of magnetic fields. It is important for students to acquire and understand as many different ways of visual presenting problems in physics, because in this way they are expanding range of cases, which they can solve with the systematic modelling approach. As shown in Figure 6, textbook from Kladnik gives very little importance to visualization, because only 27 cases out of 207 examples contain visual presentation. More than half of these cases are in the chapter on forces, where clearly illustrates the use of diagrams of forces in the analysis of the problems that fall within the scope of Newton's laws. Especially particular is the fact that in all areas of physics except for the mechanics there is almost no trace of solved

examples that show how to visually represent a specific physical problem, which raises the question to what extent do students that use this textbook understand the importance of visual presentation for models building and problem solving.



**FIGURE 6.** The proportion of solved examples in both textbooks (in %), that visualize the described problem.

The last phase of modelling, this is the stage of the model validation, is in solved tasks in both textbooks presented only for the sample (Figure 2). While in the textbook from Kladnik we found only one task where the model result is compared with the results of the experiment, there are five such cases in the second textbook, which, given the large number of solved tasks remains insignificant number. The fact that the model validation phase practically does not occur in the solved examples in textbooks, presents a serious problem, because students in assessing the correctness of a model when working with textbooks do recognise the value of an experiment. One of the reasons that the validation phase is in solved tasks very poorly represented is also that these tasks usually do not arise from the experiment, but from an already well-defined problem, where it is necessary to get the results of a mathematical model. For validation we need experimental results that can be compared with the results of the model, therefore, the writers of textbooks in the future should consider to involve a larger number of such examples, which are directly related to the experimentally obtained data.

#### IV. CONCLUSIONS

Setting up a mathematical model of a phenomenon and experimental verification of their validity are the main methods of science, so it is surprising that only in the last two decades the modelling is paving the way in the field of physics teaching. In obtaining an understanding of the modelling process and its importance for developing a conceptual understanding of physics, it is important that also solved examples in textbooks adequately represent all stages of model setup. In this paper we present an analysis of

solved tasks in the two most commonly used secondary school physics textbooks in Slovenia, where we focus on the different modelling stages and their representation in these tasks.

We have found that by far the most represented stage is model analysis, which is in line with expectations and one of the textbooks is even going so far that almost all solved tasks in it explicitly present this computational part of modelling. Model formulation stage is less represented. One of the reasons is because there are many quite trivial computational examples where the whole modelling process is not necessary. Model conceptualization stage is excluding the area of mechanics and thermodynamics in both analysed textbooks very poorly presented. While in the chapters of mechanics and thermodynamics in both textbooks there is about 10 % of solved tasks such that the models of the body and interactions are explicitly written down, in the remaining chapters there are only 3 % of such examples.

In this way, the students do not see the importance of idealizations and simplifications in physics problems solving, which is why they also have problems in understanding the limitations and validity of developed models. The last modelling stage is the key to validity of the model, so it is all the more important that students understand the importance of this stage. Last but not least, the modern science began only with Galileo, who realized the importance of systematic and rigorous experimentation for validation of hypotheses and arguments.

It is therefore all the more negative the fact that both analysed textbooks do not expose the importance of the validation of obtained results, because in the solved tasks we detected only a very limited sample of cases where the results are compared with the experimentally obtained values. If we want students to know and understand the importance of modelling and experimentation for the development of science and understanding of the world around us, it will be necessary that solved examples in textbooks equivalently show all the modelling stages. Future textbooks will have to adopt to that.

This study represents the first step towards gaining a better insight into the problems that students have in solving physical problems. In the future, it makes sense to upgrade it with a detailed analysis of performance in solving physics tasks on “matura” exam, which is the graduation exam in secondary school education in Slovenia. Then it will be possible to make a more detailed connection between representation of the modelling stages in solved examples in textbooks and knowledge of the students.

## REFERENCES

- [1] Freedman, R. A., *Challenges in Teaching and Learning Introductory Physics*, <<http://web.physics.ucsb.edu/~airboy/challenge.html>>, visited in November 20 (2014).  
[2] Osborne, J., and Collins, J., *Pupils' Views of the Role and Value of the Science Curriculum: a Focus group Study*, Int. J. Sci. Educ. **23**, 441-467 (2001).

- [3] Osborne, J., Simon, S., and Collins, S., *Attitudes towards science: a review of the literature and its implications*, Int. J. Sci. Educ. **25**, 1049-1079 (2003).  
[4] Osborne, J., and Dillon, J., *Science education in Europe: Critical reflections*, (Nuffield Foundation, London, 2008).  
[5] Haste, H., *Science in my future: a study of values and beliefs in relation to science and technology amongst 11 - 21 year olds*, (Nestle Social Research Programme, London, 2004).  
[6] Hribar, M., *Računske naloge pri pouku fizike*, Obzornik za matematiko in fiziko **39**, 113-116 (1992).  
[7] Schecker, H., *System Dynamics in High School Physics*. Proceedings of the 1994, International System Dynamics Conference, 74-84 (1994).  
[8] Raw, A. J., *Developing A-level physics student's mathematical skills – a way forward?*, Phys. Educ. **34**, 306-310 (1999).  
[9] McDermott, L. C., How we teach and how students learn. A mismatch?, *Am. J Phys.* **61**, 295-298 (1993).  
[10] McDermott, L. C., *Physics by Inquiry*, (John Wiley and Sons, New York, 1996).  
[11] Mazur, E., *Peer Instruction: A User's Manual*, (Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1997).  
[12] Sokoloff, D., and Thornton, R. K., *Interactive Learning Demonstrations*, (John Wiley and Sons, Hoboken, 2004).  
[13] Van Heuvelen, A., and Etkina, E., *The Physics – Active learning Guide*, (Pearson Education, San Francisco, 2006).  
[14] Hestenes, D., *Modeling methodology for physics teachers*, in *The Changing Role of the Physics Department in Modern Universities*, edited by Redish, E. and Rigden, J., American Institute of Physics, Woodbury, NY, 935-957 (1997).  
[15] Halloun, I. A., & Hestenes, D., *Modeling instruction in mechanics*, *Am. J Phys.* **55**, 455-462 (1987).  
[16] Wells, M., Hestenes, D., and Swackhamer, G., *A modeling method for high school physics instruction*, *Am. J Phys.* **63**, 606-619 (1995).  
[17] Constantinou, C. *The Cocoa Microworld as an Environment for Modeling Physical Phenomena*, *IJCELL* **9**, 201-213 (1999).  
[18] Angell C., Kind P. M., Henriksen E. K., and Guttersrud, O., *An empirical-mathematical modelling approach to upper secondary physics*, *Phys. Educ.* **43**, 256-264 (2008).  
[19] Chi, M.T.H., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P., & Glaser, R., *Self explanations: How students study and use*  
[20] VanLehn, K. *Analogy events: How examples are used during problem solving*, *Cogn. Sci.* **22**, 347-388 (1998).  
[21] Hannon, B. and Ruth, M., *Modeling Dynamic Biological Systems*, (Springer, New York, 1997).  
[22] Hannon, B. and Ruth, M., *Dynamic modeling*, (Springer, New York, 2001).  
[23] Ruth, M., Hannon, B., and Forrester, J. W., *Modeling Dynamic Economic Systems*, (Springer, New York, 1997).  
[24] Serman, D. J., *Business Dynamics : Systems Thinking and Modeling for a Complex World*, (Irwin McGraw-Hill, Boston, 2000).  
[25] Beaton, A. E., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Gonzalez, E. J., Smith, T. A. and Kelly, D. L., *Science achievement in the middle school years: IEA's Third International*

- Mathematics and Science Study*, (Boston College, Chestnut Hill, 1996).
- [26] Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Robitaille, D.F. and Foy, P., *TIMSS Advanced 2008 International Report: Findings from IEA's Study of Achievement in Advanced Mathematics and Physics in the Final Year of Secondary School*, (TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, Chestnut Hill, 2009).
- [27] Forjan, M. & Sliško, J., *Simplifications and Idealizations in High School Physics in Mechanics: A Study of Slovenian Curriculum And Textbooks*, Eur. J Phys. Educ. **5**, 20-31, (2014).
- [28] Gilbert, J. K. and Boulter, C. J., *Learning science through models and modelling*, in Fraser, B. J. and Tobin K. G., *International handbook of science education*, (Kluwer, Dordrecht, 1998), pp. 53–66.
- [29] Harrison, A. G. and Treagust, D., *Learning about atoms, molecules and chemical bonds: A case study of multiple model use in Grade 11 chemistry*, Sci. Educ. **84**, 352–381 (2000).
- [30] Gilbert, J. K., *Models and modelling: Routes to more authentic science education*, International Journal of Science and Mathematics Education **2**, 115-130 (2004).
- [31] Brewster, E., *Modeling instruction in introductory physics, examples in learning to solve problems*, Cognitive Sci. **13**, 145-182 (1989).
- [32] Viiri, J. E., Tolvanen, P., Planinšič, G. and Sliško J., *Student's ability to construct mathematical model*, Frontiers of physics Education: selected contributions, 380-385 (2008).
- [33] Hestenes, D. *Modeling Games in the Newtonian World*, Am. J Phys. **60**, 732-748 (1992).
- [34] Leisen, J., *Didaktische und methodische Aspekte beim Einsatz von Modellbildungssystemen*, Praxis der Naturwissenschaften Physik **48**, 1-3 (1999).
- [35] Etkina, E., Warren, A., & Gentile, M., *The Role of Models in Physics Instruction*, Phys. Teach. **44**, 34-39 (2006).
- [36] Roberts, N., Andersen, D., Deal, R., Garet, M. and Shaffer, W., *Introduction to Computer Simulation: A System Dynamics Modeling Approach*, (Pegasus Communications, Waltham, 1983).
- [37] Hestenes, D., *Toward a modeling theory of physics instructions*, Am. J Phys. **55**, 440-454 (1987).
- [38] Schecker, H., *Physik-Modellieren, Grafikorientierte Modellbildungssysteme im Physikunterricht*, (Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1998).
- [39] Richardson, G. P., and Pugh III, A. L., *Introduction to System Dynamics Modeling with DYNAMO*, (Pegasus Communications, Waltham, 1981).
- [40] Kladnik, R., *Gibanje, sila snov*, (DZS, Ljubljana, 2009).
- [41] Kladnik, R., *Energija, toplota, zvok, svetloba*, (DZS, Ljubljana, 2009).
- [42] Kladnik, R. (2010). *Svet elektronov in atomov*, (DZS, Ljubljana, 2010).
- [43] Mohorič, A., and Babič, V., *Fizika 1*, (Mladinska knjiga, Ljubljana, 2012).
- [44] Mohorič, A., and Babič, V., *Fizika 2*, (Mladinska knjiga, Ljubljana, 2013).
- [45] Mohorič, A., and Babič, V., *Fizika 3*, (Mladinska knjiga, Ljubljana, 2014).
- [46] Planinšič, G., Belina, R., Kukman, I. and Cvahte, M., *Učni načrt za fiziko*, [http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2008/programi/media/pdf/ucni\\_nacrti/UN\\_FIZIKA\\_strok\\_gimn.pdf](http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2008/programi/media/pdf/ucni_nacrti/UN_FIZIKA_strok_gimn.pdf), visited in November 23 (2014).

# Fibonacci's motion problem "Two travellers": The solutions given by junior high-school students who were trained for Mathematical Olympiad



**María Araceli Juárez Ramírez, Lidia Aurora Hernández Rebollar,  
Josip Slisko**

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma  
de Puebla, Avenida San Claudio,*

**E-mail:** josipslisko@cfm.buap.mx

(Received 30 June 2014, accepted 30 August 2014)

## Abstract

Numerical problems are today an important part of physics textbooks. One of the most popular motion problems is related to the situations in which two motions are combined. Although numerical problems appeared in physics textbooks in the middle of XIX century, a particular problem situation (combination of a motion at a constant speed and a motion at a constant acceleration) was present in mathematics textbooks since the beginning of the XIII. In the design of the research instrument we used the problem formulation proposed by Fibonacci in 1203 (the problem of two travellers). In this article we report performances of junior high-school students who participated in the training program for Mathematical Olympiad at the Facultad de Ciencias Físico Matemáticas of the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (Puebla, México). This initial qualitative study presents the results of the analysis of strategies students used in solving the problem of two travellers. Beside various acceptable solutions (some conceptually clearer than the solution given by Fibonacci!), we analyzed also the errors made by students in order to know how they understood the problem and how planned to solve it.

**Keywords** Fibonacci, gifted students, problem solving.

## Resumen

Problemas numéricos son hoy una parte importante de los libros de texto de física. Uno de los más populares problemas de movimiento está relacionado con la situación en que se combinan dos movimientos. Aunque problemas numéricos aparecieron en los libros de texto de física en la mitad del siglo XIX, una particular situación de problema (la combinación de un movimiento a velocidad constante con uno a aceleración constante) era presente en los libros de texto de matemática desde el principio del siglo XIII. En el diseño del instrumento de investigación hemos usado la formulación propuesta por Fibonacci en 1203 (el problema de dos viajeros). En este artículo reportamos el desempeño de alumnos de secundaria que participaban en el programa de entrenamientos para la olimpiada de matemáticas en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Este inicial estudio cualitativo presenta los resultados del análisis de las estrategias que utilizaron estudiantes al resolver el problema de dos viajeros. Aparte de soluciones aceptables (algunas ¡conceptualmente más claras que la solución dada por Fibonacci!), hemos analizados también los errores que estos estudiantes cometieron para conocer cómo ellos interpretaron el problema y cómo planeaban su solución.

**Palabras claves** Fibonacci, estudiantes talentosos, resolución de problemas.

**PACS:** 01.40.Fk, 01.40.E-

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCTION

Today numerical problems or end-of-chapter problems are an important part of physics textbooks, especially at the university level. It is generally believed that enough practice in solving them is the best way to get conceptual understanding of physics.

Basic mathematical structure and solving algorithm of many of these problems are repeated in textbooks, although their particular wordings and contextual make-ups may differ

greatly to avoid plagiarism flavor or to show author's creativity in problem formulations.

Having so many numerical problems in today's physics textbooks, it is hard to imagine that they were introduced in these teaching and learning tools in the middle of the XIX century. This new textbook element appeared for the first time in the edition of the influential Ganot's textbook "*Traite élémentaire du physique*", published in 1854 [1].

In the XIII edition, published in 1868, the number of problems, covering all domains of physics was, measured by today's standards, very modest: only 103 problems were

included [2]. Almost all problems were direct applications of mathematical formulas expressing quantitatively physics concepts and experimental laws, without inclusion of any real-world context. If a context was mentioned, it was quite artificial, calculation-oriented or even absurd from the common point of view.

Here come only a few examples.

The Problem XXI [2, p. 907] is related to a conical champagne glass with diameter of 6 cm. It was supposed that mercury, water and oil were poured in the glass, having each one a depth of 5 cm. The task was to calculate the masses of all three liquids.

Another version of this situation is the problem XXXI [2 p. 909]. In a conical champagne glass with diameter of 8 cm and the inner depth of 12 cm, this time only mercury and water are poured in such a peculiar way that the mass of mercury resulted three times bigger than the mass of water. The task was to calculate the heights of mercury and water.

In the Problem IX [p. 903], the weights of a sphere made of platinum were given for being in the air and for being immersed in mercury. The task was to find the density of platinum.

It is important note that there was no single problem on motion included in the Ganot's collection.

The other French authors followed Ganot and very soon numerical problems became standard part of physics textbooks. For instance, in the elementary physics textbook, written by Boutan and D'Almeida and published in 1874 [3], there were 294 numerical problems. That number is more than twice bigger than the number of physics problems found in Ganot's textbook published only six years earlier.

Collections of physics problems gained popularity in USA, in order to complement existing textbooks with a few or none physics problems. In his "Examples in Physics" [4], Jones presented over thousand problems. Nevertheless, there was only one kinematics problem out of 183 mechanics examples.

A similar situation is noted in Gage's "1000 Exercises in Physics" [5], too. There were a few motion problems, mostly related to those caused by gravitation (free-fall and parabolic motion).

Problems that deal with the situations in that motions of two bodies are assumed, like one of which was used in the research whose results are reported in this article, appeared very rarely. Snyder and Palmer, in their collection "One Thousand Problems in Physics" [6], formulated only two problems planned for the motions of two bodies in free fall that were dropped to fall freely from the same point.

In one problem, students know difference between starting times and their task is to find the time for which the distance between the bodies would take a given value [6, Problem 40, p. 40]. In the other problem, the time in which the distance took a particular value was given and the difference between starting times was sought [6, Problem 41, p. 41].

Shearer, in a collection of 1,497 problems [7], also formulated only two problems that deal with two moving object (two trains). In one, the task is to calculate relative velocities of trains' performing one-dimensional motions in the same and opposite directions [7, Problem 61, p. 26], while

in the other, relative trains' distance in two-dimensional motion is sought [7, Problem 62, p. 27].

## II. TWO-MOTION PROBLEMS IN ACTUAL PHYSICS TEXTBOOKS

Although the problem and task designs, based on abstract formula-based "application" or related to absurd contexts started with Ganot's problems, are still present in contemporary physics textbooks, many authors try to formulate problems for those situations that might, in principle, happen in the real world.

Good examples of such type of problems are two-motion problems that were absent or rarely formulated in textbooks and problems collections at the end of XIX and the beginning of XX century.

A two-motion problem is the problem related to a situation in that two motions are present. It may be, for instance, a race of two persons or two cars. Involved motions, of course, may have different features (fixed or situation-dependent length of the race, start times, the ways the persons or cars move,...).

Two formulations of race problems are:

*Constant-acceleration race, determined length and different starting positions*

"A Porsche challenges a Honda to a 400-m race. Because the Porsche's acceleration  $3.5 \text{ m/s}^2$  is larger than the Honda's  $3.0 \text{ m/s}^2$ , the Honda gets a 50-m head start. Both cars start accelerating at the same instant. Who wins?" [8, Problem 70, p. 76]

*Constant-speed race, undetermined length and different starting positions*

"Two cars, a Porsche and a Honda, are traveling in the direction, although the Porsche is 186 m behind the Honda. The speed of the Porsche is 24.4 m/s and the speed of the Honda is 18.6 m/s. How much time does it take for the Porsche to catch the Honda? [Hint: What must be true about the displacements of the two cars when they meet?]" [9, Problem 1, p. 95]

The most popular two-motion problems in physics textbooks are those related to well-known situation in that a police office is chasing a driver who broke the speed limit. In solved examples, it is usually supposed that (1) the speeder drives at a constant speed, and (2) the police officer starts from the rest and maintains a constant acceleration:

"A speeder doing 40.0 mi/h (about 17.9 m/s) in a 25 mi/h zone approaches a parked police car. The instant the speeder passes the police car, the police begin their pursuit. If the speeder maintains a constant velocity, and the police car accelerates with a constant acceleration of  $4.50 \text{ m/s}^2$ , (a) how long does it take for the police car to catch the speeder, (b) how far have the two cars traveled in this time, and (c) what was the velocity of the police car when it catches the speeder?" [10, Example 2-9 **Catching a Speeder**, p. 36]

"A motorist traveling at a constant velocity of 15 m/s passes a school-crossing corner where the speed limit is 10 m/s (about 22 mi/h). A police officer on a motorcycle stopped at the corner starts off in pursuit with constant

acceleration of  $3.0 \text{ m/s}^2$ ... (a) How much time elapses before the officer catches up with the car? (b) What is the officer's speed at that point? (c) What is the total distance the officer has traveled at that point?" [11, Example 2.9 Pursuit!, p. 47]

In order to be original, it is common that textbook authors vary the relationship between given and sought data. Here come a few possible variants of the problem:

*Constant speed and catching distance are given and constant acceleration is sought* [12, Problem 31, p. 54]

*Constant speed and constant acceleration are given and catching time, final speed and catching distance are sought* [13, Problem 60, p. 55]

*Constant acceleration and catching time are given and constant speed is sought* [14, Problem 2.49, p. 59]

In all previous situations, police officers started from the rest. Nevertheless, there are textbook authors who think that chasing situation would be more realistic (or mathematically interesting), if the police car were in motion, either in the same direction [15, Problem 3.64, p. 42] or, even, in the opposite direction [16, Problem 62, p. 81]

Although one could cite more complicated (and, in real world less likely!) situations that are assumed by authors for two-motion problems, it is out of the scope and objectives of this article to go any further into discussion of the practices and learning implications of pursuit problems found in physics textbooks.

### III. MOTION PROBLEMS IN FIBONACCI'S BOOK

Taking into account historic fact that the first textbooks and collections of physics problems were almost without two-motion problems, it is surprising to learn that Fibonacci included a few two-motion problems in his, ground-breaking book "*Liber Abaci*", in which Arabic numbers were introduced in European mathematics and whose first edition was published in 1203! In the Chapter XII of that book, whose first English translation appeared eight centuries later, in 2003 [17], it is possible to read these two-motion problems:

#### *"On Two Ships That Meet*

Two ships are some distance apart, which journey the first can complete in 5 days, the other in 7 days; it is sought in how many days they will meet if they begin the journey at the same day." [17, p. 280]

#### *"On Two Ants, One of Which Follows the Other*

Two ants are on the ground 100 paces apart, and they move in the same directions towards a single point; the first of them advances daily  $1/3$  of a pace and retreats  $1/4$ ; the other advances  $1/5$  and retreats  $1/6$ ; it is sought in how many days they will meet." [17, p. 280]

#### *"On Two Serpents*

... There is a serpent at the base of a tower that is 100 palms high, and he ascends daily  $1/3$  of a palm, and he descends daily  $1/4$ . At the top of the tower there truly is another serpent who descends daily  $1/5$  of a palm, and ascends  $1/6$ ; it is sought in how many days they will meet in the tower." [17, p. 274]

The second and third problem shows clearly that fantastic contexts, impossible in real world but with supposed "appealing" mathematical properties, were introduced into and made common in mathematics teaching many centuries before they appeared in physics textbooks.

One of a few two-motion problems, used in this study, has the following formulation:

#### *"On Two Travellers, One of Whom Goes after the Other with and Increasing Pace*

... There are two men who propose to go on a long journey, and one will go 20 miles daily. The other truly goes 1 mile the first day, 2 second, 3 third, and so on always one more mile daily to the end when they meet; it is sought for how many days the first is followed..." [17, p. 261]

Fibonacci presented the solution of the problem by these considerations:

"(It) is found thus: namely, when the 20 is doubled there results 40 from which you subtract 1; there remains 39, and this amount of days he is followed; he who goes daily 20 miles goes in these days 39 days 20 times 39 miles, which make 780 miles. The other man truly in the same 39 days goes as many miles as are in the sum of the numbers which run from one up to 39, which sum is found similarly from the multiplication of the 20 by the 39." [17, p. 261].

Although numerically the solution given by Fibonacci is correct, it is not justified clearly why, in order to get it, one has to double the 20 days and then to subtract one day.

An additional version of the "two-traveller problem" and its solution are:

"... One goes daily 60 miles, and the other truly goes with an increase of three, that is in the first day 3 miles, in the second 6, in the third 9, and so forth..."

"... You divide 60 by 3, there will be 20 that you double, there will be 40 from which you subtract one; there remains 39, and for this amount of days he will follow..." [17, p. 262]

Looking at the solution, it is possible to conclude that Fibonacci had the following idea:

To find the number  $n$  of days in which the paces became equal, one should divide the constant pace of the first traveller with the daily pace increment of the second traveller. The number  $N = 2n - 1$  is then the number of days the second traveller needs to reach the first one.

Conceptually more transparent reason of this "correct" algorithm would be to say:

The distance deficit, accumulated in the first  $(n-1)$  days before the paces become equal in the  $n$ -th day, would be compensated if, after the  $n$ -th day, the second man travels  $(n-1)$  days more. So, the solution would be, again,  $(2n - 1)$  days, but it comes out from a meaningful summa [ $n$  days +  $(n - 1)$  days =  $(2n - 1)$  days] and not from a conceptually opaque combination of a multiplication and a subtraction.

#### IV. THE SAMPLE OF STUDENTS AND THE DATA-COLLECTING INSTRUMENT

The data-collection instrument in this research was given to 44 junior high-school students, who participated in the training for mathematical Olympiad for that level at the Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Mexico) in March of 2014. Students' ages were between 12 y 15 years.

All students accepted to participate and to do the tasks that form part of the instrument. They agreed that the parts of their individual works might be used anonymously as research data in conference contributions and scientific journal publications.

The structure of the instrument was partially inspired by the well know problem-solving steps proposed by George Polya [18]: 1. Understanding problem; 2. Devising a plan; 3. Carrying out the plan; 4. Looking back.

The idea behind was to explore what students would do if asked explicitly to follow these expert-like problem-solving steps. Namely, neither Mexican mathematics curriculum nor mathematics textbooks for junior high school promote them. The text of the data-collecting instrument is given in the **BOX 1**.

##### Two travellers

"There are two men who propose to go on a long journey, and one will go 20 miles daily. The other truly goes 1 mile the first day, 2 miles second, 3 miles third, and so on, always one more mile daily to the end when they meet. How many days does a second man need to reach the first one?"

- Describe only in words (without using formulas or mathematical expressions) the plan you have to solve the problem.
- Carry out the plan mathematically.
- Your solution is: The second traveller reaches the first one after \_\_\_\_\_ days.
- Show below that your solution is correct.

**BOX 1.** The text of the data-collecting instrument used in this research.

#### V. THE RESULTS

From 44 students, who presented their solutions, 12 solved the problem correctly, obtaining the solution of 39 days.

Some students used only "pure" solution strategies:

- Algebraic equation containing Gauss' formula;
- Making a table;
- Looking for sums that are multiple of 20;
- Looking for a simple pattern.

Others used "mixed" solution strategies, that were a combination of "pure" ones:

- Table and equation;
- Table and "trial and error"; and
- Equation and "trial and error".

##### A. Correct solutions

A few examples of "pure" strategies are:

(1) Algebraic equation containing the formula of Gauss (Student 18)

a. The plan of this student is: "Firstly, the second traveller make an increment of one meter (instead of one mile!) and goes according the number of days, and the first advances the same distance. Finding the distances could be this way:  $20n$  for the first traveller and  $n(n+1)/2$  for the second.

b. Mathematical execution of the plan:

$$\begin{aligned} 20n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 40n &= n(n+1) \\ 40n &= n^2 + n \\ 39n &= n^2 \\ 39 &= \frac{n^2}{n} \end{aligned}$$

c. The given solution is 39 days.

d. In the procedure to demonstrate that the solution is correct, the students wrote:

$$\begin{aligned} 20 \times 39 &= 180 + 600 = 780 & \frac{39(39+1)}{2} &= \frac{1560}{2} = 780 \\ & & 780 &= 780 \end{aligned}$$

**Comment:** This student, from the beginning, makes the plan to solve the problem using algebraic equation. It was a great pleasure for involved researchers to find out that junior high-school students carried out something what Fibonacci himself was not able to do because algebraic procedures were not common for him. Fibonacci knew how to find the sum of consecutive numbers when the last one is determined (the product of the last and the half of the sum of the last and the first) [17, pp. 259 - 261].

(2) Making a Table (Student 43)

a. The solution plan of this student is:

"(I will) make a table to compare the journey of both men."

b. Mathematical execution of the plan was the following table.

Day	Man 1	Man 2	Day	Man 1	Man 2
1	20	1	21	420	231
2	40	3	22	440	253
3	60	6	23	460	276
4	80	10	24	480	300
5	100	15	25	500	325
6	120	21	26	520	351
7	140	28	27	540	378
8	160	36	28	560	406
9	180	45	29	580	435
10	200	55	30	600	465
11	220	66	31	620	496
12	240	78	32	640	528
13	260	91	33	660	561
14	280	105	34	680	595
15	300	120	35	700	630
16	320	136	36	720	666
17	340	153	37	740	703
18	360	171	38	760	741
19	380	190	39	<b>780</b>	<b>780</b>
20	400	210			

c. The given solution was “39 days”.

d. There is no verification of the result.

**Comment:** Elaborated table is totally complete. The operations were not given. So, it is not possible to know if the student knows or doesn't know the formula of Gauss.

(3) Looking for sums that are multiple of 20 (Student 19)

a. The plan “Firstly, I will find the sums of the consecutive numbers and will see if the result is a multiple of 20. After that I will count the days.”

b. Although there are not verbal comments, it is possible to conclude that the student discovered a rule for calculating the distances covered in five consecutive days. Every next partial sum is bigger for 25:

$$1+2+3+4+5=15$$

$$6+7+8+9+10=40$$

$$11+12+13+14+15=65$$

$$16+17+18+19+20=90$$

$$21+22+23+24+25=115$$

$$26+27+28+29+30=140$$

$$31+32+33+34+35=165$$

$$36+37+38+39=150$$

The students does not justify why in the last sum only 4 days are taken.

In the next moves, the students find higher partial sums and the final sum:

$$15+40+65=120$$

$$120+90+115=210+115=325$$

$$325+140=465$$

$$465+165=630$$

$$630+150=780$$

The only two sums that satisfy the sought condition are 120 (for 15 days of traveling) and 780 (for 39 days of traveling). As  $15 \times 20$  is 300, a number that is not equal to 120, the solution is 39 days ( $39 \times 20 = 780$ ).

c. The given solution is 39 days.

d. In order to demonstrate that the solution is correct, the students wrote:

$$39 \times 20 = 780 \text{ The traveller who walks 20 miles daily.}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{39(40)}{2} = 780 \text{ The traveller who makes one more mile daily.}$$

**Comment:** This student uses the algebraic formula of Gauss only in the last part. At the beginning, the plan is to add the distances traveled by the second man and looking for those that are multiples of 20.

(4.1) Looking for a simple pattern (Student 37)

a. The plan: “Write what the second travels and note that, as his pace increases, some day he will reach the first and note that what was the advantage (of the first) is equal what was the incremented.”

b. Carrying out mathematically the plan, the student writes: “Let us note that, in the first 20 days, the first traveler traveled  $20^2 = 400$  and the second  $(20)(21)/2 = 210$ . It means that the advantage was 190 miles. In the next days, the second traveler travels more miles. Then, the quantity that made less in the

first 19 days is equal to the miles that will make more in the next 19 days. Thus, the answer is

$$(19 \times 2) + 1 = 38 + 1 = 39”.$$

c. The solution is 39 days.

d. Demonstrating that the solution is correct, the student writes:

The first traveler travels  $20 \times 39 = 780$  and the second  $39 \times 40 / 2 = 780$ .

**Comment:** Although the student knows the formula of Gauss, she or he is able to recognize the simple problem pattern that the accumulated advantage of the first traveler in the first 19 days will be compensate by summing the advantages the second traveler will make in 19 days after the 20th day. Such a clearly expressed conceptual insight into the problem pattern was missing in the solutions of Fibonacci.

(4.2) Looking for a simple pattern (Student 32)

a. Instead of a plan, the student states the basic feature of the problem: “At the beginning the first has an advantage, but later the second is going to walk more than before and will compensate that advantage.”

b. Representing that feature, the student wrote:

“Day	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>
1	20	20-19
2	20	20-18
3	20	20-17
.		
19	20	20-1
20	20	20
21	20	20+1
22	20	20+2
.		
39	20	20+19.”

c. The given solution is 39 days.

d. The demonstration, that the solution is correct, goes like this:

$$“T_1 = 39(20) = 780$$

$$T_2 = 39(20) +$$

$$+ (+19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$$

$$+ (-19 - 18-17-16 -15 -14 -13 -12 - 11- 10 -9-8-7- 6- 5 -4- 3-2-1) =$$

$$= 39(20) + (0) + \dots + (0) = 780.”$$

**Comment:** This student also got from the beginning the right insight into the symmetric problem pattern, something what Fibonacci could not get.

**B. Most common errors revealed by the students**

The most common failure in students' performances was misunderstanding of the problems announcement “The other truly goes 1 mile the first day, 2 mile second, 3 mile third, and so on...”. They interpreted that the distances were note those walked daily, but those accumulated distance from the first day. In other words, these students interpreted that the second traveler always travels only one mile daily. Consequently,



María Araceli Juárez Ramírez, Lidia Aurora Hernández Rebollar, Josip Slisko

[13] Serway, R. A. & Beichner, R. J., *Physics for Scientists and Engineers*, Fifth Edition, (Saunders College Publishing, Fort Worth, TX, 2000).

[14] Jones, E. & Childers, R., *Contemporary College Physics*, Third edition, (WCB/McGraw-Hill, Boston, 1999).

[15] Sanny, J. & Moebs, W., *University Physics*. (Wm. C. Brown Publisher, Dubuque, IA, 1996).

[16] Lea, S. M. & Burke, J. R., *Physics. The Nature of Things. Annotated Instructor's Edition*, (Books/Cole Publishing

Company & West Publishing Company, Pacific Grove, CA, 1997).

[17] Fibonacci, *Fibonacci's Liber Abaci. Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Translated by L. E. Sigler, (Springer-Verlag, New York: 2003).

[18] Polya, G., *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. (Princeton University Press, Princeton, 1945).

# A brief review of the relevant dielectric theories of solids



Suresh Sagadevan<sup>\*a</sup>, A. Shanmuga Sundaram<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Department of Physics, Sree Sastha Institute of Engineering and Technology, Chembarambakkam, Chennai-600 123, India.

<sup>b</sup>Department of Mechanical Engineering, Sree Sastha Institute of Engineering and Technology, Chembarambakkam, Chennai-600 123, India.

E-mail: sureshsagadevan@gmail.com

## Abstract

The purpose of the present paper is to outline in qualitative terms, the way in which the dielectric constant varies with frequency and temperature, and to indicate the type of information regarding the structure of materials which can be obtained from the study of the dielectric constant. The various types of polarizations, which have been demonstrated to exist, are listed, together with an outline of their characteristics. The development of the dielectric theory in recent years has been along such specialized lines that there is a need for some correlation between the newer and the older theories of dielectric behavior to keep clear what is common to both, though sometimes expressed in different terms. The theoretical concept of the dielectric constant ( $\epsilon$ ), which is an important dielectric property of matter, has been discussed by Clausius-Mossotti, Debye, Onsager.

**Keywords:** Dielectric constant, Dielectric loss, Clausius-Mossotti, Debye, Onsager.

## Resumen

El propósito del presente trabajo es describir en términos cualitativos, la forma en que la constante dieléctrica varía con la frecuencia y la temperatura, y para indicar el tipo de información con respecto a la estructura de los materiales que se pueden obtener a partir del estudio de la constante dieléctrica. Se listan los distintos tipos de polarización, que se han demostrado que existen, junto con una descripción de sus características. El desarrollo de la teoría del dieléctrico en los últimos años ha sido a lo largo de líneas especializadas en las que hay necesidad de una cierta correlación entre la más nuevas teorías y las antiguas del comportamiento dieléctrico para mantenerse separado lo que es común a ambas, aunque a veces se expresa en términos diferentes. El concepto teórico de la constante dieléctrica ( $\epsilon$ ), que es una propiedad importante de la materia dieléctrica, ha sido discutido por Clausius-Mossotti, Debye, Onsager.

**Palabras clave:** Constante dieléctrica, pérdida dieléctrica, Clausius-Mossotti, Debye, Onsager.

**PACS:** 61.05Cp, 77.22.-d

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCTION

In order to understand the dielectric *behaviour* of substances in the solid state, one has to essentially go through the conceptual background of the necessary theories of dielectric solids. The state of aggregation of molecules in a continuum depends on the type of chemical bond, molecular geometry, mutual *effect* between atomic groups, nature of complexes etc. A system of electric charges of molecules in the neighbourhood is involved in the process of molecular interactions. The spatial arrangement of the electrically charged atoms and molecules in the system is perturbed by the influence of physical conditions. These facts on the basis of certain theories, describe the bulk. Properties of the substances that exist in a physical state. Mostly the dielectric properties are described in terms of the **dielectric permittivity** and molecular dipole moments of the substances in local and non-local fields. The dielectric permittivity, often

called the **dielectric constant**, is a characteristic measurable quantity. The molecular dipole moment measured from the dielectric constant of the bulk material depends on the interaction with its neighbour and hence gives valuable information about the molecular structure. The dielectric constant depends on how polarizable a material is and the frequency of the applied field. The fall of polarizability is related to the decrease of the dielectric constant and the occurrence of the absorption of electrical energy constituting dielectric dispersion. This behaviour is shown by the frequency dependent **dielectric loss**.

Electrical insulator materials, which will prevent the flow of current in an electrical circuit, have been used since from the beginning of the science and technology of electrical phenomena. Dielectrics are insulating materials that exhibit the property of electrical polarization; thereby they modify the dielectric function of a vacuum. The first capacitor was constructed by Cunaeus and Mussachenbroek in 1745, which

was known as the Leyden jar [1]. But there were no studies about the properties of insulating materials until 1837. Faraday published the first numerical measurements on these materials, which he called dielectrics [2]. He has found that the capacity of a condenser was dependent on the nature of the material separating the conducting surface. This discovery encouraged further empirical studies of insulating materials, aimed at maximizing the amount of charge that can be stored by a capacitor. Throughout most of the 19<sup>th</sup> century, scientists searching for insulating materials for specific applications have become increasingly concerned with the detailed physical mechanism governing the behavior of these materials. In contrast to the insulation aspect, the dielectric phenomena have become more general and fundamental, as they originate from dielectric polarization.

Mossotti [3, 4] and Clausius [5] have done a systematic investigation about the dielectric properties of materials. They attempted to correlate the specific inductive capacity, a macroscopic characteristic of the insulator introduced by Faraday [2] which is now popularly termed as the dielectric constant with the microscopic structure of the material. Following Faraday in considering the dielectrics to be composed of conducting spheres in a non-conducting medium, Clausius and Mossotti succeeded in deriving a relation between the real part of the dielectric constant  $\epsilon_r$  and the volume fraction occupied by the conducting particles in the dielectric. In the beginning of the 20th century, Debye [6] realized that some molecules had permanent electric dipole moments associated with them, and this molecular dipole moment is responsible for the macroscopic dielectric properties of such materials. Debye succeeded in extending the Clausius -Mossotti theory to take into account the permanent moments of the molecules, which allowed him and others to calculate the molecular dipole moment from the measurement of the dielectric constant. His theory was later extended by Onsager [7] and Kirkwood [8, 9], and is in excellent agreement with the experimental results for most of the polar liquids. Debye's other major contribution to the theory of dielectrics is his application of the concept of permanent molecular dipole moment to explain the anomalous dispersion of the dielectric constant observed by Drude [10]. For an alternating field, Debye deduced that the time lag between the average orientation of moments and the field becomes noticeable, when the frequency of the field is within the same order of magnitude as the reciprocal relaxation time. In this way the molecular relaxation process leads to the macroscopic phenomenon of dielectric relaxation, i.e., the anomalous dispersion of the dielectric constant and the accompanying absorption of electromagnetic energy over a certain range of frequencies.

Debye's theory shows excellent agreement with the experiments for the polar liquids, while the dielectric behaviour for solids was found to deviate considerably. Several modifications and extensions of Debye's theory have been proposed to correct this. There are two major approaches in the extension of Debye's theory. The first approach, pioneered by Cole [11], Davidson [12] and William [13], interprets the non -Debye relaxation behavior of the material in terms of the superposition of an

exponentially relaxing process, which then leads to the distribution of relaxation times. The second approach by Joncher [14] proposes that the relaxation behaviour at the molecular level is intrinsically non-Debye-like due to the cooperative molecular motions.

After more than eighty years of development, the theory of dielectrics is still an active area for research. Understanding the behaviour of dielectric materials with the variations of field, temperature and frequency is of particular importance for present day electronics. Modern day electronics demand dielectric materials with narrowly defined properties tailored for particular applications. The scaling of metal-oxide-semiconductor (MOS) devices for ultra large-scale integration (ULSI) applications has been placing an ever increasing burden upon the performance of gate dielectrics [15]. Durability has become an issue as the dielectric thickness is decreased leading to a search for dielectrics with better properties than the conventional SiO<sub>2</sub> dielectric. The gallium arsenide (GaAs) based metal - insulator- semiconductor field effect transistor (MISFET) is still largely unavailable, due to the lack of a suitable dielectric material for the insulation layer [16].

Recent advances in wireless communication technologies have elevated the interest in materials with the unusual combination of properties like high dielectric constant, low dielectric loss and low values of temperature dependence of the dielectric constant [17]. The constant need for miniaturization provides the continuing driving force for the discovery and development of increasingly sophisticated materials to perform the same or improved functions with decreased size and weight. The dielectric materials mentioned above are used as the basis for resonators and filters for the microwaves carrying the desired information [18]. These materials are presently employed as bulk ceramics in microwave communication devices. This paper gives a qualitative account of the way in which dielectric properties and the behaviour of solid materials will be necessary to use some kind of theory to represent the dielectrics solids.

## II. THEORIES OF DIELECTRICS

This section presents a brief description of the atomic interpretation of the dielectric and optical properties of insulator materials, on the basis of the classical theory. This section is essentially concerned with the static dielectric constant, the frequency dependence of the dielectric constant and dielectric losses.

### A. Electric susceptibility and permittivity

It was Michael Faraday who first noticed, that when a capacitor of value  $C_0$  under vacuum is filled with a dielectric material, its charge storage capacity (capacitance) increases to a value of  $C$ . The ratio  $\chi'$  of the increase of capacitance  $\Delta C = C - C_0$  to its initial capacitance-  $C_0$ ,

$$\chi' = \frac{C - C_0}{C} = \frac{\Delta C}{C_0}, \quad (1)$$

$\chi'$  is called the electrical susceptibility of the dielectric. The most often used terminology is the dielectric permittivity or dielectric constant instead of susceptibility, which is defined as the ratio of the capacitance  $C$  of the capacitor filled with a dielectric to the value  $C_0$  of the same capacitor under vacuum.

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}. \quad (2)$$

From the above equations the relationship between the electric susceptibility and the dielectric permittivity is given as:

$$\chi' = \epsilon_r - 1. \quad (3)$$

Thus, by definition, the electric susceptibility and permittivity are non-dimensional real quantities. The dielectric constant or permittivity of a material is the measure of the extent to which the electric charge distribution in the material can be distorted or polarized by the application of an electric field.

## B. Mechanism of electric polarization

At the atomic level, all matter consists ultimately of positively and negatively charged particles, whose charges balance each other macroscopically in the absence of an electric field, giving rise to an overall charge neutrality. Once the electric field is applied, the balances of charges are perturbed by the following four basic polarization mechanisms [19].

**Electronic polarization:** It occurs in neutral atoms when an electric field displaces the nucleus with respect to the negative charge. Thus electronic polarization is an induced polarization effect.

**Atomic/ionic polarization:** It is observed when different atoms that comprise a molecule share their electrons asymmetrically, and cause the electron cloud to be shifted towards the stronger binding atom, the atoms acquire charges of opposite polarity and an external field acting on these net charges tends to change the equilibrium positions of the atoms themselves, leading to atomic polarization.

**Dipolar/orientational polarization:** When an ionic bond is formed between two molecules by the transfer of some valence electrons, a permanent dipole moment will originate in them. This permanent dipole moment is equal to the product of the charges of the transferred valence electrons, and the inter-atomic distance between them. In the presence of an electric field  $E$ , the molecules carrying a permanent dipole moment will orient to align along the direction of the electric field  $E$ . This process is called the dipolar or orientational polarization. This occurs only in dipolar materials possessing permanent dipole moments.

**Space charge polarization:** It is present in dielectric materials which contain charge carriers that can migrate for some distance through the bulk of the material (via diffusion, fast ionic conduction or hopping, etc.) thus creating a macroscopic field distortion. Such a distortion appears to an outside observer as an increase in the capacitance of the sample and may be indistinguishable from the real rise of the dielectric permittivity. Space charge polarization is the only type of electrical polarization that is accompanied by a macroscopic charge transport (and in the case when the migrating charge carriers are ions a macroscopic mass transport as well). In general, space charge polarizations can be grouped into hopping polarization and interfacial polarization. In dielectric materials, localized charges (ions and vacancies, or electrons and holes) can hop from one site to another, which creates the hopping polarization. Similarly, the separation of the mobile positive and negative charges under an electric field can produce an interfacial polarization.

## C. Polarization and dielectric constant

The ability of a dielectric material to store electric energy under the influence of an electric field, results from the field-induced separation and alignment of electric charges. Polarization occurs when the electric field causes a separation of the positive and negative charges in the material. The larger the dipole moment arms of this charge separation in the direction of a field and the larger the number of these dipoles, the higher the material's dielectric permittivity. In the presence of electronic, ionic and dipolar polarization mechanisms, the average induced dipole moment per molecule  $P_{av}$  will be the sum of all the contributions in terms of the local field (effective field) acting on each individual molecule.

$$P_{av} = \alpha_e E_{loc} + \alpha_i E_{loc} + \alpha_d E_{loc}. \quad (4)$$

Here,  $\alpha_e$ ,  $\alpha_i$ ,  $\alpha_d$  are the electronic, ionic and dipolar polarizabilities.  $E_{loc}$  is the local field or the effective field at the site of an individual molecule that causes the individual polarization. Each effect adds linearly to the net dipole moment of the molecule. Interfacial polarization cannot be simply added to the total polarization as  $\alpha_{ij} E_{loc}$ , because it occurs at the interfaces and cannot be put into an average polarization per molecule in the bulk. Moreover, the fields are not well defined at the interfaces.

For simple dielectrics (eg. gases) one can take the local field to be the same as the macroscopic field. This means that  $E_{loc} = E$  the applied field, and therefore the polarization is,

$$P = \chi_e \epsilon_e E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E, \quad (5)$$

$P = N \cdot P_{av}$  where  $N$  is the number of atoms or molecule per unit volume [20].

$$\epsilon_r = 1 + N\alpha / \epsilon_0, \quad (6)$$

$\alpha$  is the polarizability of the molecule.

#### D. Clausius and Mossotti relation for dielectric permittivity

Consider a molecule of a dielectric medium situated in a uniform electric field  $E$ . The total electric field acting on this molecule  $E_{loc}$  will have three main components-  $E_1$ ,  $E_2$ , and  $E_3$ . Here  $E_1$  is the applied electric field  $E$ ,  $E_2$  is the field from the free ends of the dipole chain, and  $E_3$  is the near field arising from the individual molecular interactions. In solids we have to consider the actual effective field acting on a molecule in order to estimate the dielectric permittivity. For electronic and ionic polarization, the local field for cubic crystals and isotropic liquids can be given by the Lorentz field, as

$$E_{loc} = \frac{1}{3\epsilon_0} P. \quad (7)$$

By assuming that the near field  $E_3$  is zero, Clausius and Mossotti derived a relation for the dielectric constant of a material under electronic and ionic polarization [21].

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} (N_i \alpha_i + N_e \alpha_e). \quad (8)$$

Here,  $\epsilon_r$  is the relative permittivity at low frequencies,  $\alpha_i$  is the effective ionic polarizability per ion pair,  $N_i$  is the number of ions pair per unit volume,  $\alpha_e$  is the electronic polarizability and  $N_e$  is the number of ions (or atoms) per unit volume exhibiting electronic polarization. The atomic/ionic polarizability  $\alpha_i$  and the electronic polarizability  $\alpha_e$  cannot be separated at low frequencies, and hence, they are represented together as the induced polarizability  $\alpha_{ind}$ . Hence, equation 8 can be written as:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} (N_m \alpha_{ind}). \quad (9)$$

This is known as the Clausius – Mossotti equation for non polar dielectrics. Above the frequencies of ionic polarization relaxation, only electronic polarization will contribute to the relative permittivity, which will be lowered to  $\epsilon_{r\infty}$  (relative permittivity at optical frequencies).

$$\frac{\epsilon_{r\infty} - 1}{\epsilon_{r\infty} + 2} = \frac{N_e \alpha_e}{3\epsilon_0}. \quad (10)$$

By using the Maxwell relation for a lossless (non-absorbing), non magnetic medium,

$$n^2 = \epsilon_{r\infty}, \quad (11)$$

where  $n$  is the index of refraction of the material, equation (10) can be rewritten as:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N_e \alpha_e}{3\epsilon_0}. \quad (12)$$

In this form, it is known as the Lorentz-Lorenz equation. It can be used to approximate the static dielectric constant  $\epsilon_r$  of non polar and non magnetic materials from their optical properties. In the case of dipolar materials we cannot use the simple Lorentz field approximation, and hence the Clausius–Mossotti equation cannot be used in the case of dipolar materials.

#### D. Debye theory for polar dielectrics

In addition to the induced polarization present in all dielectrics, the polar dielectrics possess an orientational polarization that exists even in the absence of an applied electric field. It should be noted that the polarizability  $\alpha_o$  corresponding to the orientational polarization is related to the orientation of the molecules, which are heavier than atoms or electrons that are involved in induced polarization. Hence, the  $\alpha_o$  contributes to the total molecular polarizability  $\alpha$ , at much lower frequencies than  $\alpha_{ind}$  does. So the dielectric constant that remains after the relaxation of the orientationally polarization (the dielectric constant due to the induced polarization) can be designated separately, and it is usually represented by  $\epsilon_\infty$  in the case of dipolar dielectrics. So the equation (9) can be written as:

$$\frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} = \frac{N_m}{3\epsilon_0} \alpha_{ind}. \quad (13)$$

To account for the orientational contribution to the dielectric constant, Debye [22] used the classical Boltzmann statistics and the Langevin function  $yL(y) = coth y - 1/y$  from the theory of paramagnetism, to estimate the temperature dependence of a permanent dipole orientation. Assuming that these dipoles do not interact with each other, Debye derived the following equation for the orientational polarizability.

$$\alpha_o = \frac{\mu^2}{3KT}. \quad (14)$$

Using Clausius-Mosotti's internal field argument discussed above, this additional polarization contributes to the static dielectric constant according to the following formulae:

$$\frac{\epsilon' - 1}{\epsilon' + 2} = \frac{N_m}{3\epsilon_0} \alpha_{ind} + \frac{N_d}{3\epsilon_0} \alpha_o. \quad (15)$$

Here  $N_d$  is the number of dipolar molecules per unit volume which is the same as  $N_m$ . This equation can be rewritten in the following form using equation (13).

$$\frac{\epsilon' - 1}{\epsilon' + 2} - \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} = \frac{N_d \mu^2}{9\epsilon_0 KT} \quad (16)$$

This result, from Debye [23], has been used successfully to predict the static dielectric constant of many polar gases and polar liquids. However, when applied to the condensed state of matter, Debye's theory breaks down while predicting the infinite dielectric susceptibility (Mosotti catastrophe). The reason for this breakdown lies in the assumption that is made in the expression for the Clausius-Mosotti local field. The near field in this case is assumed to be zero. In the condensed phase, permanent dipoles tend to lose their individual freedom of orientation through association and steric hindrance. Their interaction with their surroundings has to be taken into account, and the near field cannot be ignored.

### F. Onsager theory

To avoid the Mossotti catastrophe, Onsager modified the Debye theory by introducing a cavity. In his new approach to the problem, the electric field was represented by the sum of a 'cavity field' and a 'reaction field'. If the surroundings of each molecule are considered to be a homogeneous continuum, having the macroscopic properties of the substance, then the 'cavity field' is the field inside the cavity of molecular dimensions, due to a uniform external field. This cavity field is the field in the cavity resulting from the polarization induced in the surrounding medium by the molecule in the cavity. This part of the field exerts no torque on the molecule. Onsager's molecular model consisted of a sphere with a permanent dipole moment and an isotropic polarizability. Based on this model he arrives at the following expression, linking the molecular dipole moment with the static dielectric constant:

$$\frac{\epsilon' - 1}{\epsilon' + 2} - \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} = \frac{3\epsilon'(\epsilon_\infty + 2)}{(2\epsilon' + \epsilon_\infty)(\epsilon' + 2)} \frac{N_d \mu^2}{9\epsilon_0 KT} \quad (17)$$

Onsager's relation is very satisfactory for non associated polar liquids [24, 25] and can also be applied to weakly bound Van der Waals solids. In general, most of the solid dielectrics do not obey any of the local field expressions at sufficiently low frequencies, due to the charge carriers present in these materials, mostly ions, but possibly also electrons. This renders any meaningful measurement of the low frequency dielectric permittivity very difficult, making the comparison with the local field theory rather doubtful.

### G. Debye Theory of Dielectric Behavior

Debye [26] gave the classical picture of the relaxation of polarization with a single relaxation time. In his work he considered a set of non-interacting dipoles free to rotate in opposition to some viscous resistance in a fluid like medium. The equation for complex permittivity is

$$\epsilon^* = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + i\omega\tau} \quad (18)$$

where  $\epsilon_0$  = Dielectric constant at low frequency,  $\epsilon_\infty$  = Dielectric constant at high frequency,  $\omega$  = Angular frequency, and  $\tau$  = Relaxation time. According to Frohlich, the real and imaginary parts of the dielectric constant are given by

$$\epsilon^* = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + i\omega^2\tau^2}, \quad \epsilon'' = \left( \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + i\omega\tau} \right) \omega\tau \quad (19)$$

The maximum values of  $\epsilon'$  and  $\epsilon''$  are,

$$\epsilon' = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2}, \quad \epsilon'' = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2} \quad (20)$$

$$\epsilon_0 - \epsilon_\infty = \left( \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon_\infty} \right) \left( \frac{\epsilon_0 + 2}{3} \right) \frac{4\pi n g \mu^2}{3kT} \quad (21)$$

where  $n$  = Dipole Moment,  $g$  = Parameter related to dipole interaction and  $T$  = Temperature. Every molecular dipole in a given chain is coupled to the neighboring dipole of the same chain by primary valence bands so that the motion of any dipole affects the motion of its neighbors, and they in turn, influence its response to a torque. Further, in various configurations, which in chain molecules can assume, we can find another segment of the chain acting effectively as a co-operative electrical unit, and these segments will of course vary in length between the improbable extremes of a single non-numeric unit and the whole extended chain. Such a state leads to the distribution of the relaxation time. On eliminating the parameter  $\omega\tau$  between the two equations and rearranging the two parameters ( $\epsilon'$  and  $\epsilon''$ ) we get,

$$\left[ \epsilon' - \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2} \right]^2 + \epsilon''^2 = \left[ \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2} \right]^2 \quad (22)$$

The above equation is of a circle of radius  $\frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2}$ . Only the semicircle over which  $\epsilon''$  is positive has physical significance. Materials with a single relaxation time yield a semicircle in the  $\epsilon'$  and  $\epsilon''$  plane. Cole [27] modified the Debye equation by an empirical equation for complex permittivity.

$$\epsilon^* - \epsilon_\infty = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}} \quad (23)$$

where  $\alpha$  is an empirical parameter. It lies between 0 and 1, and it denotes the angle of tilt of the circular arc from the real axis. The modified expression measures the small deviation from the ideal Debye behavior, but some materials deviate very much from the Debye behavior. Havirilik and Negami [28] gave an expression, which is of the form,

$$\epsilon^* - \epsilon_\infty = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{[1 + (j\omega\tau)^{1-\alpha}]^{1-\beta}} \quad (24)$$

The dielectric constant and losses were calculated using the equation valid for a parallel plate capacitor,

$$\epsilon' = \frac{C_x d}{\epsilon_0 A}, \quad \epsilon'' = \epsilon' \tan \delta, \quad (25)$$

where  $C_x$  is the sample capacitance in Farad,  $A$  is area of the sample,  $d$  is the thickness of the sample and  $\epsilon_0$  is a constant representing the permittivity of free space. The variation of the dielectric constant and loss tangent, suggest the net effect of some internal field within the crystal along with the external AC electric field. The dipole-dipole interactions between the different groups or many body interactions suggest lower losses with a higher frequency range. The dependence of the dielectric constant on frequency can be determined from the equation,

$$C = C_g + \frac{S\tau}{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad (26)$$

where  $C_g$  is the geometrical capacitance,  $S$  the conductance corresponding to the absorption current,  $\tau$  is the dipole relaxation time and  $\omega$  the angular frequency. The above equation shows that  $C$  should diminish with increasing frequency. The increase in losses at a low frequency could be associated with the polarization of the trapped charge carriers. With an increase in the frequency, polarization decreases and becomes vanishing small at high frequencies. The expression for the dielectric loss is given by the equation [29, 30],

$$\tan \delta = \frac{\omega^2 \tau^2 (G_{in} + S) + G_m}{\omega [S\tau + C_g (\omega^2 \tau^2 + 1)]}, \quad (27)$$

where  $G_{in}$  is the conductance for the residual current. Obviously, from the equation,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \tan \delta = \infty. \quad (28)$$

Differentiating the equation with respect to  $\omega$ , and equating the derivative to zero, it is possible to obtain the value of  $\omega$  of the frequency corresponding to the maximum loss.

### H. Dielectric Theory of Optical Properties

In most cases, crystals are transparent to visible and/or infrared light. The interaction of the electromagnetic radiation with these crystals is treated, by applying the boundary conditions to the solutions of the Maxwell equations at the boundary between the different media. In the field of optical crystals, the wavelength of the light is always much larger than the inter atomic dimensions. Thus, the

interaction of light and matter is averaged over many unit cells. As a consequence, the optical properties within each layer can be described macroscopically, in terms of phenomenological parameters, the so-called optical constants or optical parameters. As shown below, these are the real and imaginary parts of a complex index of refraction  $\tilde{n}$ . The real part,  $n(\lambda)$ , is the ratio of the velocity of light in vacuum to the velocity of the light of the wavelength ( $\lambda$ ) in the material. The imaginary part,  $-\kappa(\lambda)$ , is an attenuation coefficient measuring the absorption of light with distance. Using the Maxwell equations, it is possible to relate these frequency-dependent "constants" to other optical parameters, such as the dielectric constant and conductivity. The crystals are composed of charged particles: bound and conduction electrons, ionic cores, impurities, etc. These particles move differently with oscillating electric fields, giving rise to polarization effects. At visible and infrared light frequencies, the only contribution to polarization comes from the displacement of the electron cloud, which produces an induced dipole moment. The parameters describing these optical effects, that is, the dielectric constant  $\epsilon$ , the dielectric susceptibility  $\chi$ , and the conductivity  $\sigma$ , can be treated as scalars for isotropic materials.

To find out what kind of electromagnetic waves exist inside the dielectric films, we take  $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  and  $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ , where  $\rho$  is an effective charge,  $\mathbf{P}$  is the polarization induced by the electromagnetic wave, assumed to be proportional to the electric field, and  $\mathbf{j}$  is the corresponding current density averaged over a small volume. Under these conditions, the average field Maxwell equations in MKS units read:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}, \quad (29)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j} \right), \quad (32)$$

where the symbols have their usual meaning. Note that the normal component of the electric field  $\mathbf{E}$  is not conserved at the interface between materials of different polarizability. Instead,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , called electrical displacement, is conserved across such interfaces. The solutions to these equations have the form of harmonic plane waves with the wave vector  $k$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (33)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (34)$$

and represent a wave travelling with a phase velocity  $\omega/k = c/n$ , where  $c$  is the speed of light in vacuum and  $n$  is the

index of refraction. When optical absorption is present, the wave vector and the index are complex quantities. From the Maxwell equations, a dispersion relation  $k_2 = \varepsilon(\omega/c)^2$  is obtained relating the time variation with the spatial variation of the perturbation. In general, then, the wave vector  $k$  and the dielectric constant  $\varepsilon$  are complex quantities, that is,  $k = k_1 - ik_2$  and  $\varepsilon = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$ . It is useful to define a complex index of refraction:

$$\tilde{n} = \left( \frac{c}{\omega} \right) \left[ n + i\kappa \right] \quad (35)$$

For isotropic materials,  $k_1$  and  $k_2$  are parallel and

$$\varepsilon_1 = n^2 - \kappa^2, \quad \varepsilon_2 = 2n\kappa, \quad (36)$$

$$\tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{c}{\omega} \right), \quad \tilde{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{c}{\omega} \right) \kappa. \quad (37)$$

In the photon energy region where  $\varepsilon$  is real,  $n = \varepsilon^{1/2}$  is also real and the phase ( $\omega/k$ ) and group ( $\partial\omega/\partial k$ ) velocities are equal to  $c/n$ . In general, the velocity is reduced to  $v(\lambda) = 1/\sqrt{\varepsilon_c(\lambda)}$  in the medium of a complex dielectric constant  $\varepsilon_c$ . The real part of  $n$  determines the phase velocity of the light wave, the imaginary part determining the spatial decay of its amplitude. The absorption coefficient  $\alpha$  measures the intensity loss of the wave. For a beam travelling in the  $z$  direction,  $I(x) = I(0) \exp(-\alpha z)$ , which means  $\alpha = 2\omega\kappa/c = 4k\kappa/\lambda$ .

### III. DIELECTRIC LOSS

The permittivity of a dielectric material has both real and imaginary mathematical representations. The imaginary part of permittivity is represented in mathematical equations as  $\varepsilon''$ . This imaginary part of permittivity describes the energy loss from an AC signal as it passes through the dielectric. The real part of permittivity  $\varepsilon'$  is also called the dielectric constant and relative permittivity. The permittivity of a material describes the relationship between an AC signal's transmission speed and the dielectric material's capacitance. When the word "relative" is used in front of permittivity, the implication is that the number is reported relative to the dielectric properties of a vacuum. The imaginary part of the dielectric permittivity which is a measure of how much field is lost as heat during the polarization of a material by an applied alternating electric field, is also termed as dielectric loss. The characteristic orientation of the dipoles in an electric field results in a frequency variation of the dielectric constant and loss, over a broad band of frequencies. The typical behavior of the real and imaginary parts of permittivity as a function of frequency is shown in Figure 1. [31].

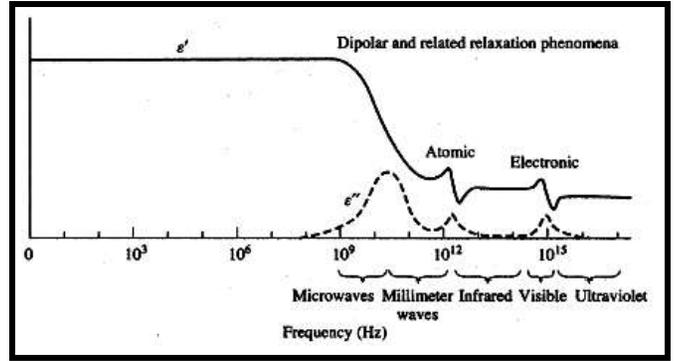


FIGURE 1. Frequency dependence of dielectric permittivity of an ideal dielectric material.

The relative permittivity of a material is related to a variety of physical phenomena that contribute to the polarization of the dielectric material. In the low frequency range the  $\varepsilon''$  is dominated by the influence of ion conductivity. The variation of permittivity in the microwave range is mainly caused by dipolar relaxation, and the absorption peaks in the infrared region and above, are mainly due to atomic and electronic polarizations. The dielectric properties of solid dielectrics at microwave and radio frequencies are highly influenced by the ionic positions and changes, caused by the lattice vibrations. Two types of dielectric losses are identified in crystalline solids at high frequencies, namely, intrinsic and extrinsic losses. The dielectric dispersion in solids depends on factors such as ionic masses, electric charge/valence state of the ions, spring constant of the bond, lattice imperfections etc. The dielectric losses close to the lattice vibration frequencies are generally estimated in terms of the anharmonicity of the lattice vibrations. The low frequency phonons are responsible for the intrinsic dielectric losses in solid dielectrics. The intrinsic loss mechanism occurs due to the interaction between the phonons and the microwave field, or due to the relaxation of the phonon distribution function. The lattice phonon modes will determine the intrinsic limits of the high frequency dielectric losses in crystalline solids. The extrinsic losses occur due to the interaction between the charged defects and the microwave fields.

#### A. Complex dielectric permittivity and Maxwell equations

In the case of dielectric polarization, the polarization of the material is related to the electric field by:

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E. \quad (38)$$

This leads to:

$$D = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E. \quad (39)$$

For real materials  $D$  can be described as [32]:

$$D = (\varepsilon - j\varepsilon_p) E. \quad (40)$$

Here,  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ , the real part of permittivity, and  $\varepsilon_p = \varepsilon_o \varepsilon''$  is a factor describing the dielectric (polarization) losses. For a region filled with a homogeneous isotropic material, the first Maxwell equation can be written as:

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + \sigma E. \quad (41)$$

Here,  $\sigma$  is the conductivity of the material. Substituting for D from equation (40) equation (41) becomes:

$$\nabla \times H = i\omega(\varepsilon - i(\varepsilon_p + \sigma / \omega))E. \quad (42)$$

The complex dielectric constant is defined as below:

$$\varepsilon^* = \varepsilon - i(\varepsilon_p + \sigma / \omega). \quad (43)$$

Here,  $\varepsilon$  is the real part of the permittivity and is defined as:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0. \quad (44)$$

Here  $\varepsilon_r$  is known as the relative permittivity or dielectric constant, and  $\varepsilon_0$  is the permittivity of free space. Here the first and second terms in the imaginary part of the complex permittivity, represent the dielectric and ohmic losses respectively [33]. The loss tangent is given as:

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}. \quad (45)$$

In this  $\varepsilon_r$  is used throughout to represent the relative permittivity of the materials and  $\tan \delta$  is used to represent a measure of the dielectric loss.

#### IV. CLASSIFICATIONS OF DIELECTRIC MATERIALS

Dielectric materials can be classified into two major categories: Linear (normal dielectric) materials and non linear dielectric materials. The linear dielectric materials can again be subdivided into three classes, based on the mechanism of electric polarization as non-polar and dipolar materials.

##### A. Linear dielectric materials

The dielectric materials, which exhibit a linear relationship between the polarization and applied electric field are known as linear dielectrics. This class of materials gets polarized with the application of the field, and depolarized on the removal of the field. Based on the nature of the polarization mechanism, the linear dielectrics can be grouped as follows [34]:

**Non polar materials:** In materials of this class, an electric field can cause only elastic displacement of the electron cloud (mainly the valence electron cloud). So they have only

electronic polarization. Such materials are generally referred to as elemental materials.

**Polar materials:** In materials of this class, an electric field can cause only an elastic displacement of the electron clouds as well as elastic displacement of the relative positions of ions. These materials have both electronic and ionic polarization. The material may be composed of molecules and each of the molecules is made of more than one kind of atom, without any permanent dipole moment. Examples of such materials are ionic crystals; in this case the total polarizability is the sum of the ionic and electronic polarizabilities.

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i. \quad (46)$$

**Dipolar materials:** The materials of this class have all three fundamental polarizations: electronic, ionic and orientation. Thus the total polarizability for them is

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_o. \quad (47)$$

##### B. Non linear dielectric materials

The materials which have a spontaneous polarization even in the absence of an external field are grouped into the class of non linear dielectrics. The spontaneous polarization appears in these classes of materials due to their crystalline structure. A necessary condition for a solid to fall in the class of non linear dielectrics is the absence of a center of symmetry. Among the 32 crystal classes, 11 have a center of symmetry, and hence, they will not exhibit spontaneous polarization. Out of the remaining 21 classes of crystals without a centre of symmetry, 20 are piezoelectric, i.e., these crystals can be polarized under the influence of an external stress. Ten out of the 20 piezoelectric crystals exhibit the pyroelectric effect, i.e., the polarization of these classes of materials can be changed with the change of temperature. The ferroelectric materials discussed below, are part of the spontaneously polarized pyroelectrics.

##### C. Ferroelectric Materials

A ferroelectric material is a non-linear dielectric that exhibits a remanent polarization in the absence of an external electric field, and its direction can be switched by an applied electric field [35]. The name ferroelectricity comes from the similarities between polarizations of ferroelectric materials with the magnetization of ferromagnetic materials. Ferroelectric materials display a hysteretic effect of polarization with an applied field. The hysteretic loop is caused by the existence of permanent electric dipoles in the material. When the external electric field is initially increased from zero value, the polarization increases. as more of the dipoles are lined up along the direction of the field. When the field is strong enough, all dipoles are lined up with the field, so the material is in a saturation state. If the applied electric

field decreases from the saturation point, the polarization also decreases. However, when the external electric field reaches zero, the polarization does not reach zero. The polarization at the zero fields is called the remanent polarization. When the direction of the electric field is reversed, the polarization decreases. When the reverse field reaches a certain value, called the coercive field, the polarization becomes zero. By further increasing the field in this reverse direction, the reverse saturation can be reached. When the field is decreased from this saturation point, the sequence just reverses itself.

In a ferroelectric material a transition occurs from a centro symmetric to a noncentro symmetric unit cell at the Curie point  $T_c$ . The shift in the structural symmetry affects both the structural and physical properties of the crystal. Ferroelectricity can be maintained only below the Curie temperature. When the temperature is higher than  $T_c$ , a ferroelectric material is in its paraelectric state. Ferroelectric materials have great application potential in developing smart electromagnetic materials, structures, and devices, including miniature capacitors, electrically tunable capacitors, filters and phase shifters, in recent years. Their application in the microwave frequencies are still under intensive investigation.

## V. TUNABLE DIELECTRICS

Dielectric materials, which have a voltage-dependent dielectric constant, are termed as tunable dielectric materials [36]. Generally, this class of materials exhibits a large change in the dielectric constant, with an applied DC electric field. The major classes of materials being considered for tunable dielectric applications are ferroelectrics in their paraelectric state. The ferroelectric materials (FE) have been investigated in the microwave range since the 1950s. Only recently, the monolithically compatible processing of certain ferroelectric thin-film compounds has become possible, and has generated great interest and promise for designing a new class of tunable microwave devices. For a microwave engineer the main attraction of a tunable material is the strong dependence of its dielectric permittivity  $\epsilon$  on the applied bias electric field  $E_0$ . This characteristic is commonly described by a parameter named, tunability  $n$ , defined as the ratio of the permittivity of the material at zero electric field  $\epsilon(0)$  to its permittivity at some non-zero electric field  $\epsilon(E)$  as given by equation (28). The relative tunability  $n_r$  is defined by equation (49) [36].

$$n = \frac{\epsilon(0)}{\epsilon(E)}, \quad (48)$$

$$n_r = \frac{\epsilon(0) - \epsilon(E)}{\epsilon(0)}. \quad (49)$$

The dielectric loss of a tunable dielectric material is also dependent on the applied DC electric field. Experiments show that a ferroelectric material with a higher loss tangent

usually has a larger tunability. Since the loss tangent of a material is an important factor affecting the performances of the electric circuit, in the development of electrically tunable ferroelectric microwave devices, a figure of merit  $K$  ( $K$ -factor), defined by  $K = \text{Tunability} / \tan \delta$ .

$$K = \frac{\epsilon(0) - \epsilon(E)}{\epsilon(0)} \times \frac{1}{\tan \delta}, \quad (50)$$

is often used to indicate the quality of the tunable dielectric materials. Usually, in the calculation of  $K$ , the loss tangent at the maximum external DC electric field is used [37].

### A. Tunable materials for microwave devices

Microwave materials have been widely used in a variety of applications ranging from communication devices to satellite services, and the study of their properties at microwave frequencies, and the development of functional microwave materials, have always been among the most active areas of solid-state physics, materials science, and electrical and electronic engineering. In recent years, the increasing need for the development of high speed and high frequency circuits and systems has made a thorough understanding of the properties of materials at microwave frequencies, a necessity [38].

Wireless systems operating in the microwave region are required to be lightweight, compact and of low cost, which could be addressed by miniaturization and integration. Meanwhile, the need of frequency agile applications demands the use of low loss, and highly tunable devices to allow multi-bandwidth operation with little impact on the component count. Microwave tunable passive devices mainly include filters, phase shifters, delay lines and matching circuits in connection with applications, such as reconfigurable antennas, software defined radios, etc [39, 40]. Implementing several separate transceiver circuits in a single hardware device increases the component count, and hence, the overall cost. Therefore, in terms of RF front end circuitry, significant cost saving can be achieved, by using electronically tunable components. In this scenario a single tunable component is employed to replace several fixed components. For example, a band pass filter (BPF) with a tunable pass band could replace several fixed filters or a tunable delay line could replace a set of fixed delay lines in the beam-forming network of a phased array antenna [41].

## VI. CONCLUSION

Theoretical discussions in respect of the dielectric constant ( $\epsilon$ ), which is an important physical quantity determining the dielectric properties of matter, have been discussed by Clausius-Mossotti, Debye, Onsager and others. These models have provided an insight into the complex polarization mechanisms in solids. Some new applications and results have been discussed.

## ACKNOWLEDGEMENT

The authors thank the Management of Sree Sastha Institute of Engineering and Technology, Chembarambakkam, Chennai - 600123 for their encouragements throughout this work.

## REFERENCES

- [1] Musschen Broek, P. V., *Introduction Philosophion Naturalem*, (Luchtman, Leiden, 1762).
- [2] Faraday, M., *Phil.Trans.* **128**, 1 79 265 (1837).
- [3] Mossoti, O. F., *Bibl. Univ. Modena.* **6**, 193 (1847).
- [4] Mossoti, O. F., *Mem. di Mathem e. di. Fisica in Modena.* **24**(2) (1850)49
- [5] Clausius, R., Volume 2 Vieweg. Braunschweigh (1879).
- [6] Debye, P., *Phys. Z.* **13**, 97(1912).
- [7] Onsager, L., *J.Amer.Chem.Soc.* **58** 1486 (1936).
- [8] Kirkwood, J. G., *J.Chem.Phys.* **7**, 911 (1939).
- [9] Kirkwood, J. G. and Fuoss, R. M., *J.Chem.Phys.* **9**, 329 (1941).
- [10] Drude, P., *Z. Phys. Chem.* **23**, 267 (1897).
- [11] Cole, K. S. and Cole, R. H., *Dispersion and Absorption in Dielectrics - I Alternating Current Characteristics*, *Journal of Chemical Phys.* **9**, 341-352 (1941).
- [12] Davidson, D. W. and Cole, R. H., *Dielectric Relaxation in Glycerol, Propylene Glycol, and n- Propanol*, *J. Chem. Phys.* **19**, 1484-1490 (1951).
- [13] Williams, G. and Watt, D. C., *Non-symmetrical dielectric relaxation behavior arising from a simple empirical decay function*, *Trans Faraday Soc.* **66**, 80-85 (1970).
- [14] Jonscher, A. K., *Dielectric relaxation in solids*, (Chelsea Dielectric Press, London, 1983).
- [15] Chau, R., Brask, J., Datta, S., Dewey, G., Majumda, A., *Application of high-k gate dielectrics and metal gate electrodes to enable silicon and non-silicon logic nnotechnology*, *Microelectronic Engineering* **80**, 1-6 (2005).
- [16] Jenkins, P. P., Macinnes, A. N., Tabib Azar, M. and Barron, A. R., *Gallium arsenide transistors: realization through a molecularly designed insulator*, *Science* **263**, 1751-1753 (1994).
- [17] Cava, R. J., *Dielectric materials for applications in microwave communications*, *J. Mater. Chem.* **11**, 54-62 (2001).
- [18] Fiedziuzko, S. J., Hunter, I. C., Itoh, T., Kobayashi, Y., Nishikawa, T., Stitzer, S. N., Wakio, K., *Dielectric Material, Devices and Circuits*, *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.* **50**, 706-720 (2002).
- [19] Smyth, C. P., *Dielectric polarization and relaxation*, *Annual Review of Physical Chemistry* **17**, 433-456 (1966).
- [20] Rodebugh, W. H. and Eddy, C. R., *J. Chem. Phys.* **8**, 424 (1940).
- [21] Kasap, S. O., *Principles of Electronic Materials and devices*, (McGraw-Hill Higher Education, USA, 2006).
- [22] Debye, P., *Einige resultate einer kinetischen Theorie der isolatoren*, *Phys. Z.* **13**, 97 (1912).
- [23] Debye, P., *Polar molecule*, (The Chemical Catalog Company, Inc., New York, 1929).
- [24] Onsager, L., *Electric moments of molecules in liquids*, *J. Amer. Chem. Soc.* **58**, 1486-1493 (1936).
- [25] Von Hippel, A. R., *Dielectric and waves* (John Wiley & Sons, New York, 1954)
- [26] Debye, P., *Polar Molecules*, (Chemical Catalogue. Co., NY, 1933).
- [27] Cole, K. S. & Cole, R. H., *Dispersion and absorption in dielectrics I. Alternating current characteristics*, *J. Chem. Phys.* **9**, 341 (1941).
- [28] Havriliik, S. & Nagami, H., *A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers*, *Polymer.* **8**, 161 (1967).
- [29] Khare, P. K. & Sahu, D. K., Verma, A. & Srivastava, R. K., *Depolarization studies of polyvinylidene fluoride foil electrets using thermally stimulated discharge*, *Indian J. Pure and Appl. Phys.* **42** 693-697 (2004).
- [30] Sahu, D. K., Khare, P. K. & Srivastava, R. K., *Electrical transport in solution-grown thin films of polyvinylidene fluoride*, *Indian J. Pure and Appl. Phys.* **43**, 207-215 (2005).
- [31] Ramo, S., Whinnery, J. R. & Van Duzer, T., *Field and wave in communication electronics*, 3rd Edition (John Wiley Sons, USA, 1994).
- [32] Maxwell, J. C., *A treatise on electricity and magnetisem*, (Clarendon press, Oxford, 1892).
- [33] Jonscher, A. K., *A new understanding of the dielectric relaxation of solids*, *J. Mater Science.* **16**, 2037-2060 (1981).
- [34] Frohlich, H., *The theory of dielectrics*, 2nd Edition (Oxford university press, London, 1958).
- [35] Valasek, J., *Piezo-Electric and Allied Phenomena in Rochelle Salt*, *J. Phy. Rev.* **17**, 475 (1921).
- [36] TagansteV, A. K., Sherman, V. O., Astafiev, K. F., Venkatesh, J. & N.Setter, *Ferroelectric materials for microwave tunable applications*, *Journal of electroceramics* **11**, 5-66 (2003).
- [37] Kim, J. Y. & Grishin, A. M., *Na0.5K0.5NbO3 Film Microwave Varactors*, *Integrated ferroelectrics* **66**, 291 (2004).
- [38] Kim, J. Y. & Grishin, A. M., *Processing and on-wafer test of ferroelectric film microwave varactors*, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 192905 (2006).
- [39] Lancaster, M. J., Powell, J. and Porch, A., *Thin-film ferroelectric microwave devices*, *Supercond. Sci. Technol.* **11**, 1323-1334 (1998).
- [40] Manas, K. R. & Richter, J., *Tunable ferroelectric filters for software defined tactical radios*, *J. proceedings of IEEE, ISAF* (2006).
- [41] Van Keuls, F. W., Romanofsky, R. R., Bohmon, D. Y., Winters, M. D., Miranda, F. A., Muller, C. H., Treece, R. E. & Galt, D., *(YBa 2 Cu 3 O 7-δ ,Au)/SrTiO 3 /LaAlO 3 thin film conductor/ferroelectric coupled microstripline phase shifters for phased array applications*, *Appl.Phys.Lett.* **71**, 3075 (1997).

# Epistemological and educational study of the electromagnetic wave propagation in the empty space (vacuum), and how students understand the vacuum's concept



Rabah Ladj<sup>1</sup>, Abachi Tahar<sup>2</sup>, Taib Belarbi<sup>3</sup>.

<sup>1, 2</sup>*Department of Physics, Ecole Normale Supérieure, Laboratoire de Didactique des Sciences, P.B. 92 Vieux Kouba, 16050 Algiers, ALGERIA.*

<sup>3</sup>*Faculty of Psychology and Education Sciences. University of Bouzaréah, Beni Messous Road, 16006 Algiers, ALGERIA.*

E-mail: r.ladj@hotmail.com

## Abstract

It is well known that, in teaching electromagnetism theory, university students learn that the electromagnetic wave can propagate in the vacuum (empty space) with a limited speed. This is it was a consequence of Michelson and Morley experiment, this experiment allowed to deny the idea of the **Ether** (which was supposed the medium of electromagnetic waves propagation). In this article we discuss the notion of the empty space (**vacuum**) and we try to see the difference between the **physical vacuum** and the **absolute vacuum**. How can we explain that empty space (**vacuum**) is characterized by physics properties? Is the notion of the empty space justified in other fields of physics, knowing that the general relativity appeals to the existence of the **Ether**? Is it possible to explain the experiment of Michelson and Morley with other hypotheses? Is there in physics science a crucial experiment? The idea of empty Space (**vacuum**) appeared in physics due to the carelessness (negligence) of major principles. "**All which exists shows itself**". Finally, from our experience in teaching at Algerian university, we noticed that students don't differentiate between the absolute **vacuum** and relative physical **vacuum**, and most of students whenever we use the word **vacuum** think about the absolute one. For this purpose, we wanted to clarify and focus on the problem with students, so, a questionnaire was presented, to homogenous sample of Algerian third year physics students related to the subject, in order to see how students understand the **vacuum**. But we concluded from the survey's results that indeed the **vacuum** concept in physics should have a profound educational revision.

**Keywords:** space, ether, medium, experiment of Michelson and Morley, E.M. wave, mechanical wave, general relativity, quantum mechanics.

## Resumen

Es bien sabido que en la enseñanza de la teoría del electromagnetismo, los estudiantes universitarios aprenden que la onda electromagnética se puede propagar en el vacío (espacio vacío) con una velocidad limitada. Esta es una consecuencia del experimento de Michelson y Morley, el cual permitió negar la idea del éter (que se suponía que era el medio de propagación de las ondas electromagnéticas). En este artículo se discute la noción de espacio vacío (vacío) y tratamos de ver la diferencia entre el vacío físico y el vacío absoluto. ¿Cómo podemos explicar que el espacio vacío (vacío) puede ser caracterizado con propiedades de la ciencia física? ¿La noción del espacio vacío está justificado en otros campos de la física, a sabiendas de que la relatividad general recurre a la existencia del éter? ¿Es posible explicar el experimento de Michelson y Morley con otras hipótesis? ¿Existe en la ciencia física un experimento crucial? La idea del espacio vacío (vacío) apareció en la física debido al descuido (negligencia) de principios más importantes. "Todo lo que existe se muestra por sí mismo". Finalmente, a partir de nuestra experiencia en la enseñanza en la universidad argelina, nos dimos cuenta que los estudiantes no diferencian entre el vacío absoluto y vacío físico relativo. Cada vez que utilizamos la palabra vacío la mayoría de los estudiantes piensa en el vacío absoluto. Por ello, hemos querido aclarar y centrarnos en el problema con los estudiantes, por lo que, se presentó un cuestionario a una muestra homogénea de estudiantes argelinos de física tercer año, relacionados con la materia, con el fin de ver cómo los estudiantes comprenden el vacío. Por los resultados de la encuesta, hemos llegado a la conclusión de que efectivamente, el concepto de vacío en la física debe tener una profunda revisión de la educación.

**Palabras clave:** Espacio, El Éter, Medio, Experimento de Michelson y Morley, Ondas EM, Onda mecánica, Relatividad general, Mecánica cuántica.

PACS: 01.40.gb, 01.40.ek

ISSN 1870-9095

## I. EPISTEMOLOGICAL STUDY

As it is well known, it taught to the university students that; the electromagnetic wave propagation does not require a

*Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 3, Sept. 2014*

medium (environment) for its propagation, and this wave can propagate in the empty space (vacuum). In the time before appearance of special relativity, the ether was considered as medium of electromagnetic wave propagation.

But the special relativity and Michelson and Morley experiment have replaced the notion ether, by the vacuum notion. This was a consequence of the "negative" results of the Michelson and Morley experience [1]. On the other hand this space (vacuum) is characterized by physical constants, such as the electric permeability and magnetic permittivity, of the space. These constants intervene in the electric and magnetic fields expressions of the electromagnetic wave, we know that both the propagation speed of electromagnetic wave; and vacuum impedance are also determined with the previous constants. As we mentioned above before the adoption of the vacuum, the ether was the medium allowing the propagation of the electromagnetic waves. This medium was considered as elastic medium (mechanical property of the ether).

Because of the elasticity medium hypothesis of the ether, Michelson and Morley tempted their experience aiming to measure or study the motion of the Earth in the ether. Even the experience repeated several times with increasing precision in each time, it gave always a negative results, neither in their period time, nor later; the latest experience was the one of Stephan Schiller from the Institute of experimental physics of Düsseldorf in 2003 [2].

Our question is why they didn't conclude simply from this experiment that the ether is not equipped with this mechanical property. Also, why not, with this mechanical hypothesis and the high speed of these transverse waves, this ether would have an incompatible density with the existence of movements of bodies within it; it could be consequently extremely fluid and couldn't be detected easily. Other authors gave another hypothesis for explaining the Michelson and Morley experience by considering that the matter is made by waves and how it behaves during the movement, the arms of the interferometer are made by matter, thus by waves. If the ether exists, matter and light which are moving in the ether are subject to the same constraints on its part. The arms of the interferometer deform exactly in the same way as the light rays, which travels through them. The arm shortens in the direction of movement. So there is no difference path between the light rays. And then the experiment result is necessarily negative [3].

According to those authors, the thing which contracts is the matter formed by waves, the fact because these waves, tighten forward their movement (motion), like every wave train emitted by moving source; or as a receiver feels in relative motion to a wave [3]. These authors conclude that:

The experience of Michelson and Morley does not prove the modifications of the space and of the time and does not prove the non-existence of the ether, but indeed shows the (wave-matter) complementary between the light and the matter. So, those authors concluded the following: about the ether we can't say nothing, we can say only, it should have a needed medium, so that these waves vibrate and propagate [3]. In the beginning of 1893, FitzGerald [4], and later, Lorentz presented such an explanation, but it was not retained [5], [6]. We notice that, this is only another authors reading of the experiment, but with other hypotheses. So,

the special relativity replaced the ether by a new conception of the space, which is the vacuum in which the light has limit speed. Ether which previously (before the special relativity) was considered the privileged frame, becomes irreconcilable with the principle of equivalence of frames, which retains no privileged frame. In our point of view, the physics constants ( $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ), which are characterize what was called vacuum, are a definitive proof which shows this space is not an absolute vacuum because this last one does not exist physically.

On 1920, May the 05th, at Leyde University, Einstein who denied the existence of the ether in the special relativity theory, has returned about the idea? We present as argument an extract of his conference which was given about the ether and the theory of relativity: "But on the other hand there is a weighty argument to be adduced in favor of the ether hypothesis, to deny the ether is ultimately to assume that empty space has no physical qualities whatever. The fundamental facts of mechanics do not harmonize with this view. For the mechanical behavior of a corporeal system hovering freely in empty space depends not only on relative positions and relative velocities, but also on its state of rotation, which physically may be taken as a characteristic not appertaining to the system in itself. In order to be able to look upon the rotation of the system, at least formally, as something real, Newton objectifies space.

Since he classes his absolute space together with real things, for him rotation relative to an absolute space is also something real. Newton might no less well have called his absolute space "Ether"; what is essential is merely that besides observable objects, another thing, which is not perceptible, must be looked upon as real, to enable acceleration or rotation to be looked upon as something real (End of the first extract) [7]. In the End of the first extracts, Einstein ends this conference by the following passage " By summarizing, being able to us say: according to the general theory of relativity, the space is endowed with physical properties; in this sense consequently the ether exists.

According to the general theory of relativity a space without ether is inconceivable, because not only the propagation of the light would be impossible. The case of space without ether, means, there would be even no possibility of existence rules and clocks, and consequently also for the space-time in the sense of the physics" [7].

Even though Einstein returned about the idea of empty space (vacuum) used the first time, by adducing in favor of the ether, we always see the idea of the empty space persisting until present in physics. In other hand we notice, especially in the case of mechanical physics always taught that the movement (motion) can only take place in an environment (medium) characterized by physical properties where there will be an exchange of energy between the mobile and the environment. We would like to notice that, in the case of electromagnetic wave, some authors especially who didn't believe in the existence of ether, interpreted that the energy exchange is previously reported between fields: the electric field (characterizing the medium) and the magnetic field (characterizing the

movement) [3]. We think that this characterization using electric and magnetic fields is only just a space's mathematical approach given to circumvent the problem of the propagation medium which was the ether.

## II. DIDACTIC STUDY

### A. Introduction

Because of the understanding difficulties of the concepts of vacuum to the students, which we mentioned during our teaching physics as a general case and electromagnetic theory as special case, we wanted to clarify some points concern the subject. For this purpose, we wrote a questionnaire sheet related to the subject. The questionnaire was presented to a sample of 40 homogenous third year physics students (case of Algerian universities). Our aim was to study the problematic in order to know what and how the students understood the concepts of vacuum.

### B. Questionnaire description

Answer: (**yes**) - (or: **no**) - (or: **no idea**) for each of the following questions:

- Does the absolute empty space 'vacuum' exist?
- Is it possible that the object's motion take place in a space without a medium?
- Does the vacuum mean a space without only matter and waves?
- Does the physical vacuum mean a relative vacuum?

### C. Questionnaire results

Figure 1 represents the results of the answers of the students, and Figure 2, represents the right answers.

## III. DISCUSSIONS OF THE RESULTS

The results got from the questionnaire show that nearly most of students gave different wrong answers to the above questions. (See Figure 1). When we compare the student's results in Figure 1, with the right answers in Figure 2, we find that the average of right answers was only about 34%, and the average wrong answers was about 66%. We can easily notice that the concept of empty space (vacuum), is not clear to the students. Now we would like to discuss the students' answers of the questions. In the first question, most of students believed the existence of a space without any thing inside, means without a matter or waves, or particles, or even virtual particles, like they believe in the existence of the nil, (space full with nothing in).. In the second question also, most of students believed that a motion can be occurred or take place in a space without medium, it seems that students ignore or they didn't

understand the basic principle of movement (motion), which is: the movement arise by an exchange between the kinetic energy of the mobile and the potential energy of the medium.

For the third and the fourth questions, the students answered results were butter compared to the 1st and 2nd answers, but were unsatisfactory for a third year physics students.

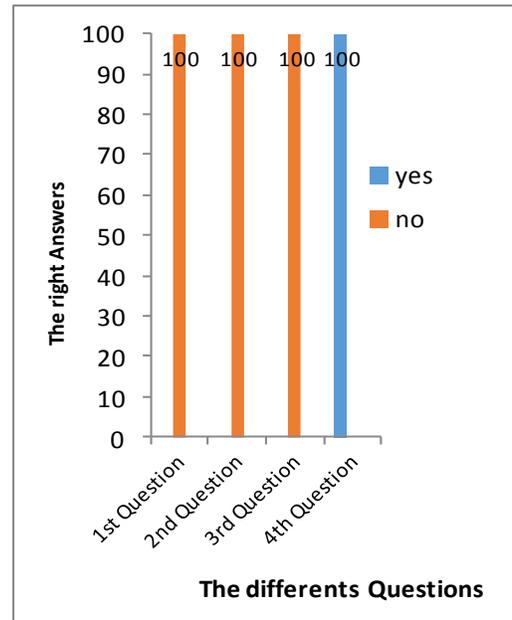


FIGURE 1. Show the students answers.

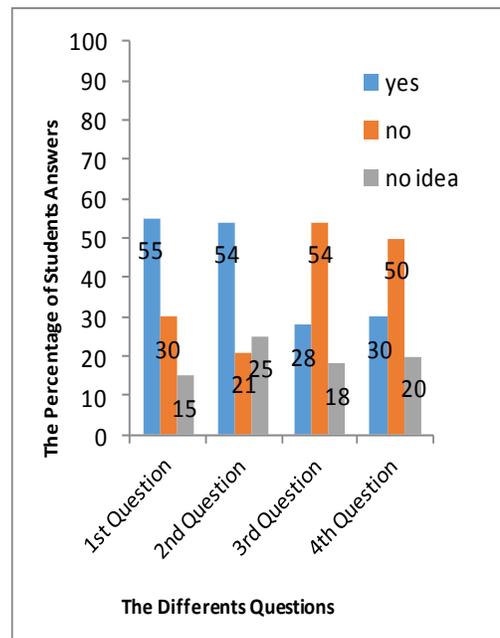


FIGURE 2. Show the right answers.

#### IV. CONCLUSION

It is well known, that after the special relativity period, which imposed the nonexistence of the ether, the space began to fill again and again: With Dirac and the standard theory, the vacuum can be drilled as a "sea" of carrier virtual particles of all the interactions between particles [8]. In this sea "vacuum" resident or exist all particles that we do not yet know [9]. The quantum physics considers the vacuum as the place of a considerable energy, at the same time it conceives this place as the fundamental state of the system of minimum energy, a state of equilibrium, state of minimum energy, but no null energy [10]. Richard Feynman considered void content in a simple light bulb would be enough to boil all the oceans of the world. The empty seat would be the most violent physical manifestations [11].

So we finish by the following: We noticed that; the vacuum concept has been introduced in physics because of an uncertain interpretation of Michelson and Morley experiment. This experiment had been conceived on the basis of the ether as being an elastic medium. We think that, before adopting a notion or a concept, it is necessary to make sure that this goes with major principles. The major principles refuse the notion of the absolute vacuum because: "which exists shows itself" but the absolute vacuum has no physical property (cannot show itself). The existence is characterized directly or indirectly.

Finally, because of the negative influence of the student's assimilation of the vacuum meaning, due to interpretation results of Michelson and Morley experiment, we suggest for teaching physics (especially electromagnetic theory) that: the vacuum word, might be replaced by the notion of physical space characterized, but imponderable.

Also we suggest an extra course of epistemology to university physics students, about the greatest principle and concepts, to improve the students' assimilation, such the following principles: final causality, last action, determinism,....., and the following concepts: vacuum,

space, time, objective existence(objectivism), Mental existence complementarity, and so on,....

#### REFERENCES

- [1] Michelson, A. A., & Morley, E. W., *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*, American Journal of Science **34**, 333–345 (1887).
- [2] Holger Mueller, S. H., Claus Braxmaier, S., Schiller, A. P., *Modern Michelson-Morley experiment using cryogenic optical resonators*, Phys.Rev.Lett. **91**, 020401 (2003).
- [3] Lodge, O., *On the present state of our knowledge of the connection between ether and matter: an historical summary*, Nature **46**, 164-165 (1892).
- [4] Shankland, R. S., *Michelson-Morley Experiment*, Am. J. Phys. **32**, 16 (1964).
- [5] McCommach, R., *H.A. Lorentz and the electromagnetic view of nature*, Isis **614**, 459-497, (1970).
- [6] Jungnickel, C. and McCommach, R., *Intellectual Mastery of Nature*, (University of Chicago. Press. Chicago, Stanley Goldberg, 1986).
- [7] Einstein, A., *Sidelights on Relativity*, Conférence faite à l'université de Leyde le 05 mai 1920 sur L'éther et la théorie de la relativité par Albert Einstein, pp. 17-23, (1922).
- [8] Álvarez-Gaume, L., Vázquez-Mozo, M. Á., *Introductory Lectures on Quantum Field Theory*, arXiv:hep-th/0510040v4 20 Feb 2013.
- [9] Lambrecht, A., Dieter, H. F., Meschede, C., *Observing mechanical dissipation in the quantum vacuum: an experimental challenge*; (Springer, New York, 2002). p. 197.
- [10] Ray, C., *Time, space and philosophy*, (Routledge, London/New York, 1991), p. 205.
- [11] Clarke, A. C., *Greetings, Carbon-based bipeds*, (Voyager, HarperCollins Publishers, London, 1999), p. 495.

# Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Translación



J. Güémez<sup>1</sup>, M. Fiolhais<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, Avenida de Los Castros s/n 39005, Santander, España.

<sup>2</sup>Departamento de Física y Centro de Física Computacional FCTUC. Universidade de Coimbra P-3004-516, Coimbra, Portugal.

**E-mail:** guemezj@unican.es

(Recibido el 18 de julio de 2014; aceptado el 29 de julio de 2014)

## Resumen

Se desarrolla un formalismo con matrices, para aplicar en una misma ecuación la segunda ley de Newton y el primer principio de la termodinámica, asegurando el cumplimiento del principio de relatividad. En este formalismo matricial se postula primero la denominada *ecuación matricial del centro-de-masas* que permite obtener simultáneamente las correspondientes ecuaciones: la *ecuación vectorial impulso-variación del momento lineal* y la *ecuación escalar del centro-de-masas*. Posteriormente se amplía el formalismo matricial para postular la *ecuación matricial de la energía* que integra en una única ecuación matricial la segunda ley de Newton y el primer principio de la termodinámica. A partir de estas ecuaciones matriciales se obtiene la *ecuación matricial de los efectos térmicos* la cual permite describir los posibles efectos térmicos que se produzcan en procesos que impliquen destrucción o producción de energía mecánica. Una matriz de proyección permite transformar las ecuaciones matriciales entre los diferentes referenciales inerciales, asegurando el cumplimiento del principio de relatividad. Con este formalismo matricial se analizan algunos ejercicios característicos: un bloque que se mueve contra una fuerza de rozamiento, disipando energía mecánica; una persona que se empuja contra una pared, produciendo energía mecánica a partir de reacciones químicas. Dichos ejercicios exigen tanto las leyes de la mecánica como las de la termodinámica para su resolución completa.

**Palabras clave:** Matrices, mecánica, termodinámica.

## Abstract

Matrix formalism is developed to be applied in a same equation Newton's second law and the first law of thermodynamics, ensuring compliance with the principle of relativity. In this matrix formalism was first postulated the so-called *matrix equation of the center-of-mass* that can simultaneously obtain the corresponding equations: *vectorial equation of impulse change in momentum* and *scalar equation from the center-of-mass*. Then the matrix formalism is extended to apply the *matrix equation of energy* that integrates into a single matrix equation of Newton's second law and the first law of thermodynamics. From these matrix equations is obtained a *matrix equation of thermal effects* for describing the possible thermal effects that occur in processes involving destruction or production of mechanical energy. A projection matrix, allows to transform the matrix equations among different inertial reference, ensuring compliance with the principle of relativity. With this matrix formalism discussed some typical exercises: a block that moves against a frictional force, dissipating mechanical energy; a person who is pushed against a wall, producing mechanical energy from chemical reactions. These require both the laws of mechanic and thermodynamic for the full resolution.

**Keywords:** Matrices, mechanics, thermodynamics.

**PACS:** 01.30.-y, 01.30.Bb, 01.30.Rr, 01.40.E-

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La separación entre la mecánica y la termodinámica que se suele dar en los libros de texto [1], significa que muchos ejercicios, particularmente aquellos que implican disipación de energía mecánica o aquellos en los que intervienen máquinas térmicas que se mueven a sí mismas (por

ejemplo, la Rocket, máquina de vapor móvil de Stephenson (Figura 1), un automóvil que consume gasolina, una persona que se desplaza andando, etc.), se resuelvan de forma incompleta [2], e, incluso, incorrecta [3].

La segunda ley de Newton, expresada como:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}},$$

aplicada a estos procesos, no parece tener relación con el primer principio de la termodinámica [4], expresado habitualmente como

$$\Delta U = W_{\text{ext}} + Q.$$

Para describir completamente el comportamiento físico de sistemas que disipan energía mecánica o cuerpos articulados con fuentes internas de energía libre que producen energía mecánica, es necesario utilizar dos ecuaciones. Se necesita la *segunda ley de Newton*

$$M\Delta\vec{v}_{\text{cm}} = \int (\sum_j \vec{F}_{\text{ext},j}) dt,$$

que también puede ser expresada como la *ecuación del centro de masas* [5]

$$\frac{1}{2}M\Delta v_{\text{cm}}^2 = \int (\sum_j \vec{F}_{\text{ext},j}) \cdot d\vec{L}_{\text{cm}}, \quad (1)$$

donde 
$$\frac{1}{2}M\Delta v_{\text{cm}}^2 = \Delta K_{\text{cm}},$$

es la variación, física, de la energía cinética del centro de masas, y donde la suma

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_j \vec{F}_{\text{ext},j},$$

se lleva a cabo sobre todas las fuerzas externas aplicadas [7], siendo  $\vec{L}_{\text{cm}}$  el desplazamiento del centro de masas del sistema. Y es preciso aplicar también la *ecuación generalizada del primer principio de la termodinámica* como [2]

$$\Delta K_{\text{cm}} + \Delta U = \int \sum_j (\vec{F}_{\text{ext},j} \cdot d\vec{L}_j) + Q, \quad (2)$$

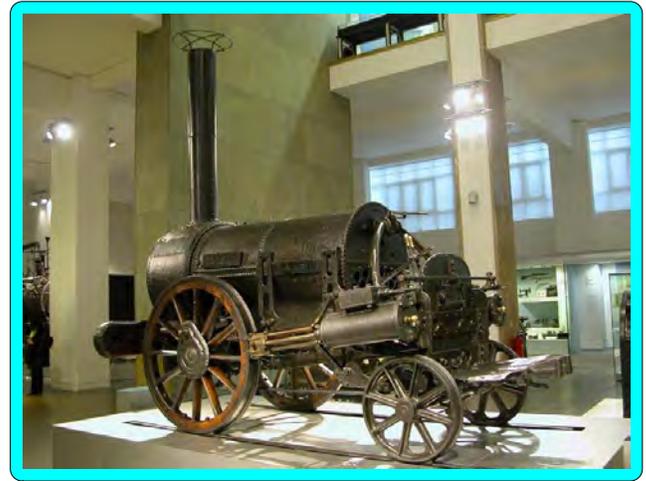
donde la suma 
$$W_{\text{ext}} = \int \sum_j (\vec{F}_{\text{ext},j} \cdot d\vec{L}_j),$$

es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas [7], siendo  $\vec{L}_j$  el desplazamiento de la propia fuerza  $\vec{F}_{\text{ext},j}$ , y no ya el desplazamiento del centro de masas.

Las Ecuaciones 1 y 2 permiten analizar procesos en los que se produzcan fenómenos de disipación de energía mecánica, como en el caso de un bloque movido contra una fuerza de rozamiento, y situaciones en los que cuerpos articulados dotados de fuentes internas de energía libre (química, etc.), producen energía mecánica [8], incluyendo un término de variación de la energía cinética del centro de masas del sistema, como aquellos en los que una máquina térmica se transporta a sí misma (Fig. 1) o, por ejemplo, en el caso de una persona que da un salto y se eleva del suelo.

Por otra parte, al principio de relatividad apenas se le da importancia en mecánica clásica [9] y nunca se considera en los libros de texto de termodinámica. La demostración de que las descripciones de un mismo proceso, llevadas a cabo en distintos referenciales inerciales, en movimiento con velocidad constante unos respecto de otros, son equivalentes, es un punto importante en la resolución de cualquier problema de física, particularmente cuando uno

de los cuerpos que interviene en el proceso está dotado de masa cuasi-infinita [10].



**FIGURA 1.** Máquina de vapor móvil de Stephenson. Esta máquina térmica se transporta a sí misma. La ecuación que describe el balance de energía para el proceso que tiene lugar desde que la máquina se pone en movimiento hasta que alcanza una velocidad constante, debe incluir un término de variación de la energía cinética de traslación del centro de masas  $\Delta K_{\text{cm}}$ .

En la teoría especial de la relatividad de Einstein, la exigencia del cumplimiento del principio de relatividad, que constituye el primer postulado de esta teoría, se traduce en la formulación de las leyes de la física con cuadvectores de Minkowski [11], y en la aplicación a dichas ecuaciones con cuadvectores de la correspondiente transformación de Lorentz, para pasar de forma directa de la descripción de un proceso en un referencial inercial, a la descripción del mismo proceso en otro referencial inercial [12]. Esta forma de desarrollar la teoría garantiza también el cumplimiento del segundo postulado de la relatividad, la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Además, la exigencia de descripciones relacionadas mediante la transformación de Lorentz permite predecir las diferentes transformaciones relativistas de las magnitudes físicas, desplazamientos, tiempos, velocidades, fuerzas, frecuencias, etc., predicciones teóricas que pueden ser contrastadas experimentalmente (efecto Doppler relativista, efecto relativista de aberración, etc.). Con este desarrollo Einstein-Minkowski mediante cuadvectores de la relatividad especial, los postulados en los que esta teoría se basa cobran pleno sentido físico.

En mecánica clásica la situación es muy diferente de la descrita en relatividad especial. En contraste con la relatividad especial [7], en mecánica clásica las diversas transformaciones de Galileo de las diferentes magnitudes físicas se postulan de forma heurística algunas de ellas, por ejemplo, fuerzas y aceleraciones son invariantes galileanos, otras se postulan *ad hoc*, como la invariancia galileana del tiempo, y otras se postulan de tal manera que se asegure el cumplimiento del principio de relatividad, por ejemplo, la

invariancia galileana de la energía intercambiada por calor entre un sistema y un foco térmico.

Considerando la situación actual de la enseñanza de la física (la separación entre mecánica y termodinámica y la pobre consideración del principio de relatividad en física clásica), en este artículo se lleva a cabo el desarrollo de un formalismo mediante matrices para la mecánica y la termodinámica, inspirado en el formalismo de cuadvectores de la formulación de Einstein-Minkowski de la relatividad especial [13]. Mediante la introducción de una velocidad límite clásica  $v_L$ , que el formalismo exige pero cuyo valor no se explicita y que se hace tender a infinito al final de los cálculos, se construyen las matrices que permiten postular las ecuaciones matriciales que van a permitir resolver los problemas. El formalismo es particularmente adecuado para analizar aquellos problemas que implicando disipación de energía mecánica (procesos en los que intervienen fuerzas de rozamiento o fricción) o producción de energía mecánica (todo tipo de máquinas térmicas), exigen tanto las leyes de la mecánica como las leyes de la termodinámica para una resolución completa.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En primer lugar se lleva a cabo el desarrollo del formalismo matricial aplicado a la traslación. Posteriormente el formalismo se aplica a dos ejemplos, el de un bloque movido por una fuerza que realiza trabajo y sometido también a una fuerza de rozamiento dando lugar a disipación de energía mecánica por calor; y el caso de una persona que adquiere energía cinética cuando se empuja contra una pared y se mueve, un ejemplo en traslación de producción de energía mecánica mediante procesos químicos. En ambos procesos se aplica el formalismo para mostrar cómo las ecuaciones se transforman entre referenciales inerciales, de acuerdo con el principio de relatividad. En un artículo posterior [14] se desarrollará un formalismo matricial para la rotación.

## II. FORMALISMO MATRICIAL

El formalismo matricial que se va a desarrollar ha sido previamente aplicado a la resolución de problemas con producción y destrucción de energía mecánica, utilizando una aproximación histórica [15]. En este artículo se adopta un punto de vista axiomático a la hora de presentar el formalismo, el cual será posteriormente aplicado también a procesos de disipación o creación de energía mecánica.

### A. Sistema y referenciales

Elegido explícitamente un sistema que debe identificarse como el conjunto de cuerpos en el interior de una cierta superficie cerrada, que separa el sistema del exterior (esta superficie puede ser física o matemática), para cada proceso en el que este sistema interviene se debe elegir un sistema de referencia. Uno conveniente es el referencial inercial  $S_\infty$  en el que las posibles fuentes de trabajo de configuración (la Tierra, la atmósfera, etc.) o cuerpos de masa cuasi-

*Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Traslación infinita (el suelo, una pared, etc.) con las que interacciona el sistema, (permanecen en reposo) a lo largo del proceso. Si este referencial no puede utilizarse, porque no exista ninguno de los cuerpos de masa cuasi-infinita anteriores, es conveniente elegir el referencial  $S^0$  en el que el centro-de-masas del sistema permanezca en reposo.*

### B. Velocidad límite clásica

En el formalismo matricial que se va a desarrollar, se considera una velocidad límite, que, además, debe ser la misma para todos los observadores inerciales (lo que, aparentemente, contradice el principio de relatividad de Galileo). Esta velocidad límite, denominada  $v_L$ , va a jugar en el formalismo matricial, en cierta medida, el mismo papel que el de la velocidad de la luz  $c$  en relatividad. Pero, el formalismo no va a exigir que se concrete el valor de  $v_L$ , admitiendo que  $v_L$  es una velocidad mucho mayor que las velocidades que habitualmente se puedan encontrar en mecánica (bloques que descienden por planos inclinados, satélites artificiales, etc.), y en tanto en cuanto la velocidad límite no juega un papel especial en los casos concretos que se analizan. No obstante, esta velocidad límite es necesaria para conseguir la coherencia del formalismo.

### C. Matrices

Un papel importante de la velocidad límite  $v_L$  en el formalismo matricial va a ser el de permitir que una matriz columna con cuatro componentes, tres de un vector más un escalar, sea dimensionalmente homogénea a pesar de estar formada por componentes cuyas magnitudes no sean dimensionalmente homogéneas (por ejemplo, espacio y tiempo o momento lineal y energía). Así, ciertas magnitudes clásicas van a ser multiplicadas (o divididas) por  $v_L$  para conseguir que la matriz de la que van a formar parte sea dimensionalmente homogénea, y con sentido físico, es decir, que pueda utilizarse como tal en las ecuaciones matriciales que se postulen.

Una aproximación clásica, en forma de matrices, de algunos de los cuadvectores de la teoría de la relatividad, se obtendrá tomando el límite  $c \rightarrow 0$ .

La matriz clásica  $v_L$  (momento-energía cinética y energía interna) se va a representar como  $\mathcal{K}$ ; con componentes con unidades de energía, y la matriz espacio-tiempo- $v_L$ ,  $\mathcal{L}$ , con unidades de espacio, vienen definidas como

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} v_L M v_x \\ v_L M v_y \\ v_L M v_z \\ \frac{1}{2} M v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_L t \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Las matrices clásicas se van a representar mediante letras caligráficas,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$ , etc., y se escriben como columnas entre paréntesis, tal como se ha hecho en (3). En el formalismo matricial sólo tendrán sentido físico pleno las matrices  $d\mathcal{K}$  o  $d\mathcal{L}$ , etc., que serán con las que se formulen las ecuaciones, antes que las propias matrices  $\mathcal{K}$  o  $\mathcal{L}$ .

**D. Fuerzas y desplazamientos**

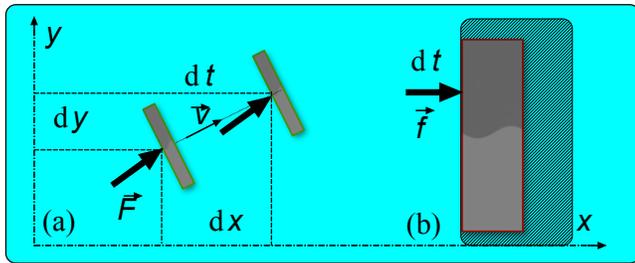
En el formalismo matricial, cada vector fuerza  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  se identifica por una matriz  $4 \times 4$   $F$  (denotada por una letra en romano) dada por

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

La expresión de  $F$  es la forma que adopta, en la teoría especial de la relatividad, el tensor asociado a un campo eléctrico  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ , ejerciendo una fuerza  $\vec{F} = q\vec{E}$  sobre una partícula de carga eléctrica  $q$ . A su vez, esta fuerza va a tener asociada una matriz columna desplazamiento  $\mathcal{L}_F$  con componentes espaciales (que, para algunas fuerzas, pueden ser nulos) del vector  $\vec{L}_F = (L_x, L_y, L_z)$  [en forma infinitesimal  $d\mathcal{L}_F = (dL_x, dL_y, dL_z)$ ], y un componente temporal (que siempre existe)  $t$  (infinitesimal  $dt$ ), tal que

$$\mathcal{L}_F = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \\ v_L t \end{pmatrix}; \quad d\mathcal{L}_F = \begin{pmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \\ v_L dt \end{pmatrix}.$$

La forma de esta matriz columna espacio-tiempo es la forma del cuadrivector espacio tiempo en la teoría especial de la relatividad, con la velocidad de la luz  $c$  en lugar de la velocidad límite  $v_L$ . Estas definiciones de  $F$  y  $\mathcal{L}_F$  se justificarán cuando la definición matricial de trabajo mediante producto de matrices generalice la definición habitual de trabajo como producto escalar de vectores.



**FIGURA 2.** Fuerzas que realizan trabajo y fuerzas que no realizan trabajo. (a) La fuerza  $\vec{F}$ , aplicada sobre un cuerpo finito que se desplaza con ella, tiene asociado desplazamiento espacial y temporal y realiza un trabajo,  $\delta W_F = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ . (b) La fuerza  $\vec{f}$ , aplicada sobre una pared, no tiene asociado desplazamiento espacial y su producto fuerza-desplazamiento espacial es nulo en el referencial en el que la pared sobre la que se aplica permanece en reposo,  $\delta W_f = 0$ . Cada fuerza ejerce un cierto impulso lineal,  $\vec{I}_F = \vec{F} dt$  y  $\vec{I}_f = \vec{f} dt$ , respectivamente.

Para un vector fuerza  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  que se representa por su matriz  $F$ , Ecuación (4), la matriz  $v_L$ -impulso-trabajo  $\delta W_F$ , que tiene unidades de energía, asociado a su

producto fuerza-desplazamiento [17] generalizado, es  $\delta W_F \equiv F d\mathcal{L}_F$ , y explícitamente

$$\delta W_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \\ v_L dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_L F_x dt \\ v_L F_y dt \\ v_L F_z dt \\ \vec{F} \cdot d\vec{L} \end{pmatrix}.$$

donde  $\delta W_F \equiv \vec{F} \cdot d\vec{L} = F_x dL_x + F_y dL_y + F_z dL_z$ , es el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  en su desplazamiento al ser dicha fuerza aplicada sobre el sistema, Figura 2a.

Para poner de manifiesto la versatilidad del formalismo matricial, se puede definir una matriz columna 'fuerza' (matriz fuerza-potencia- $v_L^{-1}$ )  $\mathcal{F}$ , con unidades de fuerza, como  $\mathcal{F} = v_L^{-1} F \mathcal{V}$ , donde  $\mathcal{V} = (v_x, v_y, v_z, v_L)$  (por razones tipográficas, en ocasiones una matriz columna se escribirá como una matriz fila) es la matriz velocidad, donde  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  es el vector velocidad con que se desplaza el punto de aplicación de la fuerza sobre el sistema, con:

$$\mathcal{F} = v_L^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ v_L^{-1} \vec{F} \cdot \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz  $\mathcal{F}$  también se puede poner como

$$\mathcal{F} = v_L^{-1} \frac{\delta W_F}{dt} = v_L^{-1} \frac{1}{dt} \begin{pmatrix} v_L F_x dt \\ v_L F_y dt \\ v_L F_z dt \\ \vec{F} \cdot d\vec{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ v_L^{-1} \vec{F} \cdot \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Existen fuerzas (Figura 2b), [6], cuyo desplazamiento es nulo, por lo que su producto fuerza-desplazamiento es cero y que no realizan trabajo cuando se aplican sobre el sistema (aunque sí ejercen un impulso). En el formalismo matricial, si la fuerza  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ , con matriz  $f$ , tiene asociado desplazamiento nulo en el referencial  $S_\infty$ , y en este referencial se tiene su matriz  $v_L$ -impulso-trabajo  $\delta W_f$ , dadas por

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_x \\ 0 & 0 & 0 & f_y \\ 0 & 0 & 0 & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{pmatrix};$$

$$\delta W_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_x \\ 0 & 0 & 0 & f_y \\ 0 & 0 & 0 & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_L f_x dt \\ v_L f_y dt \\ v_L f_z dt \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

La cuarta componente de esta matriz  $\delta W_f$  es cero (Figura 2b). Del mismo modo que para las fuerzas que realizan trabajo, para este tipo de fuerzas sin

desplazamiento, se puede definir una matriz fuerza (fuerza-potencia- $v_L^{-1}$ )  $\mathcal{F}_f$  como  $\mathcal{F}_f = v_L^{-1} f \mathcal{V}_f$ , con

$$\mathcal{F}_f = v_L^{-1} \frac{\delta \mathcal{W}_f}{dt} = v_L^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_x \\ 0 & 0 & 0 & f_y \\ 0 & 0 & 0 & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde se ha considerado que al no desplazarse su punto de aplicación en  $S_\infty$ , la velocidad con la que se aplica la fuerza es cero, aunque su matriz velocidad  $\mathcal{V}_f = (0, 0, 0, v_L)$  no es idénticamente nula (pues cada fuerza aplicada sobre el sistema siempre ejerce un impulso).

### E. Fuerzas Magnéticas

Un campo magnético  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  se identifica por una matriz  $4 \times 4$  B dada por [13]:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & v_L B_z & -v_L B_y & 0 \\ -v_L B_z & 0 & v_L B_x & 0 \\ v_L B_y & -v_L B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo la expresión de B la forma que adopta, en la teoría especial de la relatividad, con  $c$  en lugar de  $v_L$ , el tensor asociado a un campo magnético  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ .

La matriz fuerza  $\mathcal{F}_B$  sobre una partícula de carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  viene dada por la expresión  $\mathcal{F}_B = qB\mathcal{V}/v_L$ , con

$$\mathcal{F}_B = \frac{q}{v_L} \begin{pmatrix} 0 & v_L B_z & -v_L B_y & 0 \\ -v_L B_z & 0 & v_L B_x & 0 \\ v_L B_y & -v_L B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_L \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_y B_z - B_y v_z \\ v_z B_x - B_z v_x \\ v_x B_y - B_x v_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo esta definición el equivalente matricial de la fuerza de Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  clásica.

El formalismo matricial permite obtener directamente que las fuerzas magnéticas no realizan trabajo sobre la partícula sobre la que actúan. El mismo resultado se obtiene con  $\delta \mathcal{W}_B = qv_L^{-1} B \mathcal{V} dt$ .

### F. Matrices asociadas al centro-de-masas

El desplazamiento del centro-de-masas de un cuerpo juega un papel físico importante y tiene asociada una velocidad  $\vec{v}_{cm}$ , dada por el vector  $\vec{v}_{cm} = (v_{x,cm}, v_{y,cm}, v_{z,cm})$ , y un momento lineal  $\vec{p}_{cm}$ , dado por el vector:

$$\vec{p}_{cm} = (p_{x,cm}, p_{y,cm}, p_{z,cm}) = (Mv_{x,cm}, Mv_{y,cm}, Mv_{z,cm}),$$

una energía cinética  $K_{cm}$ , dada por el escalar:

$$K_{cm} = Mv_{cm}^2/2,$$

un desplazamiento espacial:

$$d\vec{L}_{cm} = (dL_{x,cm}, dL_{y,cm}, dL_{z,cm}),$$

con un *desplazamiento temporal*  $dt$ , y va a tener asociadas dos matrices: la matriz  $dK_{cm}$  de  $v_L$ -momento lineal-energía cinética (del centro-de-masas), y la matriz  $d\mathcal{L}_{cm}$  de  $v_L$ -desplazamiento espacial-desplazamiento temporal (matriz espacio-tiempo clásica) (del centro-de-masas).

Estas matrices van a ser:

$$d\mathcal{K}_{cm} = \begin{pmatrix} v_L M dv_{x,cm} \\ v_L M dv_{y,cm} \\ v_L M dv_{z,cm} \\ \frac{1}{2} M dv_{cm}^2 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_{cm} = \begin{pmatrix} dL_{x,cm} \\ dL_{y,cm} \\ dL_{z,cm} \\ v_L dt \end{pmatrix},$$

respectivamente.

De nuevo para poner de manifiesto la versatilidad del formalismo, se pueden definir las correspondientes matrices momento-lineal-energía cinética- $v_L^{-1}$ ,  $d\mathcal{P}_{cm} = v_L^{-1} d\mathcal{K}_{cm}$ , cuyas componentes tienen unidades de momento lineal, y la matriz tiempo-espacio-  $v_L^{-1}$ ,  $d\mathcal{T}_{cm} = v_L^{-1} d\mathcal{L}_{cm}$ , cuyas componentes tienen unidades de tiempo.

### G. Matrices termodinámicas

El desarrollo del formalismo exige definir toda una serie de matrices relacionadas con magnitudes termodinámicas.

**G.1 Matrices energía interna.** En termodinámica clásica, la energía interna de un cuerpo varía sin que se le asocie ningún cambio en el momento lineal del mismo.

Cualquier matriz columna variación de energía interna  $dU_j$ , debe ser de la forma

$$dU_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; dU_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

La variación  $dU$  puede recibir contribuciones de la variación de la energía interna,  $dK_{int}$  (incluyendo la variación de la energía cinética de rotación o energía cinética con respecto al centro-de-masas del sistema, con momento lineal nulo), y cualquier trabajo interno [18],  $dw_{int} = -d\Phi$ , es decir, realizado por las fuerzas conservativas internas, de la variación de energía interna asociada a las variaciones de temperatura,  $dU =$

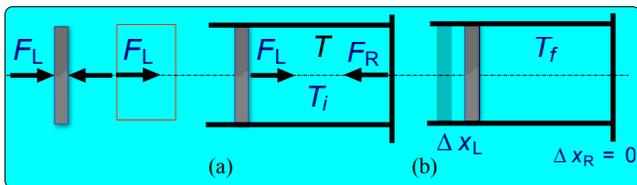
$Mc_V(T)dT$ , donde  $c_V(T)$  es el calor específico, que puede depender de la temperatura, con su correspondiente matriz  $d\mathcal{U}_T$ , Ec. (6), de las variaciones de energía interna asociadas a reacciones químicas  $dU_\xi$ , etc. La matriz asociada a las variaciones de energía cinética interna  $d\mathcal{K}_{int}$ , que forman parte de la variación de la energía interna del sistema, es  $d\mathcal{K}_{int} = d\mathcal{U}_{k, int}$ , con

$$d\mathcal{U}_{k, int} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dK_{int} \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$$d\mathcal{U}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dU_\xi \end{pmatrix}, \quad d\mathcal{U}_{ph} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dU_{ph} \end{pmatrix}.$$

Para un observador situado en el centro-de-masas, las variaciones de la energía cinética respecto del centro-de-masas se producen con variación nula del momento lineal respecto del centro-de-masas. Cuando un sistema varíe su composición por una reacción química sin cambiar su temperatura,  $dU_\xi$ , se tendrá que  $dU_\xi = \sum_p dU_p - \sum_r dU_r$  ( $p$  para productos de la reacción y  $r$  para reactivos de la misma) como diferencia entre las energías de los enlaces formados para dar lugar a los productos, menos las energías de los enlaces previamente rotos en los reactivos. Para una reacción química que se produce en el interior del sistema (una explosión, reacciones bioquímicas en músculos, etc.), conocidos los reactivos y productos de la misma, se tendrá una matriz  $d\mathcal{U}_\xi$ , Ec. (7). Si el sistema presenta una transición de fase, la correspondiente variación  $d\mathcal{U}_{ph}$  deberá ser considerada en su correspondiente matriz,  $d\mathcal{U}_{ph}$ , (Ecuación 7).

**G.2 Matrices trabajo de configuración.** Cuando sobre un sistema se aplique una fuerza externa  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ , que tenga asociado un cierto desplazamiento, por ejemplo, la fuerza aplicada sobre el émbolo que cierra un cilindro que contiene un gas (Figura 3a),  $d\vec{L}_F = (dx, dy, dz)$ , aplicándose dicha fuerza durante un intervalo de tiempo  $dt$ , se define la matriz  $v_L$ -impulso-trabajo de configuración  $\delta\mathcal{W}_F$ , con  $\delta\mathcal{W}_F = F dL_F$ .



**FIGURA 3.** Compresión de un gas. (a) Gas encerrado en un cilindro apoyado en una pared, comprimido bajo la acción de dos fuerzas, una aplicada sobre la parte del gas en contacto con el émbolo, y otra sobre la parte del gas en contacto con la base del cilindro que contiene el gas. (b) La fuerza  $F_L$  se desplaza  $\Delta x_L$ , realizando trabajo sobre el gas. La fuerza  $F_R$  tiene desplazamiento nulo y no realiza trabajo sobre el gas. Los émbolos actúan como

intermediarios, de tal forma que el gas ejerce sobre ellos una fuerza igual y de sentido contrario a la que el agente externo aplica sobre el émbolo.

Como ya se ha indicado, en ciertos procesos se pueden encontrar fuerzas que se aplican durante un cierto intervalo de tiempo, pero su desplazamiento es nulo (por ejemplo, la fuerza que se aplica sobre la base de un gas encerrado en un cilindro cuando sobre el émbolo se aplica otra fuerza (Figura 3b), o la fuerza que el suelo ejerce sobre el pie de una persona al andar). Es decir, es posible aplicar una fuerza durante un tiempo, ejerciendo un impulso sobre el cuerpo, sin que dicha fuerza tenga desplazamiento y, por tanto, sin que realice trabajo. Pero no es posible realizar trabajo sobre un sistema con una fuerza sin además ejercer un impulso sobre el sistema (si hay varias fuerzas aplicadas sobre un mismo sistema, el impulso total aplicado puede ser cero y el trabajo total no nulo). En aquellos casos en los que la fuerza no tiene asociado desplazamiento (Figura 3) se tiene que su matriz desplazamiento tiene ceros en las componentes correspondientes y, entonces  $\delta\mathcal{W}_f = f dL_f$  se obtiene una matriz  $v_L$ -impulso-trabajo, con la componente de trabajo nula.

Un tipo de trabajo de configuración importante en un sistema termodinámico es aquel en el que un gas, líquido o sólido, se expanden, o comprimen, contra la presión atmosférica externa  $P$  (que no es, en ocasiones, la presión del sistema, que, a lo largo de un proceso irreversible puede no estar definida), con  $\delta\mathcal{W}_f = f dL_f$ , donde  $dV$  es la variación en volumen. La matriz columna trabajo de configuración  $\delta\mathcal{W}_P$  para este tipo de procesos debe ser de la forma:

$$\delta\mathcal{W}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -PdV \end{pmatrix}; \quad \delta\mathcal{W}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -PdV_\xi \end{pmatrix}.$$

También el trabajo realizado contra las fuerzas externas de la presión debido a la variación de volumen de los productos de una reacción química respecto de los reactivos (los posibles gases de una reacción se expanden en todas direcciones), siendo  $\delta\mathcal{W}_\xi = -P dV_\xi$ , donde  $dV_\xi$  es la variación en volumen de la reacción química. Cuando en un sistema finito se produce una reacción química, por ejemplo, una explosión, produciéndose una variación en el volumen del sistema, el centro-de-masas no puede ni moverse ni adquirir velocidad. Si el sistema en cuestión se encuentra, de alguna manera unido a la Tierra, el centro-de-masas del sistema sí puede variar.

**G.3 Matriz calor.** En termodinámica clásica se admite, sin que se explicita, que el intercambio de energía por calor entre un cuerpo y su entorno se realiza sin que haya variación en el momento lineal del cuerpo. La energía intercambiada por calor entre un cuerpo y su entorno es una energía que no se puede caracterizar mecánicamente, es

decir, haciendo intervenir magnitudes mecánicas, fuerzas, desplazamientos, etc. La energía intercambiada por calor se debe caracterizar recurriendo a diferencias de temperatura, un concepto ausente de la mecánica. La matriz columna calor  $Q$  debe ser de la forma [12]:

$$\delta Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta Q \end{pmatrix}; \delta Q_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T dS_\xi \end{pmatrix}.$$

La energía intercambiada por calor entre un sistema y su entorno, caracterizado por un foco térmico, se debe intercambiar sin que se produzcan variaciones de la velocidad del centro-de-masas del sistema. El referencial en el que el foco térmico que rodee el sistema se encuentre en reposo, debe ser el referencial  $S_\infty$ . Cuando se produzca una reacción química en el interior de un sistema, con los reactivos y productos a temperatura  $T$ , puede haber un intercambio de energía por calor entre el sistema y su foco térmico a temperatura  $T$ , que va a ser de la forma  $\delta Q_\xi = T dS_\xi$ , donde  $dS_\xi$  es la variación de entropía de la reacción química. Si  $dS_\xi < 0$ , entonces  $\delta Q_\xi < 0$  y se debe ceder calor  $\delta Q_\xi$  al menos, al foco térmico para evitar que la entropía del universo disminuya.

### III. ECUACIÓN MATRICIAL DEL CENTRO-DE-MASAS

Una vez identificadas las diferentes matrices que van a describir un proceso, es necesario escribir las ecuaciones, matriciales, que las relacionan. Las ecuaciones matriciales se van a obtener basándose en las correspondientes ecuaciones, vectoriales y escalares, de la física clásica. En física clásica, para un proceso individual dado, todas las fuerzas se aplican simultáneamente y durante el mismo intervalo de tiempo (y se aplican del mismo modo en todos los referenciales inerciales). Para describir la traslación del centro-de-masas de un sistema, sobre el que actúan fuerzas externas  $\vec{F}_{\text{ext},j}$  de diferentes tipos, a partir de las matrices  $d\mathcal{K}_{\text{cm}}$ , con unidades de energía,  $dL_{\text{cm}}$ , con unidades de desplazamiento, y  $F_j^{\text{ext}}$ , con unidades de fuerza, se postula la *ecuación matricial del centro de masas*, equivalente matricial de la *ecuación (escalar) del centro de masas*  $dK_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot dL_{\text{cm}}$ ,

$$d\mathcal{K}_{\text{cm}} = F^{\text{ext}} dL_{\text{cm}}, \quad (8)$$

donde  $F^{\text{ext}} = \sum_j F_j^{\text{ext}}$ , que, explícitamente, viene dada por

$$\begin{pmatrix} v_L M dv_{x,\text{cm}} \\ v_L M dv_{y,\text{cm}} \\ v_L M dv_{z,\text{cm}} \\ \frac{1}{2} M dv_{\text{cm}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dL_{x,\text{cm}} \\ dL_{y,\text{cm}} \\ dL_{z,\text{cm}} \\ v_L dt \end{pmatrix},$$

*Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Traslación* donde  $F_x = \sum_j F_{x,j}$ , etc. A partir de la *ecuación matricial del centro-de-masas*, se tienen, por componentes, vectorial y escalar, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_L \left[ M dv_x = \sum_j F_{x,j} dt \right], \\ v_L \left[ M dv_z = \sum_j F_{z,j} dt \right], \\ v_L \left[ M dv_y = \sum_j F_{y,j} dt \right], \\ \frac{1}{2} M dv^2 = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{L}_{\text{cm}}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{L}_{\text{cm}} = \left( \sum_j F_{x,j} \right) dL_{x,\text{cm}} + \left( \sum_j F_{y,j} \right) dL_{y,\text{cm}} + \left( \sum_j F_{z,j} \right) dL_{z,\text{cm}},$$

es el pseudo-trabajo [19] (producto escalar de la fuerza resultante por el desplazamiento del centro de masas del sistema). Las tres primeras componentes corresponden a la *ecuación (vectorial) de la segunda ley de Newton* aplicada al proceso. La última, Ecuación 9, es la correspondiente *ecuación (escalar) del centro-de-masas* relativa al proceso.

Puesto que la ecuación del centro de masas se puede obtener a partir de la ecuación de la segunda ley de Newton, la ecuación matricial del centro de masas contiene información redundante. Esta ecuación matricial se cita a modo de recordatorio y para que destaquen más fácilmente sus diferencias con la *ecuación matricial de la energía*, que se va a obtener a continuación.

Para destacar las simetrías del formalismo, con las matrices  $d\mathcal{P}_{\text{cm}}$ , con unidades de momento lineal, y  $d\mathcal{T}_{\text{cm}}$ , con unidades de tiempo, previamente definidas, se tiene de forma equivalente la *ecuación matricial del impulso-momento lineal* (equivalente matricial de la *ecuación vectorial de la segunda ley de Newton*) expresada como

$$\begin{aligned} d\vec{p}_{\text{cm}} &= \vec{F}_{\text{ext}} dt, \\ d\mathcal{P}_{\text{cm}} &= F^{\text{ext}} d\mathcal{T}_{\text{cm}}, \end{aligned} \quad (10)$$

y también como:

$$d\mathcal{P}_{\text{cm}} = \mathcal{F}^{\text{ext}} dt.$$

### IV. ECUACIÓN MATRICIAL DE LA ENERGÍA

Como ya se ha considerado con la ecuación matricial del centro-de-masas, se admite que las ecuaciones matriciales mantienen la estructura de las correspondientes ecuaciones en física clásica. Siguiendo este criterio, la *ecuación matricial de la energía*, se postula que es de la forma (equivalente matricial de la *ecuación escalar de la energía* o primer principio de la termodinámica) [5],

$$d\mathcal{K}_{\text{cm}} + dU = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q,$$

$$d\mathcal{K}_{\text{cm}} + \sum_n d\mathcal{U}_n = \sum_j (F_j^{\text{ext}} dL_j) + \delta Q, \quad (11)$$

donde  $dU = \sum_n dU_n$  es la matriz para la variación total de las diferentes formas de energía interna del sistema y  $\delta\mathcal{W}_{\text{ext}} = \sum_j (F_j^{\text{ext}} dL_j)$  es la matriz  $v_L$ -impulso-trabajo de todas las fuerzas externas, con  $\delta\mathcal{W}_{\text{ext}} = \sum_j \delta\mathcal{W}_{\text{ext},j}$ . En esta ecuación intervienen tanto matrices de origen mecánico (asociadas a las fuerzas externas) como matrices de origen termodinámico (en particular, las diversas formas de variar la energía interna del sistema, y el calor). Los posibles efectos de rotación van a contribuir a la variación de la energía interna del sistema (en un artículo posterior se considera el tratamiento matricial de la rotación y su relación con esta ecuación matricial de la energía [14]).

Explícitamente, desarrollando las matrices, se tiene

$$\begin{pmatrix} v_L M d v_{x,\text{cm}} \\ v_L M d v_{y,\text{cm}} \\ v_L M d v_{z,\text{cm}} \\ \frac{1}{2} M d v_{\text{cm}}^2 \end{pmatrix} + \sum_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dU_n \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{x,j} \\ 0 & 0 & 0 & F_{y,j} \\ 0 & 0 & 0 & F_{z,j} \\ F_{x,j} & F_{y,j} & F_{z,j} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dL_{x,j} \\ dL_{y,j} \\ dL_{z,j} \\ v_L dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta Q \end{pmatrix},$$

a partir de esta ecuación matricial de la energía, se obtienen, por componentes la *ecuación vectorial de la segunda ley de Newton* y la *ecuación escalar del primer principio de la termodinámica*

$$\begin{aligned} v_L \left[ M d v_{x,\text{cm}} = \sum_j F_{x,j} dt \right], \\ v_L \left[ M d v_{y,\text{cm}} = \sum_j F_{y,j} dt \right], \\ v_L \left[ M d v_{z,\text{cm}} = \sum_j F_{z,j} dt \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} M d v_{\text{cm}}^2 + \sum_n dU_n = \sum_j \left( \vec{F}_{\text{ext},j} \cdot d\vec{L}_j \right) + \delta Q, \quad (13)$$

donde el trabajo  $\delta W$  realizado por las fuerzas externas viene dado por

$$\delta W = \sum_j \vec{F}_{\text{ext},j} \cdot d\vec{L}_j = \sum_j \left( F_{x,j} dL_{x,j} + F_{y,j} dL_{y,j} + F_{z,j} dL_{z,j} \right).$$

En esta Ecuación 11 *todas* las fuerzas externas contribuyen al impulso, pero sólo las *fuerzas externas que se desplazan*, es decir, que tienen asociado un  $d\vec{L}_j$  no nulo, realizan trabajo.

La primera ecuación (12) que es vectorial, es de nuevo, la correspondiente ecuación de la segunda ley de Newton aplicada al proceso. A pesar de que cada matriz  $4 \times 4$  de una fuerza externa  $F_j$  se multiplica por la matriz desplazamiento asociado a esa fuerza  $dL_j$ , como todas las matrices desplazamiento tienen la componente temporal en común  $v_L dt$ , también con esta ecuación se obtiene, como componente vectorial, la segunda ley del Newton para el proceso. La segunda ecuación (13), que es escalar, es la

correspondiente ecuación del primer principio de la termodinámica aplicado al proceso.

Aunque la ecuación matricial de la energía propuesta se basa en la expresión clásica del primer principio de la termodinámica, generalizado para incluir la energía cinética del centro-de-masas del sistema que, en este caso, tiene relación directa con la segunda ley de Newton (ecuación impulso lineal-variación del momento lineal), del correspondiente proceso.

Es importante destacar la siguiente relación entre la *ecuación matricial del centro de masas* y la correspondiente *ecuación matricial de la energía*. Puesto que la *ecuación matricial de la energía* va a proporcionar la *ecuación (vectorial) de la segunda ley de Newton*  $\vec{F}_{\text{ext}} dt = M d\vec{v}_{\text{cm}}$  para un proceso y, a partir de ésta, con  $\vec{F}_{\text{ext}} \vec{v}_{\text{cm}} dt = M \vec{v}_{\text{cm}} d\vec{v}_{\text{cm}}$ , es posible obtener la *ecuación escalar del centro-de-masas*,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M (d v_{x,\text{cm}}^2 + d v_{y,\text{cm}}^2 + d v_{z,\text{cm}}^2) = F_x dx_{\text{cm}} + \\ + F_y dy_{\text{cm}} + F_z dz_{\text{cm}}, \end{aligned}$$

para dicho proceso, se tiene que la *ecuación matricial de la energía* contiene toda la información necesaria para resolver un problema (de traslación) dado. Si se ha postulado primero la *ecuación matricial del centro-de-masas* ha sido para explorar las posibilidades del formalismo matricial y para enfatizar las diferencias que en el tratamiento habitual de la mecánica y la termodinámica existen entre la *ecuación escalar del centro-de-masas* y la *ecuación escalar de la energía*, o primer principio de la termodinámica.

## V. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD. TRANSFORMACIONES RELATIVISTAS

Sean, por ejemplo, dos referenciales  $S_A$  y  $S_\infty$  relacionados mediante transformaciones de coordenadas

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(x, y, z, v_L t), \\ y_A &= y_A(x, y, z, v_L t), \\ z_A &= z_A(x, y, z, v_L t), \\ v_L t_A &= v_L t_A(x, y, z, v_L t). \end{aligned}$$

La matriz  $J(x_A, x)$  de la transformación entre estos referenciales viene dada por:

$$\begin{aligned} J(x_A, x) = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_A}{\partial x} & \frac{\partial x_A}{\partial y} & \frac{\partial x_A}{\partial z} & \frac{\partial x_A}{\partial(v_L t)} \\ \frac{\partial y_A}{\partial x} & \frac{\partial y_A}{\partial y} & \frac{\partial y_A}{\partial z} & \frac{\partial y_A}{\partial(v_L t)} \\ \frac{\partial z_A}{\partial x} & \frac{\partial z_A}{\partial y} & \frac{\partial z_A}{\partial z} & \frac{\partial z_A}{\partial(v_L t)} \\ \frac{\partial(v_L t_A)}{\partial x} & \frac{\partial(v_L t_A)}{\partial y} & \frac{\partial(v_L t_A)}{\partial z} & \frac{\partial(v_L t_A)}{\partial(v_L t)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se enuncia ahora la siguiente Hipótesis de Proyección sobre transformaciones entre referenciales utilizando matrices de proyección:

Dada una matriz (columna),  $\mathcal{A}$ , en el referencial  $S_\infty$ , se obtiene la correspondiente matriz  $\mathcal{A}_A$  en el referencial  $S_A$ , (tal que la matriz  $\mathcal{A}_A$  debe corresponder a la descripción del mismo cuerpo o proceso físico que la matriz  $\mathcal{A}$ , pero en el referencial  $S_A$ ), llevando a cabo el producto de matrices

$$\mathcal{A}_A = J(x_A, x)\mathcal{A}.$$

Esta hipótesis constituye la aplicación en física clásica de la denominada *hipótesis de la formulación asíncrona* en relatividad [12].

Generalizando esta hipótesis, si en el referencial  $S_\infty$  se tiene una ecuación matricial del centro-de-masas dada, por ejemplo, por

$$d\mathcal{K}_{cm} = (G + N + F + R)d\mathcal{L}_{cm},$$

donde  $G$ ,  $N$ ,  $F$  y  $R$ , son las matrices asociadas a las correspondientes fuerzas  $\vec{G}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{F}$  y  $\vec{R}$  aplicadas sobre el sistema, para describir un determinado proceso, en el referencial  $S_A$ , el mismo proceso vendrá descrito por la ecuación

$$J(x_A, x)\left[d\mathcal{K}_{cm} = (G + N + F + R)d\mathcal{L}_{cm}\right],$$

con

$$\begin{aligned} [J(x_A, x)d\mathcal{K}_{cm}] &= \\ &= \left[ J(x_A, x)(G + N + F + R)J^{-1}(x_A, x) \right] \\ & [J(x_A, x)d\mathcal{L}_{cm}], \end{aligned} \quad (14)$$

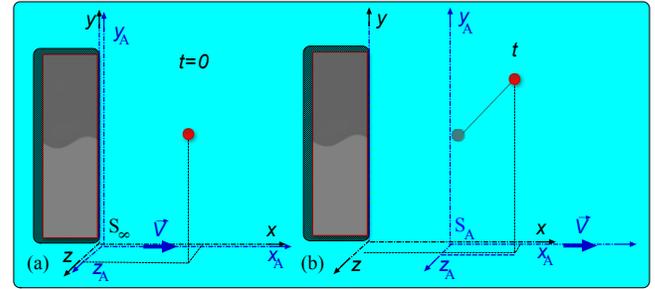
donde  $J^{-1}(x_A, x)$  es la matriz de proyección inversa de  $J^{-1}(x_A, x)$ , tal que  $J(x_A, x)J^{-1}(x_A, x) = 1$ , y con las transformaciones

$$\begin{aligned} d\mathcal{K}_{cm,A} &= J(x_A, x)d\mathcal{K}_{cm}; \\ d\mathcal{L}_{cm,A} &= J(x_A, x)d\mathcal{L}_{cm}; \\ G_A &= J(x_A, x)GJ^{-1}(x_A, x); \\ N_A &= J(x_A, x)NJ^{-1}(x_A, x); \\ R_A &= J(x_A, x)RJ^{-1}(x_A, x); \\ F_A &= J(x_A, x)FJ^{-1}(x_A, x), \end{aligned}$$

Es decir, la Ec. (14) debe corresponder a la ecuación:

$$d\mathcal{K}_{cm,A} = (G_A + N_A + F_A + R_A)d\mathcal{L}_{cm,A}, \quad (15)$$

con las correspondientes matrices  $\mathcal{K}_{cm,A}$ ,  $\mathcal{L}_{cm,A}$ , etc., medidas en el referencial  $S_A$ . La hipótesis de proyección enunciada asegura que el principio de relatividad se cumpla de forma directa en el formalismo matricial, pues cualquier



**FIGURA 4.** Referenciales  $S_\infty$  y  $S_A$  en configuración estándar. (a) Referenciales  $S_\infty$ , en el que un cuerpo de masa casi-infinita permanece en reposo, y referencial  $S_A$ , en configuración estándar con respecto a  $S_\infty$ , a tiempo  $t = 0$ . (b) Al cabo de un tiempo  $t$ , el referencial  $S_A$  se ha desplazado en horizontal una distancia  $Vt$  respecto de  $S_\infty$ .

### A. Referenciales en configuración estándar

Escribiendo las ecuaciones de los procesos físicos mediante ecuaciones matriciales, y eligiendo de forma adecuada una matriz de proyección entre referenciales, se consigue que todas las descripciones de los procesos cumplan el principio de relatividad. Con dicha matriz de proyección actuando sobre las matrices obtenidas en el referencial  $S_\infty$  se pueden obtener las correspondientes matrices tal y como los describe un observador en el referencial  $S_A$  en movimiento respecto del anterior.

Para un referencial  $S_A$  que se desplaza con su eje  $x_A$  paralelo al eje  $x$  del referencial  $S_\infty$ , con velocidad  $\vec{V} = (V, 0, 0)$ , la denominada configuración estándar, se tiene la matriz de transformación

$$\Theta(V) = \lim_{v_L \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -V/v_L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -V/v_L & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para lograr la transformación entre referenciales de una ecuación, por ejemplo, de  $S$  a  $S_A$ , primero se aplica la matriz  $\Theta(V)$  sobre las correspondientes matrices de la ecuación correspondiente en  $S$ , para posteriormente tomar el límite de  $v_L \rightarrow \infty$ , reteniendo los términos constantes o proporcionales a  $v_L$ , obteniéndose las correspondientes ecuaciones matriciales en  $S_A$ .

### B. Transformación de Galileo

Se debe notar que la matriz de transformación  $\Theta(V)$  antes de tomar el límite  $v_L \rightarrow \infty$ , no es la matriz de la transformación de Galileo, puesto que al aplicar  $\Theta(V)$  a la matriz espacio-tiempo da lugar a:

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ v_L t_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -V/v_L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -V/v_L & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_L t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x - \frac{V}{v_L} v_L t \\ y \\ z \\ v_L t - \frac{V}{v_L} x \end{pmatrix}.$$

Formalmente se tienen las transformaciones de coordenadas entre referenciales en configuración estándar para el método matricial desarrollado:

$$\begin{aligned} x_A &= x - \frac{V}{v_L} (v_L t), \\ y_A &= y, \\ z_A &= z, \\ (v_L t_A) &= (v_L t) - \frac{V}{v_L} x. \end{aligned}$$

En este formalismo matricial el tiempo no es una magnitud absoluta sino que depende del referencial en que se describa el proceso (algo semejante a lo que sucede en relatividad). Cuando se toma el límite de  $v_L \rightarrow 0$ , se recupera un tiempo absoluto, el mismo en todos los referenciales y se recupera la transformación de Galileo:

$$\lim_{v_L \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ v_L t_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - Vt \\ y \\ z \\ v_L t \end{pmatrix}.$$

Aunque se utilice un formalismo matricial, si se emplea directamente la transformación de Galileo, y su matriz de transformación correspondiente, y no la matriz  $\Theta(V)$  no se obtendrían las transformaciones correctas entre referenciales en configuración estándar. Se debe aplicar primero la matriz de transformación estándar  $\Theta(V)$  para tomar posteriormente el límite de  $v_L \rightarrow \infty$  y mantener aquellos términos que no se anulan en este límite.

La matriz  $\Theta(V)$  es una matriz simétrica, su inversa es:

$$\Theta^{-1}(V) = \Theta(-V),$$

tal que

$$\Theta(V)\Theta^{-1}(V) = \Theta^{-1}(V)\Theta(V) = 1.$$

Su generalización para traslaciones en cualquier dirección es inmediata, con la propiedad (hasta términos del orden de  $\mathcal{O}(v_L^{-2})$  antes de tomar el límite):

$$\Theta(V_1 + V_2) = \Theta(V_1)\Theta(V_2).$$

## VI. TRANSFORMACIONES MATRICIALES DE MAGNITUDES

Las predicciones debidas a la aplicación de la matriz de proyección  $\Theta(V)$  a las diferentes magnitudes matriciales pueden ser contrastadas experimentalmente, pues su

aplicación anticipa las eventuales observaciones que serán llevadas a cabo por un observador respecto de un cierto proceso, si se conocen las observaciones llevadas a cabo por otro observador en movimiento relativo respecto del primero. Es decir, en vez de suponer la forma de ciertas transformaciones entre magnitudes, tal y como se hace en física clásica con las transformaciones de Galileo, dichas transformaciones entre referenciales en configuración estándar se pueden predecir a partir de la aplicación de la matriz de proyección  $\Theta(V)$  y, posteriormente, estas predicciones se pueden contrastar experimentalmente.

### A. Transformación matricial de desplazamiento, velocidad y aceleración

Si el desplazamiento del centro-de-masas de un cuerpo en  $S_\infty$  viene caracterizado por la matriz  $\mathcal{L}_{cm} = (L_{cm}, 0, 0, v_L t_0)$ , para el desplazamiento del centro-de-masas en el referencial  $S_A$  se tiene la matriz  $\mathcal{L}_{cm,A} = \Theta(V) \mathcal{L}_{cm}$ , con

$$\mathcal{L}_{cm,A} = \Theta(V) \begin{pmatrix} L_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{cm} - Vt_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L t_0 \end{pmatrix}.$$

En esta descripción el desplazamiento en  $S_A$  será  $L_{cm,A} = L_{cm} - Vt_0$ , mientras el tiempo es absoluto y es un invariante del formalismo matricial (Fig. 4). Si la velocidad del centro-de-masas de un cuerpo en  $S_\infty$  viene caracterizada por la matriz  $\mathcal{V}_{cm}$ , la matriz  $\mathcal{V}_A = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{cm} = (v_{cm}, 0, 0, v_L)$  en  $S_A$  vendrá dada por:

$$\mathcal{V}_{cm,A} = \begin{pmatrix} v_{cm,A} \\ 0 \\ 0 \\ v_L \end{pmatrix} = \Theta(V) \begin{pmatrix} v_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{cm} - V \\ 0 \\ 0 \\ v_L \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la transformación matricial de las velocidades  $v_{cm,A} = v_{cm} - V$  que como se ha indicado anteriormente, se puede contrastar experimentalmente. La cuarta componente de estas matrices velocidad es siempre  $v_L$ , la misma para todos los observadores (lo que también sucede en relatividad con  $c$ ).

Por ejemplo, si para un cuerpo que se mueve con aceleración  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  en  $S_\infty$  se tiene la matriz  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt} \mathcal{V} = (a_x, a_y, a_z, 0)$ , para el observador en  $S_A$  se tendrá la matriz  $\mathcal{A}_A$ , con

$$\mathcal{A}_A = \begin{pmatrix} a_{x,A} \\ a_{y,A} \\ a_{z,A} \\ 0 \end{pmatrix} = \Theta(V) \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{pmatrix},$$

que corresponde a lo que ve el observador en  $S_A$ . Se concluye entonces que la aceleración es un invariante del formalismo matricial. Procediendo de esta forma, se

obtienen las transformaciones matriciales de las diversas magnitudes físicas.

## B. Transformación matricial de las fuerzas

En el referencial  $S_A$ , la matriz  $4 \times 4$   $F_A$  asociada a la matriz de fuerza  $F$  en  $S_\infty$  se obtiene haciendo  $F_A = \Theta(V)F\Theta^{-1}(V)$ .

Esta definición es necesaria para que el formalismo matricial resulte coherente y que, por ejemplo, se cumpla que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{F,A} &= F_A d\mathcal{L}_{F,A} = \\ &= [\Theta(V)F\Theta^{-1}(V)][\Theta(V)d\mathcal{L}_F] = \\ &= \Theta(V)\delta\mathcal{W}_F,\end{aligned}$$

y la matriz  $\delta\mathcal{W}_F$  se transforme correctamente entre referenciales. Se puede a su vez comprobar que [hasta el orden  $\mathcal{O}(v_L^{-1})$ , y tomando el límite correspondiente  $v_L \rightarrow \infty$ ]

$$F_A = \Theta(V)F\Theta^{-1}(V) = F.$$

Esto implica que en este formalismo matricial las fuerzas pueden ser consideradas invariantes. Esta misma invariancia de las fuerzas se considera en física clásica.

## C. Transformación matriciales de magnitudes termodinámicas

Una vez obtenidas las matrices termodinámicas en un referencial en el que el sistema permanece en reposo, junto con las posibles fuentes de trabajo y focos térmicos  $S_\infty$ , en el referencial  $S_A$ , en configuración estándar con respecto al primero, se tendrá, por ejemplo, para la variación de energía interna  $dU_A$  que

$$\begin{aligned}dU_R &= \Theta(V) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dU \end{pmatrix} = \lim_{v_L \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} -v_L \frac{dU}{v_L^2} V \\ 0 \\ 0 \\ dU \end{pmatrix} = \\ &= (0, 0, 0, dU).\end{aligned}$$

En el formalismo matricial, la expresión de la variación de energía interna en  $S_\infty$  interviene, inicialmente, como  $v_L^{-2} dU$ , en la expresión del momento lineal en  $S_A$ , pero esta contribución desaparece cuando se toma el límite  $v_L \rightarrow \infty$ .

Un resultado similar se obtiene para  $\delta Q$  y las demás matrices termodinámicas (esta contribución inicial al momento lineal es un efecto relativista que desaparece en física clásica).

Debido a la estructura de las matrices termodinámicas (con sus tres componentes vectoriales nulos),  $dU$  y  $\delta Q$  son invariantes, iguales en todos los referenciales.

## Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Traslación

Para la matriz  $v_L$ -impulso-trabajo de configuración  $\delta\mathcal{W}_F$  para una fuerza  $\vec{F}$  que realiza trabajo, se tiene que se transforman como:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{F,A} &= \begin{pmatrix} v_L I_{x,A} \\ v_L I_{y,A} \\ v_L I_{z,A} \\ \delta W_{FA} \end{pmatrix} = \Theta(V) \begin{pmatrix} v_L F_x dt \\ v_L F_y dt \\ v_L F_z dt \\ \vec{F} \cdot d\vec{L}_F \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v_L F_x dt \\ v_L F_y dt \\ v_L F_z dt \\ \vec{F} \cdot d\vec{L}_F - VF_x dt \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La expresión del trabajo en  $S_\infty$  interviene, inicialmente, como  $v_L^{-2} \vec{F} \cdot d\vec{L}_F$ , en la expresión del momento lineal en  $S_A$ , pero esta contribución desaparece cuando  $v_L \rightarrow \infty$ . Por el contrario, la expresión del momento lineal en el referencial  $S_\infty$  sí interviene en la expresión del trabajo en  $S_A$ , como  $-VF_x dt$ , y esa contribución no desaparece en el límite clásico. Esto mismo sucede cuando se transforma la matriz  $d\mathcal{K}_{cm}$ . En el referencial  $S_A$ , a la componente  $F_x$  de la fuerza se le asocia un desplazamiento dado por  $dL_{F,A} = dx - V dt$ , y a dicho componente se le asocia un *producto fuerza-desplazamiento* dado por  $\delta\mathcal{W}_{F,A} = F_x(dx - V dt)$ .

Para la matriz columna fuerza  $\mathcal{F}$  para una fuerza  $\vec{F}$  que realiza trabajo, se tiene que se transforma como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_A &= \begin{pmatrix} F_{x,A} \\ F_{y,A} \\ F_{z,A} \\ v_L^{-1} \vec{F}_R \cdot \vec{v}_R \end{pmatrix} = \Theta(V) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ v_L^{-1} \vec{F} \cdot \vec{v} \end{pmatrix} = \\ &= (F_x, F_y, F_z, v_L^{-1} [\vec{F} \cdot \vec{v} - VF_x]).\end{aligned}$$

Cuando una fuerza  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ , que no realiza trabajo, se proyecta sobre otro referencial, su matriz  $v_L$ -impulso-trabajo, se transforma como

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{f,A} &= \begin{pmatrix} v_L I_{x,A} \\ v_L I_{y,A} \\ v_L I_{z,A} \\ \delta W_{fA} \end{pmatrix} = \Theta(V) \begin{pmatrix} v_L f_x dt \\ v_L f_y dt \\ v_L f_z dt \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (v_L f_x dt, v_L f_y dt, v_L f_z dt, -Vf_x dt).\end{aligned}$$

También se tiene que la matriz  $\mathcal{F}_f$  se transforma en  $\mathcal{F}_{f,A}$  como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{f,A} &= \begin{pmatrix} f_{x,A} \\ f_{y,A} \\ f_{z,A} \\ v_L^{-1} \vec{f}_R \cdot \vec{v}_R \end{pmatrix} = \Theta(V) \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (f_x, f_y, f_z, -v_L^{-1} Vf_x).\end{aligned}$$

Aunque la fuerza  $\vec{f}$  no tenga asociado desplazamiento espacial, y no realice trabajo en el referencial  $S_\infty$ , en el referencial  $S_A$  tiene asociado un desplazamiento  $dL_{f,A} = -V dt$  en  $x$ , y se le asocia un *producto fuerza-desplazamiento* (trabajo)  $\delta W_{f,A} = -f_x V dt$ .

## VII. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD. TRANSFORMACIONES DE ECUACIONES

Con la hipótesis anterior sobre la matriz  $\Theta(V)$ , se tiene que el principio de relatividad se cumple directamente, pues el formalismo garantiza que las ecuaciones matriciales mantienen su forma funcional al cambiar de referencial. Esta hipótesis, además de predecir transformaciones de magnitudes entre referenciales -- predicciones que se pueden contrastar experimentalmente, tiene otras consecuencias. Si en el sistema de referencia  $S_\infty$  se obtienen, a partir de la ecuación matricial del centro-de-masas, las ecuaciones por componentes, vectoriales para la segunda ley de Newton, y escalar, para la ecuación del centro de masas,

$$d\vec{p} = d\vec{I} = \left( \sum_k \vec{F}_k \right) dt;$$

$$dK_{cm} = \left( \sum_k \vec{F}_k \right) \cdot d\vec{x}_{cm},$$

en el referencial  $S_A$  que se mueve en configuración estándar con velocidad  $V$  respecto de  $S_\infty$ , se tendrán las ecuaciones:

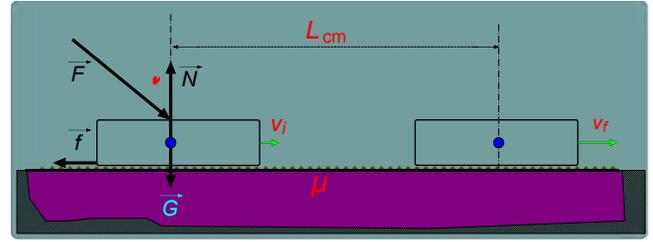
$$d\vec{p}_A = d\vec{I} = \left( \sum_k \vec{F}_k \right) dt;$$

$$dK_{cm} - \vec{V} \cdot d\vec{p} = \left( \sum_k \vec{F}_k \right) \cdot d\vec{x}_{cm} - \vec{V} \cdot \vec{I}.$$

La segunda ley de Newton no se ve modificada entre referenciales ( $d\vec{p}$ , las fuerzas y el intervalo de tiempo, son invariantes del formalismo; aunque la velocidad se transforma, su variación no lo hace). La ecuación del centro-de-masas sí se ve transformada. Es decir, en  $S_A$  la ecuación del centro-de-masas se puede descomponer, sumando miembro a miembro, como la combinación lineal de ecuaciones que se cumplen en  $S_\infty$

$$- \vec{V} \cdot [d\vec{p} = \vec{I}] + [dK_{cm} = \left( \sum_k \vec{F}_k \right) \cdot d\vec{x}_{cm}],$$

que son ecuaciones (entre corchetes) que se cumplen en  $S_\infty$  cada una de ellas. Los factores de esta combinación lineal de ecuaciones siempre serán funciones (o constantes) que dependerán de la velocidad  $\vec{V}$  entre referenciales. Exactamente lo mismo va a suceder con la ecuación del primer principio de la termodinámica en  $S_A$ , que se podrá expresar como combinación lineal de las ecuaciones de la segunda ley de Newton y del primer principio de la termodinámica en  $S_\infty$ .



**FIGURA 5.** Bloque desplazado por una fuerza que realiza trabajo y contra una fuerza de rozamiento. Sistema de referencia  $S_\infty$  en el que el suelo permanece en reposo. Bloque moviéndose bajo la acción de una fuerza  $\vec{F}$  que realiza trabajo y contra una fuerza de rozamiento  $\vec{f}$ . (i) Velocidad inicial  $v_i = 0$ . (f) Velocidad final, al cabo de un tiempo  $t_0$  de aplicación de las fuerzas,  $v_f = v$ .

## VIII. EJEMPLO 1. BLOQUE CON FUERZA Y ROZAMIENTO

Un ejercicio característico de un libro de texto es el movimiento en horizontal de un bloque sometido a algún tipo de fuerza ejercida por una fuente de trabajo y sometido además a una fuerza de rozamiento. En la Figura 5 se muestra un esquema de un proceso de este tipo. Un bloque sólido de masa  $M$ , se desliza una distancia  $L_{cm}$  durante un intervalo de tiempo  $t_0$ , con una fuerza  $\vec{F}$ , proveniente de una fuente de trabajo, y contra una fuerza de rozamiento  $\vec{f}$  con el suelo, que permanece en reposo en el referencial  $S_\infty$ .

Para las fuerzas del proceso, fuerza aplicada  $\vec{F} = (F \sin \theta, -F \cos \theta, 0)$ , peso  $\vec{G} = (0, -Mg, 0)$  y normal  $\vec{N} = (0, N, 0)$ , todas ellas con el desplazamiento espacial igual al del centro de masas, se tienen las matrices fuerza  $4 \times 4$  y matrices columna desplazamiento,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & -F \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ F \sin \theta & -F \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_F = \begin{pmatrix} dL_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Mg \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Mg & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_G = \begin{pmatrix} dL_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_N = \begin{pmatrix} dL_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix},$$

respectivamente. La fuerza de rozamiento  $\vec{R} = (-\mu N, 0, 0)$  se describe utilizando las leyes de Amontons y Coulomb para el rozamiento, con su matriz  $R$  dada por:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mu N \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu N & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; d\mathcal{L}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix}, \quad (18)$$

donde  $d\mathcal{L}_R$  es su matriz desplazamiento espacio-temporal, teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento dinámico no tiene desplazamiento espacial asociado pero sí ejerce un impulso sobre el bloque.

Puesto que todas las fuerzas son constantes, la matriz variación  $v_L$ -momento lineal-energía cinética del centro de masas es:

$$\Delta\mathcal{K}_{cm} = \begin{pmatrix} v_L M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) \end{pmatrix}, \mathcal{L}_{cm} = \begin{pmatrix} L_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L t_0 \end{pmatrix},$$

siendo  $\mathcal{L}_{cm}$  la matriz del desplazamiento del centro-de-masas.

La ecuación matricial del centro-de-masas para este proceso de arrastre con fricción con fuerzas aplicadas constantes viene dada por:

$$\Delta\mathcal{K}_{cm} = [G + N + F + R]\mathcal{L}_{cm},$$

y explícitamente:

$$\begin{pmatrix} v_L M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_x & F_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L t_0 \end{pmatrix},$$

donde  $F_x = F \sin\theta - \mu N$  y  $F_y = -F \cos\theta + N - Mg$ , son las dos componentes de la fuerza resultante. A partir de la ecuación matricial se tienen las ecuaciones, vectorial y escalar, por componentes:

$$\begin{cases} v_L [M(v_f - v_i) = (F \sin\theta - \mu N)t_0], \\ v_L [0 = (-F \cos\theta + N - Mg)t_0], \\ \frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) = (F \sin\theta - \mu N)L_{cm}. \end{cases} \quad (19)$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene el valor de la fuerza normal, que es  $N = Mg + F \cos\theta$ , y las expresiones

$$\begin{cases} a_{cm} = \frac{1}{M}(F \sin\theta - \mu N), \\ L_{cm}(t_0) = \frac{1}{2}a_{cm}t_0^2, \\ v_f^2(L) - v_i^2 = 2\left[\frac{1}{M}(F \sin\theta - \mu N)\right]L_{cm}. \end{cases} \quad (20)$$

Se debe cumplir la condición  $\sin\theta > \mu N/F$  para que el bloque se mueva. Conocidas las magnitudes  $M$ ,  $\mu$ ,  $\vec{F}$  y  $t_0$ , se pueden obtener  $a_{cm}$ ,  $v_{cm}$ ,  $N$  y  $L_{cm}$ , respectivamente.

Pueden obtenerse evidencias experimentales de efectos térmicos a lo largo del proceso descrito, efectos no contemplados en las anteriores ecuaciones, por lo que se necesita la ecuación matricial de la energía para poder caracterizar por completo el proceso.

#### Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Translación

Las matrices para la variación de energía interna  $dU$  y para la energía intercambiada por calor con el entorno  $\delta Q$ , son:

$$dU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Mc_V dT \end{pmatrix}; \delta Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta Q \end{pmatrix},$$

respectivamente. La ecuación matricial de la energía

$$\Delta\mathcal{K}_{cm} + \Delta U = \mathcal{W}_G + \mathcal{W}_N + \mathcal{W}_F + \mathcal{W}_R + Q,$$

para este proceso es:

$$\Delta\mathcal{K}_{cm} + \Delta U = G\mathcal{L}_G + N\mathcal{L}_N + F\mathcal{L}_F + R\mathcal{L}_R + Q,$$

y, explícitamente:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} v_L M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Mc_V(T_f - T_i) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} v_L F \sin\theta t_0 \\ -v_L F \cos\theta t_0 \\ 0 \\ F \sin\theta L_{cm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_L \mu N t_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ -v_L M g t_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_L N t_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se tienen para el proceso las ecuaciones:

$$M(v_f - v_i) = (F \cos\theta - \mu N)t_0,$$

$$N - (Mg + F \sin\theta) = 0,$$

$$\frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) + Mc_V(T_f - T) = F \sin\theta L_{cm} + Q. \quad (21)$$

admitiendo que  $T_f = T$  (proceso lento, la temperatura del bloque no varía), los efectos térmicos son  $Q = -\mu N L_{cm}$ , energía disipada como calor, con el incremento de entropía del universo  $\Delta S_U = \frac{\mu N L_{cm}}{T} > 0$ . El proceso es irreversible, procediendo con aumento de la entropía del universo, en particular, del foco térmico que rodea al bloque. El papel de la fuerza de rozamiento es el de un intermediario que permite disipar en forma de trabajo disipativo o en forma de calor, (desde un punto de vista termodinámico, ambos son equivalentes) parte del trabajo realizado por la fuerza conservativa, o similar, no realizando dicha fuerza de rozamiento ningún trabajo ella misma.

**A. Descripción en el referencial  $S_A$**

Se va a considerar ahora la descripción del proceso descrito en la Fig. 5 en el referencial  $S_A$ , en configuración estándar con respecto a  $S_\infty$ , con velocidad  $V$ . Se tienen las matrices en  $S_A$

$$\Delta\mathcal{K}_{cm,A} = \Theta(V)\Delta\mathcal{K}_{cm} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_L M(v_f - v_i) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) - VM(v_f - v_i) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{cm,A} = \Theta(V)\mathcal{L}_{cm} = \begin{pmatrix} L_{cm} - Vt_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L t_0 \end{pmatrix},$$

siendo  $\mathcal{L}_{cm,A}$  la matriz del desplazamiento del centro-de-masas en  $S_A$ . La ecuación matricial del centro-de-masas en  $S_A$  es

$$\Delta\mathcal{K}_{cm,A} = [G + N + F + R]\mathcal{L}_{cm,A},$$

las fuerzas son invariantes del formalismo) de donde se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{cases} v_L [M(v_f - v_i) = (F \text{sen} \theta - \mu N)t_0], \\ v_L [0 = (-F \text{cos} \theta + N - Mg)t_0], \\ \frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) - VM(v_f - v_i) = \\ = (F \text{sen} \theta - \mu N)(L_{cm} - Vt_0). \end{cases} \quad (22)$$

Este conjunto de Ecuaciones (22) es equivalente a las Ecuaciones (19). Así, la ecuación del centro-de-masas en  $S_A$  se puede poner, sumando miembro a miembro, como la combinación lineal de las ecuaciones

$$-V[M(v_f - v_i) = (F \text{sen} \theta - \mu N)t_0] +$$

$$[\frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) = (F \text{sen} \theta - \mu N)L_{cm}],$$

previamente obtenidas en  $S_\infty$ . Los desplazamientos de las fuerzas  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$  y  $\vec{N}$  en  $S_A$  son

$$\mathcal{L}_{F,A} = \mathcal{L}_{G,A} = \mathcal{L}_{N,A} = \Theta(V)\mathcal{L}_{cm} = \begin{pmatrix} L_{cm} - Vt_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L t_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{R,A} = \Theta(V)\mathcal{L}_R = \begin{pmatrix} -Vt_0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L t_0 \end{pmatrix}.$$

siendo  $\mathcal{L}_{R,A}$  la matriz del desplazamiento en  $S_A$  de la fuerza de rozamiento  $\vec{R}$ . La ecuación matricial de la energía en  $S_A$  es

$$\Delta\mathcal{K}_{cm,A} + \Delta\mathcal{U}_A = \mathcal{W}_{F,A} + \mathcal{W}_{G,A} + \mathcal{W}_{N,A} + \mathcal{W}_{R,A} + \mathcal{Q}_A,$$

con las ecuaciones vectorial y escalar,

$$\begin{cases} v_L [M(v_f - v_i) = (F \text{sen} \theta - \mu N)t_0], \\ v_L [0 = (-F \text{cos} \theta + N - Mg)t_0], \\ \frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) - VM(v_f - v_i) + Mc_P(T_f - T_i) = \\ = F \text{sen} \theta(L_{cm} - Vt_0) + \mu NVt_0 + Q. \end{cases} \quad (23)$$

Este conjunto de Ecuaciones 23, es equivalente a las Ecuaciones 21. La ecuación de la energía en  $S_A$  se puede descomponer, sumando miembro a miembro, como

$$-V[M(v_f - v_i) = (F \text{sen} \theta - \mu N)t_0] +$$

$$\frac{1}{2}M(v_f^2 - v_i^2) + Mc(T_f - T_i) = F \text{sen} \theta L_{cm} + Q,$$

con ecuaciones previamente obtenidas en  $S_\infty$ . En el referencial  $S_A$

$$Q = -\mu(Mg + F \text{cos} \theta)L_{cm};$$

$$\Delta S_U = \frac{\mu(Mg + F \text{cos} \theta)L}{T} \geq 0.$$

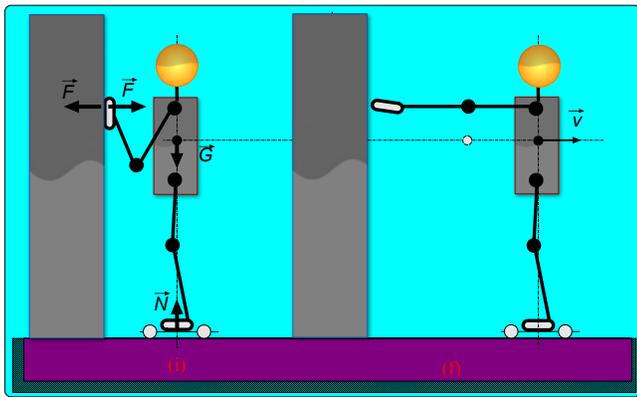
Tanto la energía intercambiada por calor  $Q$  como la variación de entropía del universo  $\Delta S_U$  a lo largo del proceso, son invariantes galileanos.

**IX. EJEMPLO 2. PERSONA EN PATINES QUE EMPUJA CONTRA UNA PARED**

Un proceso relativamente sencillo de un cuerpo articulado con fuentes internas de energía libre que produce energía mecánica (una máquina térmica que se desplaza a sí misma), es el de una persona que adquiere energía cinética como un todo, apoyándose en una pared con los brazos contraídos y empujándose contra ella.

En la Figura 6 se muestra un esquema de un proceso en el que una persona, de masa  $M$ , colocada sobre patines para evitar el rozamiento con el suelo, empuja contra una pared.

Cuando la persona pierde el contacto con la pared, la velocidad de su centro-de-masas es  $v_{cm} \equiv v$ . La fuerza del peso  $\vec{G}$  de la persona y la fuerza normal  $\vec{N}$  de reacción del suelo sobre ella, no intervienen en la descripción, pues se anulan mutuamente.



**FIGURA 6.** Persona que empuja contra un muro Sistema de referencia  $S_\infty$  en el que el muro permanece en reposo. (i) Persona que empuja contra un muro. La fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre la mano de la persona no tiene desplazamiento espacial asociado. (f) El centro-de-masas de la persona se mueve con velocidad  $v$  cuando sus manos pierden contacto con la pared.

La fuerza  $\vec{F}$  -- que se toma como una fuerza promedio entre la pared y la mano de la persona,  $\vec{F} = (\bar{F}, 0, 0)$ , tiene una matriz  $\bar{F}$  asociada

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{F} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, d\mathcal{L}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix},$$

siendo su vector desplazamiento espacial  $d\vec{L}_F = (0, 0, 0)$ , es decir, esta fuerza no tiene asociado desplazamiento espacial, pues siempre se aplica en el punto de contacto de la mano con la pared. Para la variación de la energía cinética del centro-de-masas de la persona se tienen las matrices  $d\mathcal{K}_{cm}$  y  $d\mathcal{L}_{cm}$ ,

$$d\mathcal{K}_{cm} = \begin{pmatrix} v_L M dv \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M dv^2 \end{pmatrix}, d\mathcal{L}_{cm} = \begin{pmatrix} dL_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix},$$

pues para el centro-de-masas de la persona se tiene el vector desplazamiento  $d\vec{L}_{cm} = (dL_{cm}, 0, 0)$  donde  $L_{cm} \equiv L_0$  será, aproximadamente, la longitud de su brazo. Alternativamente, se pueden escribir las matrices momento lineal-energía cinética- $v_L^{-1}$  del centro-de-masas  $d\mathcal{P}_{cm}$  y espacio- $v_L^{-1}$ —tiempo  $d\mathcal{T}_{cm}$  como

$$d\mathcal{P}_{cm} = \begin{pmatrix} M dv \\ 0 \\ 0 \\ v_L^{-1} \frac{1}{2} M dv^2 \end{pmatrix}, d\mathcal{T}_{cm} = \begin{pmatrix} v_L^{-1} dL_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ dt \end{pmatrix}.$$

Sólo se está interesado en el proceso que va desde que la mano comienza a presionar contra la pared hasta que mano y pared pierden el contacto. Para este proceso se tiene la ecuación matricial del centro-de-masas  $d\mathcal{K}_{cm} = \bar{F} d\mathcal{L}_{cm}$ , y,

Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Translación  
alternativamente, como  $d\mathcal{P}_{cm} = \bar{F} d\mathcal{T}_{cm}$ , que  
explícitamente, es

$$\begin{pmatrix} M, dv \\ 0 \\ 0 \\ v_L^{-1} \frac{1}{2} M dv^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{F} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L^{-1} dL_{cm} \\ 0 \\ 0 \\ dt \end{pmatrix},$$

que también puede expresarse como  $d\mathcal{P}_{cm} = \bar{F} dt$ . A partir de cualquiera de estas ecuaciones matriciales se obtienen las ecuaciones

$$M dv = \bar{F} dt;$$

$$\frac{1}{2} M dv^2 = \bar{F} dL_{cm}.$$

Para el proceso con  $L_{cm} = L_0$ ,  $v_{cm} = v$ , se tienen las ecuaciones

$$Mv = \bar{F} t_0;$$

$$\frac{1}{2} Mv^2 = \bar{F} L_0.$$

Sin reparar en que la fuerza de contacto entre la persona y el muro (que se aplica sobre la persona durante un intervalo de tiempo  $t_0$ ) no realiza trabajo, se suele presentar, incorrectamente, el problema como un ejercicio de aplicación del teorema trabajo-energía, siendo sin embargo, la ecuación (escalar) del centro-de-masas la que se obtiene. Se tiene también que

$$a_{cm} = \frac{\bar{F}}{M};$$

$$v = a_{cm} t_0;$$

$$L_0 = \frac{1}{2} a_{cm} t_0^2.$$

Eliminando el tiempo  $t_0$  entre  $v$  y  $L_0$  se obtiene la ecuación del centro-de-masas anterior. Si se mide la velocidad final del centro-de-masas de la persona, y  $L_0$ , se puede conocer la fuerza  $\bar{F}$  aplicada y el tiempo  $t_0$  de aplicación de la misma.

Para los procesos bioquímicos, notados genéricamente con  $\xi$ , que tienen lugar en los músculos de la persona se tiene una variación de energía interna  $dU_\xi$ , un trabajo de expansión contra la presión externa,  $\delta W_p = P dV_\xi$ , y que hay energía intercambiada por calor con el entorno,  $\delta Q = T dS_\xi$  para asegurar que la entropía del universo no disminuye, con las matrices termodinámicas para variación de energía interna, trabajo de configuración y calor previamente definidas.

Para este proceso se tiene la ecuación matricial de la energía,

$$d\mathcal{K}_{cm} + dU_\xi = \delta\mathcal{W}_F + \delta\mathcal{W}_\xi + \delta Q_\xi$$

donde

$$\delta\mathcal{W}_F = \bar{F} d\mathcal{L}_F,$$

con

$$\delta\mathcal{W}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{F} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_L dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_L \bar{F} dt \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

A partir de esta ecuación matricial se obtienen las ecuaciones

$$Mdv = \bar{F}dt;$$

$$\frac{1}{2}Mdv^2 + dU_\xi = -PdV_\xi + TdS_\xi.$$

Se tiene:

$$Mv = \bar{F}t_0;$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = -\Delta G_\xi.$$

La energía cinética de la persona proviene del alimento ingerido por ella y de la energía química acumulada en sus músculos.

En la ecuación escalar de la energía obtenida no interviene la fuerza  $\bar{F}$ , pues dicha fuerza no realiza trabajo. Comparando la ecuación escalar del centro-de-masas y la ecuación escalar de la energía, también se obtiene que  $-\Delta G_\xi = \bar{F}L_0$ . Si se mide la velocidad final  $v_f$  se puede hacer una estimación del gasto energético que exige el gasto de la persona.

Este proceso de una persona que se empuja contra una pared y se desplaza, es un ejemplo de un sistema articulado dotado de fuentes internas de energía libre que es capaz de moverse a sí mismo en su interacción con un cuerpo de masa cuasi-infinita, empleando fuerzas internas, que no se especifican, y utilizando para ello una fuerza externa que no realiza trabajo, aunque sí ejerce un impulso, sobre el sistema.

La fuerza  $\bar{F}$  que ejerce la pared sobre la persona es sólo un intermediario que permite la transformación de la energía bioquímica en energía cinética, sin ella misma realizar trabajo.

Este proceso de producción de energía mecánica es, en principio reversible. Puesto que se ha supuesto que el calor  $Q = T\Delta S_\xi$  intercambiado con el foco térmico es el necesario para compensar la posible disminución de la entropía en la reacción química de los músculos de la persona, el proceso como un todo se ha desarrollado sin aumento de la entropía del universo,  $\Delta S_U = 0$ . La reversibilidad del proceso se pone de manifiesto desde el momento en que, idealmente, pero sin contravenir ninguna ley de la física, la energía mecánica producida se puede transformar completamente en otros tipos de energía mecánica, eléctrica, química, particularmente, en el aumento de la función de Gibbs de una reacción química en  $-\Delta G_\xi$ .

### A. Descripción en el referencial $S_A$

Aplicando la matriz de proyección  $\Theta(V)$  a la ecuaciones obtenidas en  $S_\infty$  para este proceso, se obtienen las ecuaciones matriciales del centro-de-masas,

$$\Delta \mathcal{K}_{cm,A} = \bar{F} \mathcal{L}_{cm,A},$$

con

$$\begin{pmatrix} v_L Mv \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_L \bar{F}t_0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{F}(L_{cm} - Vt_0) \end{pmatrix},$$

y de la energía

$$\Delta K_{cm,A} + \Delta U_\xi = \bar{F} \mathcal{L}_{F,A} + \mathcal{W}_\xi + \mathcal{Q}_\xi,$$

con

$$\begin{pmatrix} v_L Mv \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_\xi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_L t_0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{F}Vt_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P\Delta V_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T\Delta S_\xi \end{pmatrix},$$

en el sistema de referencia  $S_A$ , en configuración estándar con respecto a  $S_\infty$ , con velocidad  $V$ . Se obtienen las ecuaciones en el referencial  $S_A$

$$M(v-V) + MV = \bar{F}t_0,$$

$$\frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \bar{F}(L_{cm} - Vt_0),$$

$$\frac{1}{2}M(v-V)^2 - \frac{1}{2}MV^2 = -\bar{F}Vt_0 - \Delta G_\xi.$$

La descripción corresponde a un proceso en el que el centro-de-masas se desplaza en el referencial  $S_A$  en  $L_{cm,A} = L_{cm} - Vt_0$  y la fuerza  $\bar{F}$  tiene asociado un desplazamiento  $L_{F,A} = -Vt_0$ . Cada una de las ecuaciones obtenidas en  $S_A$  se puede expresar como una combinación lineal de ecuaciones previamente obtenidas en  $S_\infty$ . Además también en  $S_A$  se tiene que  $\Delta G_\xi = \bar{F}L_{cm}$ , por lo que el gasto energético de la persona durante el proceso es un invariante relativista del formalismo matricial.

Si la persona, moviéndose sobre patines con velocidad  $v$  chocara contra una pared y se detuviera por completo, se tendrían (admitiendo que la fuerza, en sentido contrario, que ejerce la pared sobre su mano para frenarle es la misma que ejerció para acelerarle) se tiene la ecuación matricial de la energía

$$\begin{pmatrix} -v_L Mv \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}Mv^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_L \bar{F}t_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix},$$

con

$$Mv = \bar{F}t_0,$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \bar{F}L_{cm},$$

$$-\frac{1}{2}Mv^2 = Q.$$

Las ecuaciones mecánicas que se obtienen son las mismas para ambos procesos, siendo la ecuación del primer principio muy diferente en el caso de la aceleración (reversible, función de Gibbs) y en el de frenado (irreversible, calor).

## X. CONCLUSIONES

Para resolver completamente problemas en los que intervengan máquinas térmicas que se mueven a sí mismas (trenes, coches, personas, etc.), es necesario considerar tanto la segunda ley de Newton, por ejemplo, en su forma de ecuación del centro de masas  $d\mathcal{K}_{\text{cm}} = (\sum_j \vec{F}_{\text{ext},j}) \cdot d\vec{L}_{\text{cm}}$ , así como el primer principio de la termodinámica expresado como  $d\mathcal{K}_{\text{cm}} + dU = \sum_j (\vec{F}_{\text{ext},j} \cdot d\vec{L}_j) + \delta Q$ . De forma semejante, se necesitan ambas leyes para describir los efectos térmicos que se producen en procesos en los que intervienen fuerzas disipativas y en los que parte de la energía mecánica inicial del sistema se pierde como tal.

El formalismo matricial desarrollado, con las matrices definidas, las ecuaciones matriciales postuladas y las matrices de transformación entre referenciales encontradas, integra en la *ecuación matricial de la energía*

$$d\mathcal{K}_{\text{cm}} + \sum_n dU_n = \sum_j \delta \mathcal{W}_j^{\text{ext}} + \delta Q,$$

tanto la segunda ley de Newton como el primer principio de la termodinámica, lo que permite resolver de forma sistemática problemas de mecánica y termodinámica. Así, el formalismo matricial es especialmente indicado para tratar con la descripción física de aquellos procesos que, implicando disipación o producción de energía mecánica, exigen que se consideren tanto las leyes de la mecánica como las leyes de la termodinámica para obtener una descripción completa de dichos procesos.

Para un proceso de traslación llevado a cabo por una máquina térmica como la representada en la Fig. 1, se tiene la ecuación matricial de la energía [2]

$$\begin{pmatrix} v_L M v_{\text{cm}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta U_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_L F t_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \Delta V_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \Delta S_\xi \end{pmatrix},$$

siendo  $F$  la fuerza externa que se ejerce sobre las ruedas, fuerza que no realiza trabajo, con

$$\begin{aligned} M v_{\text{cm}} &= F t_0, \\ \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 &= F L_{\text{cm}}, \\ \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 &= -\Delta G_\xi, \end{aligned}$$

donde  $\Delta G_\xi = \Delta U_\xi + P \Delta V_\xi - T \Delta S_\xi$  es la magnitud relacionada con el consumo del combustible que hace que la máquina se mueva.

## Formalismo matricial para la mecánica y la termodinámica. I. Traslación

Este formalismo matricial permite una consideración conjunta de procesos y fenómenos que en física clásica suelen tratarse de forma separada y, a veces, de manera equivocada. En la aplicación de este formalismo las diversas magnitudes matriciales se deben articular de tal precisa manera que se pueden evitar los errores que a veces se cometen en el tratamiento habitual de este tipo de problemas.

Las ventajas de este formalismo matricial para física clásica, posiblemente, más para los profesores que para los alumnos, serían, entre otras:

1. Si las ecuaciones se expresan en forma matricial, su transformación entre referenciales es directa.
2. Las magnitudes espacio-tiempo, velocidad, aceleración, etc., se transforman automáticamente (sin errores) entre referenciales.
3. El principio de relatividad se cumple automáticamente: (i) las ecuaciones matriciales tienen la misma forma funcional en todos los referenciales inerciales y (ii) las ecuaciones vectoriales o escalares en un referencial, por ejemplo  $S_A$ , son combinación lineal de las ecuaciones vectoriales y escalares en  $S$ , y viceversa.
4. Introduciendo dos ecuaciones matriciales diferentes, la *ecuación matricial del centro de masas* y la *ecuación matricial de la energía* (aunque ésta última incluye la información proporcionada por la primera) se evitan errores conceptuales importante, como, por ejemplo, confundir la ecuación del centro de masas con la ecuación del primer principio de la termodinámica.

## REFERENCIAS

- [1] Sherwood, B. A., *Pseudowork and real work*, Am. J. Phys. **51**, 597-602 (1983).
- [2] Güémez, J. and Fiolhais, M., *Forces on wheels and fuel consumption in cars*, Eur. J. Phys. **34**, 1005-1013 (2013).
- [3] Bauman, R. P., *Physics that textbook writers usually get wrong, I. Work*, Phys. Teach. **30**, 264-269 (1992).
- [4] Zemansky, M. W. and Dittman, R. H., *Heat and Thermodynamics: An Intermediate Textbook*, 7th Ed. (McGraw-Hill International Editions, USA, 1997).
- [5] Güémez, J. and Fiolhais, M., *From mechanics to thermodynamics: analysis of selected examples*, Eur. J. Phys. **34**, 345-357 (2013).
- [6] Güémez, J., *Fuerzas que no realizan trabajo*, Rev. Esp. Fis. **27**, 3, 59-61 (2013).
- [7] Güémez, J., *Special Relativity and textbook exercises*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 3, 537-543 (2011).
- [8] Güémez, J. and Fiolhais, M., *The physics of aywalking robot*, Phys. Educ. **48**, 455-458 (2013).
- [9] Kleppner, D. and Kolenkow, R. J., *An Introduction to Mechanics*, (Cambridge U. Press, 2010), p. 451.
- [10] Galili, I. and Kaplan, D., *Extending the application of the relativity principle: Some pedagogical advantages*, Am. J. Phys. **65**, 328-335 (1997).

*J. Güémez & M. Fiolhais*

[11] Güémez, J., *Es posible una termodinámica relativista*, Rev. Esp. Fis. **24**, 47-57 (2010).

[12] Güémez, J., *An undergraduate exercise in the first law of relativistic thermodynamics*, Eur. J. Phys. **31**, 1209-1232 (2010).

[13] Freund, J., *Special Relativity for Beginners. A Textbook for Undergraduates*, (World Scientific, Singapore, 2008).

[14] Güémez, J. y Fiolhais, M., *Formalismo matricial para mecánica y termodinámica. II. Rotación*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **8**, 4, (2014).

[15] Güémez, J. and Fiolhais, M., *A 4-vector formalism for classical mechanics*, Rev. Bras. Ens. Fis. **35**, 4, 4310 (2013).

[16] Hecht, E., *How Einstein confirms  $E = mc^2$* , Am. J. Phys. **79**, 591-600 (2011).

[17] Hilborn, R. C., *Let's ban work from Physics* Phys. Teach. **38**, 447 (2000).

[18] Mallinckrodt, A. J. and Leff, H. S., *All about work*, Am. J. Phys. **60**, 356-365 (1992).

[19] Penchina, C. M., *Pseudowork-energy principle*, Am. J. Phys. **46**, 295-296 (1978).

# Alcance y limitaciones en la axiomatización termodinámica de Carathéodory



**Rafael Andrés Alemañ Berenguer**<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal (desp. A Campo Bagatin), Universidad de Alicante, Carretera San Vicente del Raspeig S.N., 03690 San Vicente del Raspeig (Alicante), Spain.*

<sup>2</sup>*Instituto de Física Aplicada a las Ciencias y la Tecnología, Universidad de Alicante, Carretera San Vicente del Raspeig S.N., 03690 San Vicente del Raspeig (Alicante), Spain.*

**E-mail:** raalbe.autor@gmail.com

(Recibido el 3 de Febrero de 2014, aceptado el 14 de Agosto de 2014)

## Resumen

Al matemático de origen griego Constantin Carathéodory se debe la primera organización axiomática de la termodinámica en 1909. Y aunque se consideró durante muchos años que se trataba de una axiomatización completa, los avances y nuevos desarrollos de la termodinámica en la segunda mitad del siglo XX pusieron de manifiesto las limitaciones y las carencias de tal formalización. El reconocimiento de esas insuficiencias no se ha reflejado en muchos libros de texto y cursos introductorios de termodinámica, que siguen presentando la formulación de Carathéodory como algo definitivo.

**Palabras clave:** Termodinámica, Carathéodory, axiomatización, entropía.

## Abstract

The first axiomatic organization of thermodynamics was due to Constantin Carathéodory, Greek mathematician who published it in 1909. Although for a long time that axiomatization was regarded as a complete work, progress and new developments in thermodynamics during the second half of the twentieth century put forwards the limitations and lacks of such formalism. The acquaintance of that defectiveness has not been taken in many textbooks and introductory courses of thermodynamics, where Carathéodory's presentation is still stated as the ultimate one.

**Keywords:** Thermodynamics, Carathéodory, axiomatization, entropy.

**PACS:** 05.70.-a, 01.65.+g, 02.30.Jr.

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Entre los problemas que el matemático alemán David Hilbert propuso para su resolución a lo largo del siglo XX, en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900, figuraba en sexto lugar la axiomatización de las ciencias físicas. Tal como el propio Hilbert había hecho en el terreno de la geometría, se trataba de organizar axiomáticamente el aparato matemático de la física en sus diversas disciplinas. Nadie dudaba que la justificación última de la validez de una teoría física, se hallaba en su correspondencia con los hechos experimentales. Pero también se sabía que las teorías matemáticas que configuran el esqueleto formal de la física, eran susceptibles de organizarse de modo axiomático, como cualquier estructura abstracta.

En el ámbito de la termodinámica, fue el matemático Constantin Carathéodory (1873–1950) quien decidió responder al reto. Como consecuencia de ello, en 1909 publicó su trabajo sobre la fundamentación axiomática de la termodinámica, que –tras pasar desapercibida durante unos

años– acabó por convertirse en una obra de referencia en su campo. La brillante y sólida reputación profesional de Carathéodory, junto con el apoyo recibido por algunos de los más destacados físicos de la época, se unieron para conseguir que esta axiomatización termodinámica se aceptase con muy pocas discusiones sobre su verdadero significado y aplicabilidad. Es cierto que incluso en sus primeros momentos surgieron voces discrepantes sobre el supuesto carácter definitivo de la axiomatización termodinámica de Carathéodory. Pero en todos los casos las críticas se consideraron accesorias, y poco importantes los defectos por ellas revelados. Así, este formalismo se fue robusteciendo a través de los años con la fuerza de la tradición.

La situación cambió en la segunda mitad del siglo XX, cuando importantes progresos en la termodinámica lejos del equilibrio, en los procesos irreversibles y en los fenómenos no lineales, propició la revisión de algunos formatos axiomáticos utilizados en física, como fue el caso de la termodinámica. Entonces, una revisión sin prejuicios del trabajo de Carathéodory arrojó luz sobre múltiples

deficiencias que años antes habían sido ignoradas por sus contemporáneos.

Pese a ello, el reconocimiento de esas limitaciones no se ha trasladado a numerosos libros de texto, donde la axiomatización de Carathéodory, o bien no se menciona porque su vigencia se da por descontada, o se cita como un argumento de autoridad sin examinar su virtudes y defectos con ánimo pedagógico. Esta segunda opción sería sin duda la mejor ya que facilitaría una mejor comprensión de los puntos de vista que se incorporaron más o menos explícitamente en la formulación axiomática de 1909, permitiendo entender así dónde se encuentran sus carencias y a qué se deben éstas.

## II. LA OBRA CIENTÍFICA DE CONSTANTIN CARTHÉODORY

Miembro de la élite de la sociedad griega de su tiempo, cuando el país aún formaba parte del Imperio Otomano, Constantin Carathéodory (Figura 1) nació en Berlín ya que su padre desempeñaba la función de embajador del gobierno turco ante el recién establecido Estado alemán. Durante su niñez viajó con asiduidad a Berlín, Cannes, Constantinopla y San Remo, además de las habituales visitas a su familia en Grecia [1].

Para realizar otros cometidos diplomáticos, en 1875 la familia se trasladó a Bruselas, donde Constantin ingresó como alumno de ingeniería en la Academia Militar Belga en 1891. Allí recibió una sólida instrucción en cálculo, mecánica, astronomía, probabilidad, geodesia, geometría descriptiva y termodinámica. Tras graduarse en 1895, en el curso de sus viajes por Europa y Asia Menor, colaboró con su primo Ioannis Aristarchis en la construcción de una red de carreteras en la isla de Samos.



FIGURA 1. Constantin Carathéodory.

En el verano de 1900, Carathéodory se matriculó para estudiar matemáticas en la Universidad Friedrich Wilhelm de Berlín, más tarde renombrada como Alexander Humboldt. Esta decisión, que suponía abandonar una prometedora carrera como ingeniero, despertó graves reticencias en su familia, e incluso dudas sobre su futuro en el propio Constantin. Finalmente eligió –con acierto– dedicar el resto de su vida a las matemáticas. Para ello escogió la universidad de Berlín en lugar de marcharse a Paris, porque en la capital alemana tenía menos parientes y así pensó que se expondría a menos distracciones. Por tanto, fue debido a una decisión casual tomada por razones puramente privadas lo que determinó que Carathéodory participase en primera línea en los mejores años de la matemática alemana del siglo XX.

Cuando el centro de la vida intelectual se trasladó desde Berlín a la provinciana ciudad de Gotinga –que ya contaba sobradamente con una brillante tradición académica– Carathéodory siguió mismo camino en el verano de 1902. Yen su nueva residencia trabó amistad con investigadores de la talla de Zermelo, Born, Blumenthal, Minkowski, Klein y Hilbert. Klein se sintió particularmente fascinado por la facilidad que Carathéodory dominaba la geometría descriptiva de Monge, y la amistad que unió a los dos hombres duraría el resto de sus vidas.

De aspecto aristocrático, rebosando autoconfianza y con el dominio de varios idiomas, Carathéodory pronto se unió a las tertulias de los estudiantes más notables en la taberna del Oso Negro, típico lugar de ocio en Gotinga, donde inició su amistad con el físico Max Born.

En 1904 regresó a la Grecia de sus antepasados, y sabiendo la dificultad de obtener una plaza en la única universidad del país, intentó conseguirla en alguna Academia militar o naval. Pero no tuvo éxito en su empeño, y volvió de nuevo a Gotinga para trabajar en análisis complejo y geometría conforme, hasta que fue nombrado profesor de una universidad en Bonn. Más tarde impartió sus lecciones en las universidades de Hannover, Breslau, Gotinga y Berlín-

En 1909 Constantin contrajo matrimonio con su tía Euphrosyne, siguiendo la tradicional costumbre de su familia de celebrar enlaces endogámicos para reforzar su posición financiera y su influencia social en el Imperio Otomano durante generaciones. No obstante, la unión resultó afortunada y de ella nacieron dos hijos, Stephanos y Despina. La familia Carathéodory disfrutó de una vida apacible y relativamente acomodada hasta que las penurias y escaseces de la I Guerra Mundial vinieron a interrumpirla. Así ocurrió especialmente en el invierno de 1917, cuando Constantin hubo de procurarse la leche para sus hijos criando cabras en el sótano de su casa.

El año en que finalizó el conflicto, 1918, vió la publicación del tratado de Carathéodory sobre teoría de la funciones reales. En él se probaba que una ecuación del tipo  $dx/dt = f(x, t)$ , tan solo necesita estar acotada en  $t$  para cada valor fijado de  $x$  si se ha de garantizar la existencia y unicidad de la solución de dicha ecuación. Este resultado, aparentemente anecdótico en aquel

momento, se encuentra en la base de los posteriores avances en la teoría de optimización y control de procesos, desarrollada en la década de 1950.

El fin de la I Guerra Mundial y el consiguiente colapso del Imperio Otomano, también permitió que Grecia se apoderase de territorios hasta entonces bajo dominio turco. En opinión de los negociadores del Tratado de Versalles, tales anexiones estaban justificadas con el argumento de que aquellos territorios habían sido habitados por poblaciones griegas desde la época de la Guerra de Troya. Entre las nuevas ciudades unidas a Grecia se encontraba Esmirna (hoy en día Izmir), a la que fue enviado Carathéodory por su amigo el Primer Ministro Venizelos con la misión de organizar una universidad local.

Sin dudarle, el gran matemático griego aceptó el reto y trasladó a su familia a Esmirna. A continuación emprendió un viaje por Europa para adquirir libros y materiales con los que crear bibliotecas, laboratorios y talleres que hicieran viable la nueva universidad. En 1921 el propio Carathéodory escogió la divisa del nuevo centro académico “Luz del Este”, convencido como estaba que aquella universidad sería la más distinguida de todas las de Oriente.

Aquel sueño terminó abruptamente cuando las fuerzas turcas de Kemal Atataurk ocuparon Esmirna, dando con ello por concluida la reconquista de Anatolia. Antes de la llegada de los turcos, Carathéodory y el resto del personal universitario tuvieron que darse a la fuga tratando de salvar todo el material universitario que les fue posible. Aquel suceso acabó con cualquier esperanza nacionalista de construir una “Gran Grecia” que abarcara los territorios de su área de influencia desde los tiempos homéricos.

Carathéodory regresó como profesor de la universidad de Atenas, pero todos los esfuerzos que desplegó para situar a Grecia en un puesto relevante dentro de la ciencia internacional resultaron baldíos. La decepción que sufrió por ello le animó a aceptar una invitación del célebre físico Arnold Sommerfeld para volver a Alemania, donde permaneció dando clases hasta el final de sus días.

### III. LAS ECUACIONES DE PFAFF EN TERMODINÁMICA

La axiomatización de Carathéodory –inspirada en la búsqueda de relaciones geométricas entre los estados que componen un proceso termodinámico– se sirve extensamente de las formas diferenciales lineales originalmente estudiadas por J.F. Pfaff (1765–1825). Fue este matemático alemán (Figura 2) quien expuso el primer método general para integrar ecuaciones diferenciales parciales de primer orden entre los años 1814 y 1815.

Las relaciones entre variables termodinámicas suelen presentarse como formas diferenciales lineales del tipo

$$df = \sum \Phi_i d\phi_i, \quad (1)$$

llamadas 1-formas, donde el subíndice  $i$  va de 1 hasta  $n$ , y las  $\Phi_i$  son funciones de las variables independientes  $\phi_i$ . Cuando  $df = 0$  tenemos las llamadas ecuaciones diferenciales de Pfaff.

Un caso sencillo de aplicación de estas 1-formas se da en relación con la primera ley de la termodinámica, comúnmente interpretada en términos de la conservación de la energía. En un proceso adiabático la variación de la energía interna se anula,  $dU = 0$ , y podemos escribir

$$0 = C_v dT - PdV, \quad (2)$$

donde  $C_v$  es el calor específico a volumen constante,  $T$  la temperatura,  $P$  la presión y  $V$  el volumen del sistema considerado.

Para un mol de un gas ideal ( $PV = RT$ ) la igualdad (2) puede reescribirse como

$$0 = (C_v/T)dT - (R/V)dV. \quad (3)$$

Se trata de una ecuación de Pfaff con solución exacta siempre que se cumpla la condición

$$\partial(C_v/T)/\partial V = \partial(R/V)/\partial T. \quad (4)$$

Que en efecto se cumple, pues ambas derivadas parciales se anulan. Eso significa que ha de existir una función  $f(V, T)$  capaz de satisfacer la relación:

$$f(V, T) = \int (C_v/T)dT - \int (R/V)dV = \text{constante}. \quad (5)$$

De [5] es posible obtener la bien conocida ecuación para las transformaciones adiabáticas e los gases ideales,  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ , donde  $\gamma = (C_p/C_v)$  y  $R = C_p - C_v$ .



FIGURA 2. Johann Friedrich Pfaff.

Cuando el proceso no es adiabático, la igualdad (2) para un mol de gas ideal se convierte en

$$dQ = C_v dT - (RT/V)dV. \quad (6)$$

En este caso ya no es cierto que  $\partial(C_v)/\partial V$  sea igual a  $\partial(RT/V)/\partial T$ , de modo que la magnitud  $Q$  –llamada “calor”– no es una diferencial exacta, y se suele escribir como  $\delta Q$ .

Sin embargo, como sucede con otras ecuaciones diferenciales, podemos buscar un factor integrante, es decir, un factor que multiplique ambos miembros de la igualdad convirtiéndola en una diferencial exacta. Ese factor integrante es  $1/T$ , y la función de estado así obtenida  $\delta Q/T$  es la entropía,  $dS$ .

La existencia de un factor integrante para estos casos se establece como un resultado relevante en el conocido como “Teorema de Caratheodory” [2]. De acuerdo con él, dada una forma lineal  $\sum X(x_i)dx_i$ , si en el entorno de un punto existen otros puntos a los que no se puede acceder a lo largo de las curvas que son solución de la ecuación  $\sum X(x_i)dx_i = 0$ , entonces existen funciones  $A(x_i)$  y  $\zeta(x_i)$  tales que  $\sum X(x_i)dx_i = Ad\zeta$ .

En términos termodinámicos, el teorema de Caratheodory garantiza la existencia de un factor multiplicativo que hace integrable la ecuación diferencial de un proceso adiabático, lo que a su vez asegura la existencia de la función entropía. La primera exposición en inglés de este teorema apareció, curiosamente, en un libro de astrofísica escrito por el científico norteamericano de origen indio, Subrahmanyam Chandrasekhar (1910–1995).

En el capítulo primero de su libro *Introducción al estudio de la Estructura Estelar*, Chandrasekar enuncia las leyes de la termodinámica siguiendo lo que él mismo llama el punto de vista axiomático de Caratheodory [3].

#### IV. AXIOMAS TERMODINÁMICOS

No se puede negar a Caratheodory el mérito de haber sido el primero en ensayar una organización axiomática de la termodinámica. Con sus virtudes y sus defectos, la axiomatización de la termodinámica que él presentó fue el espejo en el que se contemplaron los siguientes autores que intentaron realizar la misma empresa. La intención del gran matemático griego era reformular las leyes de la termodinámica sin recurrir al decimonónico principio establecido por Kelvin y Clausius sobre la imposibilidad de un móvil perpetuo de segunda especie, ni a máquinas ideales efectuando ciclos imaginarios, ni a conceptos tan debatidos entonces como el de flujo de calor.

La similitud de las leyes termodinámicas con axiomas tan antiguos como los de la geometría euclídea, pueden rastrearse –por ejemplo– en el llamado “Principio Cero”, concerniente a la transitividad del equilibrio térmico. Se dice que si  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  son tres sistemas en estado de equilibrio térmico, si  $u_1$  está en equilibrio con  $u_2$  y  $u_2$  lo está con  $u_3$ , entonces  $u_3$  ha de estar necesariamente en equilibrio también con  $u_1$ . El enunciado anterior se asemeja notablemente al primer axioma de la geometría de Euclides

(c. 300 a.C.), según el cual dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

Seguendo esta misma ruta intelectual, en su primer trabajo sobre la axiomática termodinámica [2] Carathéodory comienza con definiendo los estados termodinámicos, la condición de equilibrio entre dos de ellos, y las variables de estado o coordenadas termodinámicas. A continuación se presenta el primer axioma, que determina la variación de la energía interna de un sistema multifase debida al trabajo externo en un proceso adiabático. Algebraicamente tendríamos,

$$U_f - U_i + W = 0, \quad (7)$$

donde  $U_i$  y  $U_f$  son respectivamente los valores inicial y final de la energía interna, y  $W$  es el trabajo externo sobre el sistema.

Nada nuevo hay en realidad en este primer axioma, pues se trata del antiguo enunciado de Clausius que afirma la existencia de una magnitud llamada energía interna,  $U$ , entendida como una propiedad intrínseca cuyos cambios en condiciones adiabáticas son iguales y de signo opuesto al trabajo externo realizado, para un sistema cerrado y en reposo. Sin embargo, en la formulación de Carathéodory el calor ya no se considera una cantidad fundamental sino derivada, que aparece cuando se elimina la restricción de que el proceso termodinámico sea adiabático (es decir, cuando  $\Delta U + W \neq 0$ )

La verdadera originalidad de este artículo llega con el segundo axioma que dice así: “En el entorno de cualquier estado de equilibrio de un sistema (con cualquier número de coordenadas termodinámicas) existen estados que son inaccesibles mediante procesos adiabáticos reversibles”. Este axioma pretende expresar una generalización de nuestra experiencia cotidiana, por la cual sabemos que hay procesos irreversibles de modo tal que unos estrados conducen a otros pero no a la inversa. En otras palabras, si existe un proceso irreversible de transición  $A \rightarrow B$ , no puede ocurrir que exista  $B \rightarrow A$ . En ese sentido,  $B$  es accesible desde  $A$ , aunque  $A$  no es accesible desde  $B$ .

Para un sistema formado por una única sustancia, el segundo axioma de Carathéodory se hace obvio, ya que los procesos adiabáticos reversibles conservan la entalpía. En tales procesos todos los estados alcanzables se representan como puntos sobre una curva para la cual la entropía permanece constante. Aquellos otros estados no situados sobre la curva, no pueden alcanzarse mediante transiciones adiabáticas.

Ahora bien, lo que Carathéodory sostiene es la aplicabilidad de este enunciado a sistemas de múltiples componentes con diversas variables independientes. Aquí es donde interviene el teorema de Carathéodory mencionado en el epígrafe anterior. Con la conjunción de ese teorema y de su segundo axioma termodinámico, el matemático griego muestra a continuación que si en el entorno de un punto dado, correspondiente a las coordenadas  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , hay puntos que no cabe expresar como soluciones de la ecuación de Pfaff:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \dots = 0,$$

entonces para la forma diferencial

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \dots,$$

existe un factor integrante.

La importancia de este razonamiento reside en que, partiendo del primer axioma termodinámico, Carathéodory concluye que la condición adiabática  $dQ = 0$  admite un factor integrante que al multiplicarse por  $dQ$  genera la diferencial exacta de una función cuyos valores son, por tanto, independientes del camino recorrido entre los estados del sistema. Este factor integrante es el inverso de la temperatura absoluta  $1/T$ , y la integral independiente del camino  $\int_{\text{rev.}} (dQ/T)$  es el incremento de entropía,  $\Delta S$ .

Lo cierto es que ni en los axiomas ni en las definiciones se mencionan en modo alguno nociones como las de temperatura absoluta, entropía o calor. Todas ellas se deducen a partir de los axiomas y las definiciones. En el caso concreto del calor, esto en sí mismo ya resulta problemático pues el flujo de calor es una cantidad experimentalmente medible, aunque no es menos cierto que la magnitud conservada en los procesos termodinámicos es la energía, no el calor como tal.

#### IV. DIFUSIÓN Y PRIMERAS CRÍTICAS

Durante los siguientes doce años, la axiomatización termodinámica de Carathéodory pasó desapercibida para la mayoría de la comunidad científica. De ese letargo intelectual la sacó su amigo y físico Max Born, quien en 1921 escribió extensamente sobre este trabajo del matemático griego [4]. Tras ello fueron aumentando los científicos de renombre que destacaron la originalidad de un planteamiento que prescindía del punto de vista tradicional debido a Carnot, Kelvin y Clausius, ligado al comportamiento de ciclos ideales y gases perfectos [5, 6, 7].

La mayoría de los autores que en un principio acogieron favorablemente este tratamiento axiomático, también sintieron la necesidad de simplificarlo para conseguir que fuese accesible a un público más amplio.

Sin embargo, ese objetivo demostró ser más difícil de lo esperado. En las versiones reducidas del trabajo de Carathéodory o bien se perdía gran parte de la originalidad de la obra, o bien se mantenía su carácter novedoso al precio de no avanzar apenas en la simplificación del formalismo. Así ocurrió que entre quienes aceptaron la axiomatización de Carathéodory quedó relegada al nivel de una mera curiosidad matemática que se citaba como fuente de autoridad pero apenas servía para más.

Merece la pena señalar que, uno de los primeras críticas serias al nuevo método provino de la más influyente figura de la física alemana de su tiempo –que era prácticamente como decir de la física internacional– Max Planck. A su juicio el desarrollo de la termodinámica por el camino de Carnot, Kelvin y Clausius era mucho más fiable que la vía de Carathéodory, a la que reprochaba su falta de contacto con la evidencia experimental. Al respecto escribió [6]:

“...nadie hasta ahora ha tratado de alcanzar sólo mediante etapas adiabáticas todo punto en el entorno de cualquier estado de equilibrio, y así comprobar si de veras son inaccesibles, (...), este axioma no nos ofrece el menor indicio que nos permita diferenciar los estados accesibles de los inaccesibles”.

Más receptivo se mostró el profesor de la Universidad de Tasmania (Australia) H.A. Buchdahl, quien tras la Segunda Guerra Mundial publicó una serie de importantes artículos sobre la termodinámica axiomática [8, 9, 10, 11, 12]. Buchdahl podía leer los artículos originales de Carathéodory y Born, y en sus escritos se percibe el interés por difundir esta nueva teoría entre el público científico angloparlante. Y en buena medida lo consiguió, ya que posteriormente florecieron los trabajos [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] que intentaban demostrar la equivalencia entre el método axiomático de Carathéodory y los razonamientos –digamos más “ingenieriles”– de Carnot, Kelvin y Clausius.

#### V. UNA AXIOMATIZACIÓN INSUFICIENTE

Precisamente las tentativas de refinar la axiomatización de Carathéodory en termodinámica, fueron arrojando poco a poco diversas sombras de duda sobre los procedimientos empleados. Una de ellas se cernía sobre un aspecto meramente matemático, lo que no deja de ser sorprendente dada la formación originaria de Carathéodory en matemática y no en física.

Ocurría que el nuevo método daba por descontada la infinita diferenciabilidad de los coeficientes de la forma lineal de Pfaff. Es decir, si tenemos

$$A_1(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 + A_2(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 + \dots + A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n = 0, \quad (8)$$

no hay motivos para esperar o exigir que los coeficientes  $A_j$  sean infinitamente diferenciables. De hecho, puede probarse [23] que basta con asegurar la existencia y continuidad de ciertas derivadas primeras para reconstruir la termodinámica desde un punto de vista analítico.

Otra inexactitud de raíz formal se relaciona con la caracterización de una escala absoluta de temperaturas, realizada a partir del segundo axioma termodinámico en conjunción con el teorema de Carathéodory, antes mencionado. Es verdad que de ellos se deduce la existencia de un factor integrante  $1/T$ , usualmente relacionado con la escala Kelvin. Pero también es cierto que esa función carece de algunas propiedades indispensables para el concepto termodinámico de temperatura. En primer lugar, Carathéodory no prueba que  $T$  sea una función creciente de una escala empírica cualquiera de temperatura  $\theta$  [24, 25].

El rigor y la pertinencia del propio teorema de Carathéodory han sido puestos en tela de juicio por la revisión de algunos autores [26, 27, 28, 29]. En concreto se señala que el factor integrante  $1/T$  tan solo tiene validez local. Por el contrario, una escala verdaderamente absoluta que sirva para definir de manera adecuada la entropía ha de

tener una validez global. Es incluso posible estipular axiomas termométricos que conduzcan a una genuina escala absoluta de temperaturas, compatibles con las dos primeras leyes termodinámicas pero independientes de ellas [30].

Es muy posible que otro de los errores de Carathéodory surgiese como la confusión de un matemático que trata de organizar axiomáticamente una parcela de la física, olvidando que ésta, como ciencia de la naturaleza, presenta sus propias exigencias particulares, en general diferentes de las de la matemática pura. Esta apreciación se justifica recordando que cualquier rama de la física matemática puede construirse en términos de (a) una lista de cantidades primitivas, no definidas, y caracterizadas por las relaciones matemáticas estipuladas para ellas; (b) definiciones de otras cantidades a partir de los conceptos primitivos; (c) axiomas generales establecidos como relaciones generales satisfechos por las nociones primitivas y las cantidades definidas; y (d) teoremas demostrados concernientes a la teoría en su conjunto o a casos particulares matemáticamente bien especificados.

Los axiomas se consideran como principios generales o leyes físicas, por cuanto se refieren a todos los sistemas sometidos a la teoría. Para no estudiar sistemas particulares seleccionados puramente al azar, resulta más útil especificarlos mediante las llamadas relaciones constitutivas; esto es, restricciones que reducen el conjunto de todos los posibles sistemas abarcados por la teoría a una subclase concreta de ellos. La colección de todas las posibles relaciones constitutivas viene delimitada a su vez por los axiomas constitutivos, que son enunciados matemáticos sobre las variables participantes en los axiomas constitutivos. Los principios generales expresan propiedades comunes a todos los sistemas permitidos por la teoría, en tanto que las relaciones constitutivas formalizan la diversidad existente entre tales sistemas.

En su presentación axiomática de la termodinámica Carathéodory no logró distinguir entre principios generales y relaciones constitutivas. Donde Carnot, Kelvin o Clausius habían considerado procesos con cualquier velocidad apropiada, Carathéodory tan solo se ocupa de procesos cuasi-estáticos. Y así ocurre porque confunde los enunciados referidos a una clase ampliamente general de sistemas en equilibrio, con las estrictas limitaciones sobre las funciones constitutivas que resultan de aplicar los axiomas de la termodinámica a sistemas que sufren algún tipo de proceso de evolución en el tiempo.

Una de las consecuencias de esta confusión repercute sobre el papel de los procesos adiabáticos en el nuevo método. Debido a su intento de expulsar de la termofísica la noción básica de “calor”, Carathéodory presupone que existen tantas curvas adiabáticas de tantas clases como él necesite para sus propósitos formales. Es cierto que las adiabáticas, ya sea en termostática o en termodinámica, tienen una importancia capital. Pero parece que el matemático griego no advirtió que la existencia y características de tales curvas adiabáticas es una propiedad constitutiva deducida al aplicar a las ecuaciones diferenciales de la teoría las condiciones particulares

implicadas por las funciones constitutivas que definen el sistema termodinámico.

Son los calores específicos y latentes de un cuerpo los que determinan la forma de las adiabáticas a través de las ecuaciones diferenciales correspondientes. Y aunque Carathéodory ni siquiera menciona los calores latentes en su formalización, de haberlo intentado no hubiese podido determinar la forma de las adiabáticas sin conocer la función energía del sistema en estudio. Esa función suele definirse en función de la temperatura y el volumen, a diferencia de las variables independientes utilizadas por Carathéodory, la presión y el volumen. Desde luego, no podría haberse servido de la función entropía ni de ninguna derivada con respecto a ella, ya que con el fin de probar la existencia de la entropía, Carathéodory había presupuesto desde el inicio la existencia de las curvas adiabáticas.

El error principal que subyace en esta línea de razonamiento, es el empeño de Carathéodory por definir el calor en términos del trabajo, expulsando con ello un concepto que consideraba confuso y oscuro. Este intento estaba condenado al fracaso desde el principio, puesto que, entre otros motivos, la mera aplicación de un trabajo mecánico sobre el sistema no puede explicar la diferencia de efectos físicos producidos por el suministro del mismo flujo de calor a distintas temperaturas. De nada sirve tratar de definir el calor como una clase de trabajo, sin advertir que – por ejemplo– los procesos adiabáticos son conceptos genuinamente primitivos en termodinámica, y por ello no se pueden deducir de argumentos mecánicos [31].

Como consecuencia de todo ello Carathéodory considera implícitamente que las variables mecánicas (presión y temperatura) bastan para definir cualquier sistema termodinámico, y de ahí resulta que sus axiomas no son aplicables al agua en su rango de comportamiento anómalo [32]. Por el contrario, autores pioneros como Carnot, Kelvin y Clausius adoptaron en sus suposiciones básicas la temperatura y el volumen como variables independientes, en función de las cuales operaban los calores específicos y latentes. Gracias a esa elección, sus suposiciones básicas se aplicaban a cualquier clase de fluidos, agua incluida, en todos sus rangos de comportamiento.

Llama especialmente la atención que un matemático tan competente como Carathéodory no tratase de formalizar la idea intuitiva de “grado de calor” (es decir, la noción cualitativa de cuán caliente está un objeto) recurriendo a una variedad unidimensional. Una carencia tal podía comprenderse en los pioneros de la termodinámica, pero no en un matemático que escribía cinco décadas después del histórico trabajo de Riemann sobre variedades diferenciables. Representando el grado de calor mediante una variedad unidimensional, se puede interpretar la temperatura como una aplicación sobre dicha variedad. Una escala será “absoluta” cuando a su carácter global una las propiedades deseables para el concepto físico de temperatura.

Pero sin duda la mayor controversia se cernió sobre el segundo axioma termodinámico en la formulación de Carathéodory. Como había dicho Planck al respecto, no parecía haber base empírica alguna para el célebre axioma

## V. CONCLUSIONES

de inaccesibilidad. Se trata de un postulado que se impone sin otra justificación que su aparente capacidad para desembocar en conclusiones coincidentes con hechos experimentales bien conocidos y aceptados. Obviamente, el propio axioma queda al margen de cualquier contrastación experimental, pues incluso en principio resulta imposible comprobar que en cada entorno de cualquier punto dado hay otros puntos que no pueden unirse con el primero mediante algún miembro de un conjunto infinito de trayectorias.

En agudo contraste con el método de Carathéodory, el planteamiento de Carnot –y en parte también el de Clausius– partía explícitamente de las propiedades deducidas al observar experimentalmente el comportamiento del calor en los cuerpos más sencillos. Se trataba de un procedimiento tan natural en termodinámica como el uso del péndulo simple en los desarrollos teóricos de la mecánica. Por este camino resulta posible demostrar la existencia no solo de la entropía, con todas sus propiedades usuales, sino también de la energía interna. Asimismo, se puede llegar a un tratamiento plenamente general de los sistemas reversibles, definido como el producto de la variedad unidimensional asociada con el grado de calor por la variedad  $n$ -dimensional del conjunto de estados del sistema. El calor no se define en modo alguno; se acepta como un término primitivo y a continuación se prueba que es interconvertible con el trabajo y la energía interna.

Las axiomatizaciones subsiguientes se extendieron en dos direcciones. Una de ellas se limitaba a seguir la estela de Carathéodory, considerando únicamente sistemas reversibles y discretos. El otro camino axiomático se abrió en la década de 1960, con el propósito de extender los conceptos y la estructura matemática de la termodinámica de sistemas en general, tanto deformables como sujetos a procesos irreversibles (disipación de calor, fricciones internas, etc.). Esta clase de formulaciones tienen la ventaja de que por sí mismas, al ser teorías de campos, especifican el efecto del entorno –una noción confusa en los trabajos pioneros de la termodinámica– a través de las correspondientes condiciones de contorno [33, 34, 35, 36].

Entonces se comprendió que en realidad eran plenamente aceptables problemas cuyo planteamiento se había juzgado antes fuera de lugar como: la propagación de ondas de presión en el interior de los cuerpos, el efecto de las deformaciones severas sobre la capacidad de los materiales de conducir calor o electricidad, la transferencia de calor como respuesta de un cuerpo a las tensiones internas o externas, o el transporte difusivo de materia y energía dependiendo de la velocidad de la deformación del sistema [37, 38].

Ya en el segundo tercio del siglo XX se comenzó a explorar la posibilidad de vincular la irreversibilidad típica de la termodinámica con la noción de "inestabilidad dinámica". Este género de inestabilidad es propio de sistemas gobernados por un tipo particular de ecuaciones diferenciales no lineales. Y es en la riqueza de los sistemas dinámicos no lineales donde muchos investigadores esperan encontrar la conexión entre los comportamientos reversibles e irreversibles de los fenómenos termodinámicos [39, 40].

El trabajo publicado en 1909 por Carathéodory fue el primer intento de organizar axiomáticamente el cuerpo de conocimientos que abarcaba la termodinámica en esos momentos. Por primera vez se empleaban las formas diferenciales de Pfaff en el ámbito de esta ciencia, para demostrar resultados que hasta entonces habían sido aceptados por pura evidencia empírica. Las demostraciones matemáticas, obviamente, no concedían una mayor legitimidad a los resultados experimentales de una ciencia natural, pero sí reforzaban la coherencia lógica de su estructura interna.

Justamente porque nada nuevo parecía añadir a la sustancia de su ciencia, la difusión del formalismo de Carathéodory se dió con mucha lentitud entre los especialistas en termodinámica. Muy pocos ponían en duda la pertinencia de la nueva formulación, si bien la mayoría la consideraban demasiado abstracta y poco pedagógica para enseñarla a estudiantes de un nivel no muy avanzado.

Sin embargo, los progresos realizados a lo largo del siglo XX sobre los aspectos teóricos de la termodinámica, comenzaron a revelar las deficiencias y errores en la axiomatización de Carathéodory. En los años en que el matemático griego presentó sus axiomas, existía una difusa convicción acerca de la imposibilidad de incluir en el terreno termodinámico los fenómenos irreversibles, y en general los procesos no lineales, alejados del equilibrio. Atravesado el ecuador del siglo XX quedó claro que no era así; una adecuada generalización de los principios de la termodinámica clásica permitía ocuparse de toda clase de procesos, lineales o no lineales, en equilibrio o fuera de él.

Esta perspectiva renovadora abrió la puerta a otras revisiones de la axiomatización de Carathéodory, y nuevas insuficiencias fueron saliendo a la luz. Desde errores meramente formales –requisitos matemáticos, como la existencia o continuidad de los coeficientes diferenciales– hasta conceptos malinterpretados o introducidos en contextos impropios, jalonaban la primera axiomatización de la termodinámica.

Curiosamente, las críticas a las que se vio sometida la obra axiomática de Carathéodory pasaron incluso más desapercibidas que la propia axiomatización en sus inicios.

Por una parte, los autores que aceptaban tales críticas consideraron innecesario introducir en sus textos la discusión de un método que parecía defectuoso. Por otro lado, quienes no compartían la desaprobación por el método de Carathéodory tampoco hicieron mención de sus posibles insuficiencias. La consecuencia de todo ello es que muy poco de las discusiones sobre su validez trascendieron a los estudiantes de termodinámica, salvo en cursos de elevada especialización.

Como sucede en muchas ocasiones, los errores suelen ser más instructivos que los aciertos, y así ocurre con la axiomatización termodinámica de Carathéodory. Por sí misma tiene el mérito de un trabajo pionero de formalización en un campo donde nadie antes lo había intentado. Muchos de sus errores y carencias pueden atribuirse a un conocimiento insuficiente por parte del

matemático griego de los aspectos físicos del tema objeto de axiomatización. Y otra parte de sus fallos, no pequeña, cabe atribuirlos a la interpretación de la propia termodinámica que predominaba en aquellos tiempos, ajena a los procesos alejados del equilibrio. Hoy día, gracias a los avances tanto en el estudio de los sistemas no lineales como en los métodos de axiomatización, tenemos la posibilidad de contemplar con mayor claridad las virtudes y los defectos de la obra de Carathéodory, obteniendo con ello mejores enseñanzas que las proporcionadas por una ciega aceptación o un irreflexivo menosprecio.

## REFERENCIAS

- [1] Georgiadou, M., *Constantin Carathéodory: Mathematics and politics in turbulent times*, (Springer, Berlin, 2004).
- [2] Carathéodory, C. *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik*, Math. Ann. **67**, 355-386 (1909).
- [3] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, (University of Chicago Press, Chicago, 1939).
- [4] Born, M., *Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik*, Physik Z. **22** 218-224, 249-254, 282-286 (1921).
- [5] Landé, A., *Handbuch der Physik*, Vol. 9, (Springer, Berlin, 1926).
- [6] Planck, M., *Über die Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik*, S.B. Akad. Wiss. **53**, 453-463 (1926).
- [7] Pauli, W., *Vorlesungen über Thermodynamik und kinetische Gastheorie*, (Boringhieri, Torino, 1962).
- [8] Buchdahl, H. A., *On the principle of Carathéodory*, Am. J. Phys. **17**, 41-43 (1949a).
- [9] Buchdahl, H. A., *On the theorem of Carathéodory*, Am. J. Phys. **17**, 44-46 (1949b).
- [10] Buchdahl, H. A., *On the unrestricted theorem of Carathéodory and its applications in the treatment of the second law of thermodynamics*, Am. J. Phys. **17**, 212-218 (1949c).
- [11] Buchdahl, H. A., *Integrability conditions and Carathéodory's theorem*, Am. J. Phys. **22**, 182-183 (1954).
- [12] Buchdahl, H. A., *Simplification of a proof of Carathéodory's theorem*, Am. J. Phys. **23**, 65-66 (1955).
- [13] Pippard, A. B., *Elements of Classical Thermodynamics*, (Cambridge University Press, New York, 1957).
- [14] Turner, L. A., *Simplification of Carathéodory's treatment of thermodynamics*, Am. J. Phys. **28**, 781-786 (1960).
- [15] Sears, F. W., *A simplified simplification of Carathéodory's treatment of thermodynamics*, Am. J. Phys. **31**, 747-752 (1963).
- [16] Landsberg, P. T., *A deduction of Carathéodory's principle from Kelvin's principle*, Nature **201**, 485-486 (1964).
- [17] Pippard, A. B., *Response and Stability: An Introduction to the Physical Theory*, (Cambridge University Press, London, 1985).
- [18] Landsberg, P. T., Tikhonov A. N. and Landberg, P. T., *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, (Dover, New York, 1991).
- [19] Landsberg, P. T. (ed.), *The Enigma of Time*, (Hilger, London, 1983).
- [20] Sears, F. W., *An introduction to thermodynamics, the kinetic theory of gases, and statistical mechanics*, (Addison-Wesley, 2nd Edition, Reading, MA, 1953).
- [21] Sears, F. W. and Salinger, G.L., *Thermodynamics, Kinetic Theory and Statistical Mechanics*, (Addison-Wesley, 3rd Edition, Reading, MA, 1976).
- [22] Landsberg, P.T., *Foundations of thermodynamics*, Rev. Mod. Phys. **28**, 363-392 (1956).
- [23] Truesdell, C. and Bharatha, S., *The concepts and logic of classical thermodynamics as a theory of heat engines rigorously developed upon the Foundation Laid by S. Carnot and F. Reech*, (Springer-verlag, New York, 1977).
- [24] Cooper, J. L. B., *The foundations of thermodynamics*, Journal of Mathematics Analysis and its Applications, **17**, 172-193 (1967).
- [25] Walter, J., *On the definition of the absolute temperature - a reconciliation of the classical method with that of Carathéodory*, Proceedings of the Royal Society (London) A **82**, 87-94 (1978).
- [26] Whaples, G., *Carathéodory's temperature equations*, Journal of Rational Mechanics and Analysis **80**, 333-385 (1982).
- [27] Bernstein, B., *Proof of Carathéodory's local theorem and its global application to thermostatics*, Journal of Mathematical Physics **1**, 222-224 (1960).
- [28] Boyling, J., *An axiomatic approach to classical thermodynamics*, Proceedings of the Royal Society (London) A **329**, 35-70 (1972).
- [29] Serrin, J., *Conceptual analysis of the classical second laws of thermodynamics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **70**, 355-371 (1979).
- [30] Truesdell, C., *Absolute temperatures as a consequence of Carnot's General Axiom*, Archive for History of Exact Sciences **20**, 357-380 (1979).
- [31] Tisza, L., *Generalized thermodynamics*, (MIT Press, Cambridge, USA, 1966).
- [32] Thomson, J. S. and Hartka, T. J., *Strange Carnot cycles*, American Journal of Physics **30**, 26-33, 388-389 (1962).
- [33] Müller, I., *Thermodynamik. die Grundlagen der Materialtheorie*, (Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf, 1973).
- [34] Wilmański, K., *Foundations of phenomenological thermodynamics*, (Pafistwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1974).
- [35] Astarita, G., *An introduction to non-linear continuum thermodynamics*, (Società Editrice di Chimica, Milano, 1975).
- [36] Owen, D., *A first course in the mathematical foundations of thermodynamics*, (Springer-Verlag, New York, 1984).
- [37] Ericksen, J., *A thermokinetic view of stability*, International Journal of Solids and Structure **2**, 573-580 (1966).

- [38] Wang, J., *Modern thermodynamics based on the extended carnot theorem*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011).
- [39] Onsager, L., *The collected works of Lars Onsager*, (World Scientific., Singapur, 1996).

- [40] Kondepudi, D. and Prigogine, I., *Modern thermodynamics. from heat engines to dissipative structures*, (J. Wiley & Sons, New York, 1998).

# Enseñanza y aprendizaje de conceptos termodinámicos con Investigación Dirigida para estudiantes de Bachillerato



María de la Cruz Medina Ramos<sup>1,2</sup>, A. López Ortega<sup>3</sup> y César Mora<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Plantel Ricardo Flores Magón, Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal. Calzada Tlalpan # 3465, Col. Viejo Ejido de Santa Úrsula, Del. Coyoacán, CP.04650. México D. F.

<sup>2</sup>Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria. Instituto Politécnico Nacional. Calzada Legaria # 694. Colonia Irrigación. Delegación Miguel Hidalgo. México, D. F., C. P. 11500.

<sup>3</sup>Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas. Instituto Politécnico Nacional. Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Edificio 9, C. P. 07738, México D. F., México

**E-mail:** maricruzmedina.iems@gmail.com

## Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de una investigación educativa realizada con estudiantes de bachillerato para evaluar el aprendizaje en los temas de calor, temperatura y transmisión de calor. El objetivo fue probar la efectividad de la estrategia didáctica de Investigación Dirigida para favorecer en el estudiante la adquisición de concepciones científicas de calor, temperatura y transmisión de calor. La recolección de los datos se realizó en el semestre 2010-2011-A con 26 estudiantes de bachillerato de primer ciclo de un plantel del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMSDF), que cursaron la asignatura de Física I. Los estudiantes provienen de dos grupos, el experimental en el que se aplicó la Investigación Dirigida y el de control al cual se le dio una instrucción tradicional. Este estudio se evaluó con un test que se aplicó antes y después de desarrollar las temáticas citadas. Dicho test es una adaptación de un instrumento de evaluación validado por Silveira y Moreira en una investigación para detectar la presencia de errores conceptuales en los temas propuestos.

**Palabras clave:** Aprendizaje de transmisión de calor, Investigación Dirigida y Metodología Científica.

## Abstract

In this work are presented the results from an educational research realized with high school students to evaluate the learning in the themes of Heat, Temperature and Heat Transmission. The objective was to test the effectiveness of the didactic strategy called Directed Research to favor in the students the acquisition of the scientific conceptions of Heat, Temperature, and Heat Transmission. The recollection of the data was made during the 2010-2011-A semester with 26 first-cycle-high-school students from the Instituto de Educación Media Superior, IEMS (pre University Education System) that attended the course of Physics I. The students to come from of two groups, the experimental group, where was applied the Directed Research and the control group, which received a traditional instruction. This research was evaluated with a test applied before and after developing the mentioned topics. The test is an adaptation of an evaluation instrument approved in Silveira & Moreira's educational research to detect conceptual mistakes in the proposed themes.

**Keywords:** Heat Transmission learning, Directed Research, and Scientific Methodology.

**PACS:** 44.10.+i, 44.40.+ a, 01.40.gb

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCION

La problemática en el aprendizaje de la Física es compleja y depende de varios factores, tales como la falta de estrategias didácticas adecuadas, las concepciones erróneas del profesor sobre el aprendizaje y la evaluación, la falta de un programa permanente de formación y actualización docente, entre otros.

Aunque el abanico es amplio, hay dos aspectos que motivaron la realización de la presente investigación educativa debido a que se observan frecuentemente en la experiencia. El primero, es un aspecto *didáctico* que

compete al profesor, ya que los cursos de Física, en general, se siguen desarrollando sin dar un rol activo al estudiante y con conocimientos desligados de su entorno, lo cual se traduce en desinterés de aquél por la asignatura y en un rezago académico. El segundo, es un aspecto *disciplinar*, con relación al estudiante, ya que se observa de manera recurrente que él, aún con la instrucción, no hace un manejo preciso de los conceptos del tema estudiado al explicar o argumentar un problema o situación física.

A esta problemática, se suma el reto planteado por el Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal

María de la Cruz Medina Ramos, A. López Ortega y César Mora (IEMSDF) en su Proyecto Educativo SBGDF [1] de favorecer en el estudiante tres ejes de formación: el científico, el crítico y el humanístico. Para ello en la asignatura de Física se ha desarrollado una Guía Académica [2] en la que se describe la manera de promover en el estudiante el uso de la metodología científica en la solución de problemas y en fomentar la argumentación de las soluciones usando conceptos científicos, tanto en un contexto escolar como en la vida diaria.

Las reflexiones y el análisis al respecto nos indican la necesidad de proponer y promover una didáctica que favorezca el aprendizaje eficiente de la disciplina, encontrando adecuado para ello la Investigación Dirigida, descrita en el trabajo de Gil [3], en el cual provee de una metodología para aprender a resolver situaciones problemáticas o problemas sin datos, lo que favorece en el estudiante el desarrollo de habilidades y actitudes propias de la metodología científica.

Para trabajar con la didáctica de Investigación Dirigida se consideraron los temas de calor, temperatura y transmisión de calor, cuyo estudio fue compatible con la propuesta de los libros de texto de Hewitt [4], Alvarenga, [5], and Wilson [6].

Para concretar el desarrollo de este estudio, el resto del presente artículo se organiza con cuatro secciones más y dos apéndices. En la sección II se describen de manera general, la Investigación Dirigida con las orientaciones de Gil [3] y una estructura teórica básica que considera las dificultades conceptuales recurrentes en los estudiantes de los temas en cuestión. En la sección III se muestra la metodología utilizada en las actividades de aprendizaje y en la Investigación Dirigida, exponiendo de ésta, las características de su instrumentación en cuanto a contexto, población, test y las herramientas estadísticas que se utilizaron en el análisis de datos. En la sección IV se presentan los resultados del pretest y postest con sus respectivos análisis en la validación de los ítems de transmisión de calor, la comparación del avance en el aprendizaje de conceptos logrado por los estudiantes y en la contrastación de las hipótesis de investigación. En la sección V se dan las conclusiones más relevantes que se derivan del trabajo de investigación.

Por último, en el apéndice A, se muestra el instrumento de evaluación utilizado en este estudio y en el apéndice B se presenta a manera de ejemplo la secuencia de actividades propuestas para el tema de radiación de calor con base en la Investigación Dirigida.

## II. MARCO TEÓRICO

### A. ¿Qué es la Investigación Dirigida? ¿Cuáles son sus ventajas?

De acuerdo con Moltó [7], es una estrategia didáctica caracterizada por ser un modelo de resolución de problemas que se desarrolla como un sistema de tareas

educativas semejante a un plan de investigación con un objetivo específico.

Para abordar la resolución de problemas sin datos, Gil Pérez [3], orienta con un conjunto de sugerencias que suponen un modelo de solución de problemas como investigación, conocido en la didáctica de la Física como Investigación Dirigida.

Las principales sugerencias son:

- I. Plantear situaciones problemáticas y considerar cuál puede ser el interés en ella.
- II. Comenzar por un estudio cualitativo de la situación, para acotar y definir el problema.
- III. Emitir hipótesis fundamentadas sobre los factores de los que puede depender la magnitud buscada y sobre la forma de esta dependencia, imaginando, en particular, casos límite de fácil interpretación física.
- IV. Elaborar posibles estrategias de solución, incluyendo las experimentales antes de proceder a ésta, evitando el ensayo y error.
- V. Realizar la solución comentando y fundamentando lo que se hace con el conocimiento adquirido.
- VI. Analizar cuidadosamente los resultados con base en las hipótesis elaboradas.

Esta concepción de la Investigación Dirigida en el aula planteada por Gil [3], favorece nuestro quehacer docente al proveer de una metodología con la cual el estudiante trabaja situaciones problemáticas cuya solución no es inmediata, por lo que él, se ve en la necesidad de desarrollar habilidades y actitudes propias de la metodología científica al tratar de definir los problemas de estudio apoyado con búsquedas bibliográficas, planteamiento de hipótesis, análisis de alternativas de solución, entre otras.

En esta metodología didáctica también se promueve el trabajo de los estudiantes en pequeños grupos para confrontar sus ideas, favorece la recuperación y construcción del conocimiento y el rol del profesor es de director y facilitador del aprendizaje del estudiante.

En suma, la Investigación Dirigida provee al estudiante de una metodología para aprender a resolver situaciones problemáticas y familiarizarse con el trabajo científico y sus resultados.

En relación con la elección del tema, se eligió la Unidad III titulada “Calor” del programa de Física I del IEMSDF [8], debido a la generalizada interacción que tienen las personas con los fenómenos térmicos y porque sobre esta temática hay investigaciones educativas como las de Silveira y Moreira [9], en la cual se ha validado un test diseñado para detectar concepciones alternativas y científicas de los estudiantes sobre conceptos clave en el tema de calor. El trabajo de Silveira y Moreira también ha sido utilizado con éxito en otras investigaciones como la de Martínez y Pérez [10] para evaluar el aprendizaje de la termodinámica en diferentes niveles incluyendo el de bachillerato. Por ello consideramos que es fiable para tomarlo como base en la construcción del instrumento de evaluación que usamos para este trabajo.

## B. Indicadores conceptuales básicos de los temas de calor, temperatura y transmisión de calor

Para ayudar en la adquisición de concepciones científicas de calor, temperatura y transmisión de calor se desarrolló una estructura teórica básica que considera las dificultades conceptuales recurrentes en los estudiantes, algunas de ellas identificadas en las investigaciones de Silveira y Moreira [9] y Prince *et al.* [11]. Las más relevantes son:

1. Confunden temperatura con calor.
2. Asocian la percepción de caliente y frío sólo a la temperatura y no identifican que en esta percepción también influye la razón de la transferencia de calor.
3. Confunden conducción con convección ya que la idea de que el “calor sube” la asocian a la conducción.
4. Confunden frecuentemente el efecto de propiedades de superficie en la razón de transferencia de calor por radiación.

Por ello con las diferentes actividades de aprendizaje propuestas se favorecerán las concepciones científicas que se mencionan a continuación:

1. Para que los estudiantes logren diferenciar temperatura de calor se necesita:
  - Conocer que la temperatura es el concepto base del equilibrio térmico y que en un enfoque microscópico, está asociada al promedio de la energía cinética de traslación de las moléculas de un objeto.
  - Reconocer que la temperatura es una propiedad del objeto y como magnitud física no es aditiva.
  - Conocer los fundamentos de las diferentes escalas usuales para medir temperatura.
  - Reconocer que la forma de medir la temperatura es directa.
  - Conocer que el calor es una transferencia de energía que aparece por la interacción térmica de dos objetos con diferentes temperaturas.
  - Reconocer que el calor no es una propiedad del objeto y que como magnitud física es aditiva.
  - Reconocer que el calor se mide de manera indirecta.
  - Conocer las relaciones entre calor y temperatura.
  - Reconocer la diferencia entre calor y temperatura con base en los métodos de medición.
2. Para que los estudiantes asocien la percepción de caliente y frío a la razón de la transferencia de calor se requiere:
  - Conocer que la conducción como proceso de transmisión de calor se efectúa particularmente en los materiales sólidos.
  - Conocer que la conducción es más rápida en unos materiales que en otros.
  - Reconocer que la conducción de calor depende del tipo de material y de las características geométricas del objeto que conduce el calor.
  - Conocer las características relevantes de materiales aislantes.

- Diferenciar entre materiales conductores y materiales aislantes.
  - Inferir que la percepción de frío o caliente a través del tacto, también depende de la rapidez con la que se transfiere el calor.
3. Para no confundir las características de la convección con otras formas de transmitir calor, se requiere:
    - Conocer que la convección de calor se realiza en los fluidos.
    - Conocer que el calentamiento de fluidos se realiza por las corrientes de convección que son una muestra del principio de Arquímedes.
    - Reconocer que en la convección se transporta masa, a diferencia de los otros procesos de transmisión de calor.
  4. Para que el estudiante identifique que el calentamiento por radiación de un objeto depende de la condición de su superficie y de la naturaleza de la energía radiante, se requiere:
    - Conocer que la radiación de calor se da por ondas electromagnéticas.
    - Conocer que el calentamiento y el enfriamiento por radiación depende del color del objeto, del tiempo de calentamiento y del área de exposición.
    - Reconocer que el calentamiento y el enfriamiento por radiación son más rápidos en el color negro (con una mayor emisión y absorción) que en el color blanco.

## III. METODOLOGÍA

### A. Metodología utilizada en las actividades de aprendizaje

Las actividades de enseñanza y aprendizaje de calor, temperatura y transmisión de calor se desarrollaron incorporando algunos problemas moderadamente sencillos, relacionados con conceptos y situaciones de dichos temas, caracterizados por no tener una respuesta inmediata, sino que para su solución se requieren de varias acciones como el planteamiento de hipótesis, la realización de experimentos, análisis de información, etc. La elaboración de aquéllas se fundamentó en los ejes de formación del Proyecto Educativo del IEMSDF [1], el modelo de enseñanza-aprendizaje como Investigación Dirigida planteada por Gil Pérez [3] y los resultados de la evaluación diagnóstica de los contenidos temáticos a estudiar en la que se utilizó el test mostrado en el Apéndice A.

El proceso seguido en cada actividad de investigación de manera general fue el siguiente:

- *El profesor propone las mismas actividades de aprendizaje* a todos los estudiantes para realizarlas en equipos de tres o cuatro integrantes.
- *El profesor presenta una situación problemática y una pregunta generadora* (con un nivel de profundidad para estudiantes del primer ciclo de bachillerato) para orientar

María de la Cruz Medina Ramos, A. López Ortega y César Mora el trabajo que se realizará. También, promueve una discusión sobre la importancia de la problemática para motivar al estudiante a resolverla.

- *Los estudiantes realizan un estudio cualitativo de la situación problemática*, apoyados con investigaciones documentales y elaboración de reportes de lectura que guían su participación en las discusiones que realizan en equipo.
  - *Los estudiantes* con base en conocimientos previos, *elaboran hipótesis*, para explicar la situación problemática o sobre el resultado que se va a obtener.
  - *El profesor y estudiantes hacen una discusión sobre las actividades que se realizarán* para contrastar las hipótesis elaboradas por los estudiantes, en particular de actividades experimentales (*alternativas de solución*).
  - *Se realizan los experimentos diseñados por el profesor y/o estudiantes*. Es importante hacer énfasis que salvo excepciones, los experimentos los diseña el profesor ya que al estudiante en general en este nivel se le dificulta proponer los experimentos adecuados, sin embargo, se incorporan los aspectos discutidos por ellos.
  - *Los estudiantes realizan un análisis de los resultados*, en el cual se incluye la contrastación de las hipótesis.
  - *Los estudiantes comunican de forma oral y por escrito los resultados*.
  - *Los estudiantes discuten la pregunta generadora* en equipo y en grupo. En esta fase los estudiantes explican y argumentan la situación física con base en los conceptos y principios aprendidos.
  - *El profesor plantea actividades de consolidación*. Estas actividades se plantean para promover en el estudiante la reflexión continua y la consolidación de su aprendizaje.
- La intervención del profesor fue tanto para proponer cada actividad de aprendizaje como para promover la reflexión con preguntas de profundización del tema, también al final de cada actividad para realizar el resumen de todas las aportaciones, estableciendo las conclusiones de las nociones básicas trabajadas y las soluciones a las preguntas generadoras.

Cada actividad de aprendizaje fue de evaluación y retroalimentación, lo que permitió al estudiante conocer sus avances y al profesor documentarlos.

Los espacios en los cuales se realizaron las actividades de aprendizaje se agrupan en dos categorías: trabajo en aula (denotado por (A)) que contempla los espacios de salón de clases, laboratorio, asesoría académica, etc., y trabajo independiente (denotado por (I)) que es el trabajo del estudiante en biblioteca, casa, o algún otro espacio para realizar sus tareas. Ver la Tabla del Apéndice B.

## B. Instrumentación de la Investigación Dirigida

El estudio se realizó en el semestre 2010-2011-A con 26 estudiantes de bachillerato del plantel Ricardo Flores Magón del IEMSDF que cursaron la asignatura de Física I ubicada en el primer semestre del programa de estudios. Los estudiantes, cuyas edades fluctúan entre 15 y 17 años, provienen de dos grupos, el experimental (GE) en el que se

aplicó la Investigación Dirigida por la autora de este trabajo y el grupo de control (GC) en el cual el profesor que colaboró impartió el curso usando una instrucción tradicional.

Durante cuatro semanas se usó la Investigación Dirigida en el desarrollo de los temas de calor, temperatura y transmisión de calor. La implementación se realizó en el horario normal asignado a los grupos para cursar la asignatura de Física I con tres sesiones de 1.5 horas por semana.

Los resultados del estudio se evaluaron con un test que se aplicó antes y después de desarrollar los temas en cuestión. Dicho test consta de 12 ítems de opción múltiple y es una versión adaptada de un cuestionario validado por Silveira y Moreira [9] en una investigación realizada para detectar concepciones científicas de los estudiantes sobre el tema de calor. Sin embargo, este cuestionario no cuenta con los reactivos de transmisión de calor necesarios para diagnosticar el conocimiento de los estudiantes que participaron en esta investigación, por lo que de aquél solo se seleccionaron 8 ítems de calor y temperatura y se elaboraron 4 ítems apropiados para bachillerato del tema de transmisión de calor.

Para la elaboración de estas preguntas se ejercieron tres criterios: el primero fue incluir una sola opción con la respuesta correcta. El segundo fue considerar un distractor con un modelo erróneo común en los estudiantes. El tercero fue construir los ítems congruentes con la estructura propuesta por Silveira y Moreira [9] en su test, por lo que se asignaron a cada uno, tres opciones de respuesta. Cabe mencionar que también se consideraron las orientaciones de Prince *et al.* [11], cuya investigación documenta errores conceptuales de calor, temperatura y transmisión de calor por radiación en estudiantes de Ingeniería.

El rendimiento escolar del estudiante se obtuvo a través de la *ganancia conceptual de Hake* la cual nos permite medir y comparar la mejora del pretest al postest que logran los estudiantes. Esta cantidad fue definida por Hake [12] como

$$\langle g \rangle = \frac{\% (G)}{\% (G)_{\max}} = \frac{(S_f) - (S_i)}{100 - (S_i)}$$
 donde  $S_f$  y  $S_i$  corresponden

a los promedios porcentuales del postest y del pretest, respectivamente. Por lo tanto la ganancia se obtiene al dividir la diferencia de las calificaciones en el postest y pretest, entre el máximo aumento posible en la calificación.

Otra herramienta estadística que utilizamos para este análisis fue la *t* de Student descrita en Box *et al.* [13], ya que permite evaluar si dos grupos de datos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias comparadas en dos momentos diferentes con el uso de los resultados de un pretest y un postest.

## IV. RESULTADOS Y ANALISIS

Los resultados se presentan en tres partes: primero, la validación de los ítems de transmisión de calor implementados en el cuestionario, a continuación, la <http://www.lajpe.org>

comparación del avance en el aprendizaje de conceptos logrado por los estudiantes y finalmente la contrastación de las hipótesis de investigación.

### A. Validación de los reactivos de transmisión de calor

En la Tabla I se presentan los resultados de las respuestas dadas por los grupos experimental y el de control a las preguntas de transmisión de calor del cuestionario del Apéndice A. También se muestran los valores calculados

para la concentración  $C$  y la puntuación  $S$  requeridos para clasificar los patrones de respuesta para cada ítem según Bao & Redish [14].

Como se observa en la Tabla I, los patrones de respuesta obtenidos son LM y MM que corresponden a las categorías *dos modelos*, es decir, que las respuestas de los estudiantes se concentraron en dos elecciones, dos incorrectas en el caso LM y una correcta y la otra incorrecta en el caso MM.

**TABLA I.** Patrones de respuesta para los ítems de transmisión de calor.

No. de reactivo	Respuesta a	Respuesta b	Respuesta c	S	C	Tipo del patrón de respuesta
9	7	3	16	0.61	0.24	MM
10	16	9	1	0.34	0.30	LM
11	15	9	2	0.07	0.23	LM
12	10	2	14	0.38	0.21	LM

De acuerdo con Bao & Redish [14], el diseño apropiado de preguntas, debe arrojar en el pretest respuestas del tipo LH o LM ya que son indicadores de que la pregunta detonó distractores atractivos que corresponden a modelos incorrectos comunes de los estudiantes. Esto implica que los ítems 10, 11 y 12 son de diseño apropiado, no así el ítem 9 que si bien cumple con la concentración para un buen reactivo, el puntaje fue mayor a lo esperado. Por ello se considera pertinente eliminar el reactivo en un experimento posterior ya que para este tipo de investigaciones, con el pretest se busca preferentemente obtener indicadores sobre los modelos incorrectos que posee el estudiante para diseñar y ajustar las actividades de

aprendizaje que favorezcan una perspectiva científica de los conceptos o situaciones del tema estudiado.

### B. Cálculo de la Ganancia de Hake por ítem y por contenido temático

En la Tabla II se muestran los resultados del análisis comparativo entre las respuestas dadas a las preguntas del Apéndice A por los grupos experimental y el de control. En un primer análisis se calculó la *ganancia normalizada* de Hake para cada uno de los ítems, así como el valor promedio logrado por cada grupo.

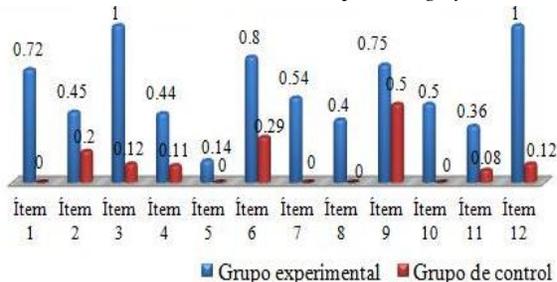
**TABLA II.** Ganancia de Hake por ítem.

Ítem	Respuesta correcta	Grupo experimental		Grupo de control		Ganancia de Hake por ítem $G_{exp}$	Ganancia de Hake por ítem $G_{control}$
		Pre	Post	Pre	Post		
1	1c	1	9	3	3	0.72	0.00
2	2b	1	6	4	6	0.45	0.20
3	3a	6	12	6	7	1.00	0.12
4	4b	3	7	5	6	0.44	0.11
5	5b	5	6	5	5	0.14	0.00
6	6b	2	10	7	9	0.80	0.29
7	7c	1	7	2	2	0.54	0.00
8	8a	7	9	8	8	0.40	0.00
9	9c	8	11	8	11	0.75	0.50
10	10b	2	7	7	7	0.50	0.00
11	11c	1	5	1	2	0.36	0.08
12	12a	4	12	6	7	1.00	0.12

A continuación se presenta la Gráfica 1 que muestra la Ganancia de Hake por ítem de los grupos experimental y el de control expresados en la Tabla II.

En Hake [12], se definen tres categorías para la ganancia para propósitos de interpretación y análisis de

resultados, a saber:  $g$  alta para resultados con  $\langle g \rangle \geq 0.7$ ;  $g$  media para resultados con  $0.7 > \langle g \rangle \geq 0.3$ ; y  $g$  baja para resultados donde  $\langle g \rangle < 0.3$



**GRÁFICA 1.** Ganancia de Hake por ítem del grupo experimental y del de control.

Con base en estas categorías se observa que el grupo experimental logró una ganancia alta en los ítems 1, 3, 6, 9 y 12; una ganancia media en los ítems 2, 4, 7, 8, 10 y 11; y una ganancia baja en el ítem 5. Esto implica que hubo una mejora significativa en ponderar las siguientes ideas:

- El concepto de calor como proceso energético sobre la idea errónea de que el calor está contenido en el objeto.
- Que la diferencia de temperaturas es la condición necesaria para que se transfiera el calor.
- Reconocer que el concepto de caliente es un indicador cualitativo de temperatura y no de calor.
- Que el calor se conduce en una varilla metálica sin importar la orientación de la varilla (hacia arriba o hacia abajo), a diferencia de la convección que, salvo excepciones, el desplazamiento del fluido caliente va hacia arriba.
- Reconocer que el calentamiento o enfriamiento por radiación depende del color y que estos dos fenómenos suceden más rápido en el color negro que en el blanco.

En contraste, para el grupo de control se observó una situación diferente, ya que sólo se obtuvo una ganancia media en el ítem 9 y una ganancia baja para los 11 ítems restantes.

En resumen, en el grupo experimental, se obtuvo una ganancia alta en el 41.7% de las preguntas, una ganancia media en el 50% y sólo el 8.3% de las preguntas obtuvo una ganancia baja. La ganancia para cada pregunta se situó en el intervalo  $0.14 < g < 1.00$ .

Para el grupo de control se obtuvo una ganancia media en el 8.3% de las preguntas y la ganancia baja para el restante 91.7%. Aquí la ganancia por pregunta se situó en el intervalo  $0 < g < 0.50$ .

Los resultados del grupo experimental sustentan una mejora en el aprendizaje de los temas de calor, temperatura y transmisión de calor cuando usamos la Investigación Dirigida.

En la Gráfica 2, se muestran la ganancia promedio del grupo experimental y del grupo de control, también expresados en la Tabla II.

La ganancia media (0.59) del grupo experimental implica que el porcentaje de aciertos, que fue del 28.47 % en el pretest, se incrementó al 70.14% en el postest. La ganancia baja (0.11) del grupo de control implica que el porcentaje de aciertos se incrementó de 36.90% a 43.45%. La ganancia promedio del grupo experimental ( $\bar{g}_{GE}$ ) y la ganancia promedio del grupo de control ( $\bar{g}_{GC}$ ) satisfacen  $\bar{g}_{GE} = 5.4 \bar{g}_{GC}$ .



**GRÁFICA 2.** Ganancia de Hake promedio de los doce ítems.

También calculamos la ganancia de Hake por contenido temático. Estos valores se muestran en la Tabla III.

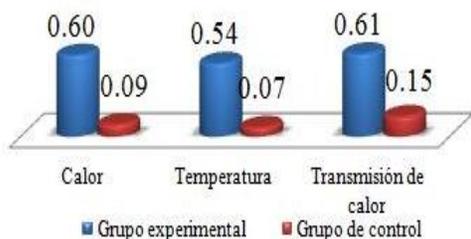
**TABLA III.** Ganancia de Hake por contenido temático.

Contenido temático	$G_{exp}$ Respuestas correctas		$G_{control}$ Respuestas correctas		Ganancia de Hake $G_{exp}$	Ganancia de Hake $G_{control}$
	Pre	Post	Pre	Post		
Calor	18	43	26	30	0.60	0.09
Temperatura	8	23	14	16	0.54	0.07
Transmisión de calor	15	35	22	27	0.61	0.15

En la Gráfica 3 se muestra la ganancia de Hake por contenidos temáticos expresados en la Tabla III. En dicha gráfica, se observa que en el grupo experimental la ganancia de Hake lograda fue media para los tres contenidos temáticos y con valores muy similares (ligeramente menor en el tema de temperatura). Esto sugiere que la instrumentación de la estrategia didáctica tuvo una efectividad similar en la enseñanza de los tres contenidos temáticos. En contraste en el grupo de

control se observa que las ganancias para los tres contenidos temáticos fueron bajas.

Las relaciones de proporción entre ambos grupos (experimental  $g_{GE}$  y de control  $g_{GC}$ ) para las ganancias de Hake en los tres contenidos temáticos son: en *calor*  $g_{GE} = 6.7 g_{GC}$ ; en *temperatura*  $g_{GE} = 7.7 g_{GC}$  y en *transmisión de calor*  $g_{GE} = 4.1 g_{GC}$ .



GRÁFICA 3. Ganancia de Hake por contenidos temáticos.

De estos resultados se infiere que en el grupo experimental la Investigación Dirigida motivó la adquisición de las concepciones científicas de calor, temperatura y transmisión de calor. De nuestros resultados deducimos que la ganancia lograda se debe a que se realizaron suficientes actividades experimentales apoyadas en los resultados del pretest y una vasta discusión de situaciones de la vida diaria, que para su explicación se involucran los temas desarrollados.

De estos resultados se infiere que la instrucción tradicional no fue suficiente para que los estudiantes aprendieran los conceptos científicos de dichos temas. La ganancia baja en el grupo de control, consideramos que se debe, entre otros factores, a que en una instrucción tradicional no se tienen los indicadores que proporcionan los test usados en esta investigación educativa, los cuales permiten hacer énfasis en los modelos erróneos que tiene los estudiantes al iniciar un tema o curso.

### C Análisis de la t de Student

Con el propósito de contrastar las hipótesis de investigación, en esta sección se realiza un análisis a partir de la *t* de Student. Esta prueba estadística es de utilidad para evaluar si dos grupos de datos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias comparadas en dos momentos diferentes, por lo que se utilizan los resultados de un pretest y un postest.

Las hipótesis de investigación para este trabajo son:

Primera hipótesis: *En los temas de calor, temperatura y transmisión de calor la Investigación Dirigida favorece una evolución significativa de las ideas previas con las que inició el estudiante a un conocimiento científico de estos temas.*

Segunda hipótesis: *Comparada con el método de enseñanza tradicional la Investigación Dirigida favorece*

*el aprendizaje de los conceptos científicos de calor, temperatura y transmisión de calor.*

Para la contrastación de hipótesis, éstas se expresaron en términos estadísticos, mediante una hipótesis nula (que sostiene que la aplicación de un estímulo experimental no produce ningún efecto en los grupos considerados implicando que las medias son iguales) y una hipótesis alternativa, (que sostiene que los grupos de datos difieren de manera significativa entre sí cuando a uno se le aplica un estímulo experimental, lo que implica medias diferentes). A continuación se enuncian las hipótesis nulas y alternativas para la primera y segunda hipótesis de investigación respectivamente.

*Hipótesis nula 1:* No hay diferencia significativa en el puntaje obtenido por el grupo experimental en el pretest y el postest sobre conceptos de calor, temperatura y transmisión de calor.

*Hipótesis alternativa 1:* El puntaje obtenido por el grupo experimental en el pretest sobre conceptos de calor, temperatura y transmisión de calor es significativamente distinto al obtenido en el postest.

*Hipótesis nula 2:* No hay diferencia significativa en el puntaje obtenido en el postest por el grupo experimental y el de control sobre conceptos de calor, temperatura y transmisión de calor.

*Hipótesis alternativa 2:* Los resultados del postest sobre los temas de calor, temperatura y transmisión de calor son significativamente distintos entre el grupo experimental y el de control.

De acuerdo con Hernández *et al.* [15], el nivel de significación representa la probabilidad de que una discrepancia entre las medias pueda ocurrir al azar, por ello, cuando el valor del nivel de significatividad es suficientemente pequeño se rechaza la hipótesis nula y se afirma que se ha obtenido una diferencia estadísticamente significativa entre las medias, sustentándose así la hipótesis alternativa. El valor del nivel de significación para realizar generalizaciones debe de ser de 0.05 o menor lo que implica el 5% de error (o bien el 95 % de seguridad).

En la Tabla IV se muestran las medias para las respuestas correctas obtenidas en el pretest y en el postest para cada contenido temático, así como los valores para la *t* de Student y los niveles de significatividad para el grupo experimental y para el grupo de control.

TABLA IV. Rendimiento de los grupos experimental (GE) y de control (GC).

Contenido temático	Media en el pretest GE	Media en el postest GE	<i>t</i> GE	Nivel de significación GE	Media en el pretest GC	Media en el postest GC	<i>t</i> GC	Nivel de significación GC
Calor	$\bar{y}_A = 1.50$	$\bar{y}_B = 3.58$	1.43	0.08	$\bar{y}_A = 1.86$	$\bar{y}_B = 2.14$	0.22	0.42
Temperatura	$\bar{y}_A = 0.67$	$\bar{y}_B = 1.92$	1.18	0.12	$\bar{y}_A = 1.00$	$\bar{y}_B = 1.14$	0.14	0.44
Transmisión de calor	$\bar{y}_A = 1.25$	$\bar{y}_B = 2.92$	1.29	0.10	$\bar{y}_A = 1.57$	$\bar{y}_B = 1.92$	0.24	0.40

María de la Cruz Medina Ramos, A. López Ortega y César Mora  
 Los valores de  $t$  y del nivel de significatividad están representados de la Gráfica 4 a la Gráfica 9, las cuales están asociadas por pares para contrastar los resultados de ambos grupos para cada contenido temático. En estas gráficas la zona bajo la curva asociada al valor de  $t$  se representan en color amarillo y la zona bajo la curva asociada a la probabilidad de que coincidan las medias se representan en color azul y rojo considerando ambas colas de la curva.

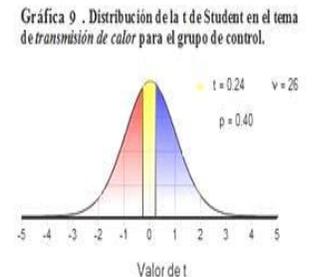
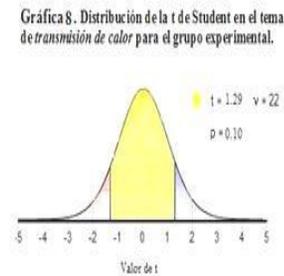
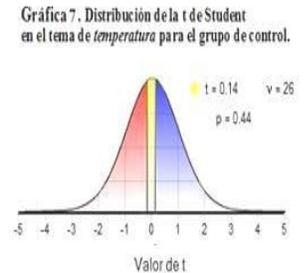
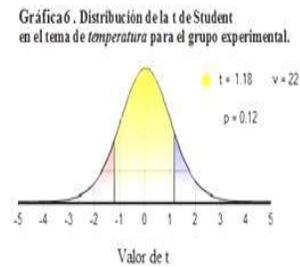
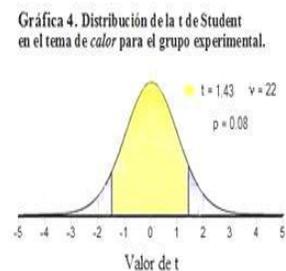
La Gráfica 4 muestra que para el concepto de calor en el grupo experimental, el valor del nivel de significatividad es de 0.08 lo cual representa una probabilidad del 8% de que coincidan las medias. En contraste, en la Gráfica 5 se muestra que para el grupo de control la probabilidad de que las medias sean iguales es del 42%.

En la Gráfica 6 se muestra que para el concepto de temperatura la probabilidad de que coincidan las medias es del 12% para el grupo experimental, mientras que para el grupo de control en la Gráfica 7 se muestra que esta probabilidad es del 44%.

Por último, en la Gráfica 8 se muestra que para el concepto de transmisión de calor la probabilidad de que coincidan las medias es del 10% para el grupo experimental y del 40% para el grupo de control (Gráfica 9).

Como se observa en estas gráficas, en el grupo experimental se obtuvo un nivel de significación suficientemente bajo para los tres temas, lo que implica que las diferencias entre las medias que fueron obtenidas en el pretest y el postest para cada uno de ellos son estadísticamente significativas. Esto permite en ambas hipótesis de investigación rechazar cada hipótesis nula con lo cual se verifica la hipótesis alternativa correspondiente.

En contraste en el grupo de control, el nivel de significatividad fue alto para los tres temas, esto implica que las diferencias entre las medias obtenidas en el pretest y el postest para cada tema no son estadísticamente significativas. En este caso se interpreta que la aplicación de la instrucción tradicional no tuvo un efecto significativo para favorecer un aprendizaje de las concepciones científicas de calor, temperatura y transmisión de calor.



Como lo mencionamos al principio de esta sección, de acuerdo con Hernández *et al.* (2006) el porcentaje requerido en el nivel de significación para poder hacer afirmaciones es del 5%. Sin embargo, en este estudio se rechazó la hipótesis nula en el grupo experimental con resultados en el nivel de significación del  $10\% \pm 2\%$  básicamente por dos razones. La primera es que se obtuvieron resultados con una diferencia significativa a favor de la hipótesis alternativa respecto a los resultados del grupo de control. La segunda es que los grupos con los que se trabajaron son pequeños con lo que observamos que si tenemos algunos estudiantes cuyo avance no es satisfactorio, sus resultados impactan notablemente en el valor del nivel de significación.

## V. CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones más relevantes que se derivan del trabajo de investigación con base en los resultados obtenidos del pretest, el postest y las hipótesis de investigación planteadas.

### A. Conclusiones sobre el diseño de ítems

Con los resultados de pretest de la muestra estudiada se validaron los cuatro ítems del tema de transmisión de calor obteniendo tres del tipo LM y uno del tipo MM. De acuerdo con Bao & Redish (2001), los LM son de diseño apropiado ya que indican que las preguntas detonaron distractores atractivos que corresponden a modelos incorrectos comunes del estudiante. El de tipo MM no aportó información sobre dichos modelos por lo que se considera pertinente sustituirlo en investigaciones posteriores.

## B. Conclusiones sobre el avance en el aprendizaje de conceptos termodinámicos

Con los resultados obtenidos del pretest y el postest para los temas de calor, temperatura y transmisión de calor se logró:

La medición del avance en el aprendizaje de conceptos de los estudiantes obteniendo una ganancia de Hake por ítem, y por contenido temático cuya media para el grupo experimental fue de  $\bar{g}=0.59$  catalogada por Hake como una ganancia media y de  $\bar{g}=0.11$  para el grupo de control considerada como una ganancia baja. Los valores de las ganancias en el caso del grupo experimental implica que los aciertos en el pretest que fueron del 28.47% se incrementaron al 70.14% en el postest y para el grupo de control, los aciertos en el pretest que fueron de 36.90 % se incrementaron sólo al 43.45%. La relación entre las ganancias de Hake es  $g_{GE} = 5.4 g_{GC}$ .

## C. Conclusiones sobre las hipótesis de investigación

Se contrastaron las hipótesis de investigación con los valores del nivel de significación calculados a partir de la  $t$  de Student, obteniendo para el grupo experimental los valores de **0.08, 0.12, 0.10** en los temas de calor, temperatura y transmisión de calor, respectivamente, y de **0.42, 0.44 y 0.40** para el grupo de control. Con base en los resultados de las pruebas sobre los temas analizados se verificó que los estudiantes del grupo experimental lograron un rendimiento mayor que los estudiantes del grupo de control.

Para la primera hipótesis de investigación (En los temas de calor, temperatura y transmisión de calor la Investigación Dirigida favorece una evolución significativa de las ideas previas con las que inició el estudiante a una perspectiva científica de estos temas) los resultados muestran que:

- En los temas de calor, temperatura y transmisión de calor el grupo experimental obtuvo una diferencia significativa entre el conocimiento conceptual adquirido con la instrucción de Investigación Dirigida, respecto al conocimiento conceptual con el que inició.
- En el grupo de control, en donde los estudiantes llevaron una instrucción tradicional de los temas de calor, temperatura y transmisión de calor, no se muestra una diferencia significativa entre el conocimiento conceptual con el que iniciaron respecto al evaluado después de la instrucción.

Para la segunda hipótesis de investigación (Comparada con el método de enseñanza tradicional, la Investigación Dirigida favorece el aprendizaje de las concepciones científicas de calor, temperatura y transmisión de calor) los resultados muestran que:

- Los estudiantes del grupo experimental lograron un rendimiento mayor en las pruebas sobre los temas estudiados que los estudiantes del grupo de control. Por lo que verificamos que existe una diferencia

significativa entre el conocimiento conceptual de calor, temperatura y transmisión de calor adquirido con la instrucción de Investigación Dirigida por el grupo experimental respecto al conocimiento conceptual de los estudiantes que llevaron una instrucción tradicional.

## D. Sugerencias para la implementación de la Investigación Dirigida

Una de las principales debilidades de la Investigación Dirigida es el tiempo requerido para desarrollar un tema, que de acuerdo a nuestra experiencia, se debe a que tanto el profesor como el estudiante deben asumir actitudes y realizar actividades a las que no están acostumbrados. Por ello para una mejor funcionalidad de la estrategia de Investigación Dirigida sugerimos lo siguiente:

- ❖ Aclarar de manera constante los roles del profesor y del estudiante con una actitud cordial y ejemplificada en el desarrollo, lo que favorece un clima adecuado y amigable para que los estudiantes se sientan cómodos al expresar sus hipótesis (ya que un estudiante no las va a emitir solo porque el profesor se lo pida). Es muy importante hacerles ver que lo que digan (en sus hipótesis) no necesariamente debe ser correcto, sin embargo es el momento de adquirir conocimiento científico.
- ❖ Asumir que el profesor es quien plantea las situaciones de estudio, ya que, al estudiante de bachillerato en general le es difícil problematizar situaciones.
- ❖ Seleccionar situaciones CTS sencillas y de fácil entendimiento para los estudiantes.
- ❖ Seleccionar con cuidado los conceptos clave del tema a desarrollar evitando los programas enciclopédicos que pongan en riesgo el tiempo requerido para la construcción de los conceptos por ser demasiado numerosos.

## E. Conclusión general

El estudio realizado nos permite afirmar que la Investigación Dirigida es un método eficiente para la enseñanza de los temas de calor, temperatura y transmisión de calor debido a que favorece la construcción y la comprensión de conceptos físicos a partir de la problematización y ayuda en el desarrollo de la capacidad del estudiante para expresar oralmente explicaciones y argumentaciones de problemas físicos tratados tanto en el contexto escolar como en la vida diaria.

Cabe mencionar que un análisis más extenso de los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo de investigación se puede consultar en la Tesis de Maestría de María de la Cruz Medina Ramos presentada en CICATA Legaria, Instituto Politécnico Nacional [16].

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMSDF) por ofrecer las facilidades para el desarrollo de este trabajo. También se agradece el apoyo de CONACYT- México, EDI-IPN, COFAA-IPN y de los proyectos de investigación SIP-20140832 y SIP-20140000.

## REFERENCIAS

- [1] SBGDF, *Proyecto Educativo* (Gobierno del Distrito Federal, Secretaría de Desarrollo Social, Instituto de Educación Media Superior del DF, México 2005).
- [2] Guía Académica de Física del IEMSDF. Consultada el 21 de marzo de 2011 de <http://academicos.iems.edu.mx/index.php/produccion-inst/jornadasacademicas/item/352.html>
- [3] Gil, D., *Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación*, Enseñanza de las Ciencias **11**, 197-212 (1993).
- [4] Hewitt, P., *Física Conceptual*, 4ta. Ed. (Pearson, México, 2005).
- [5] Máximo, A. & Alvarenga, B., *Física General con experimentos sencillos*, 4ta. Ed. (Oxford, México, 2000).
- [6] Wilson, J., *Física* 2ª Ed. (Prentice Hall, México, 1996).
- [7] Moltó, E., *Fundamentos de la Educación en Física* (Ministerio de Educación, La Habana, 2003).
- [8] SBGDF, *Ciencias, Programas de Estudio* (Gobierno del Distrito Federal, Secretaría de Desarrollo Social, Instituto de Educación Media Superior del DF, México, 2005).
- [9] Lang Da Silveira, F. & Moreira, M. A., *Validación de un Test para verificar si el alumno posee concepciones científicas sobre calor, temperatura y energía interna*, Enseñanza de las Ciencias **14**, 75-86 (1996).
- [10] Martínez, J.M. & Pérez, B.A., *Estudio de propuestas alternativas en la enseñanza de la termodinámica básica*. Enseñanza de las Ciencias, **15**, 287-300 (1997).
- [11] Prince, M., Vigeant, M. y Nottis, K., *Development of a concept inventory in heat transfer*, American Society for Engineering Education, (2009).
- [12] Hake, R., *Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses*, Am. J. Phys. **66**, 64-74 (1998).
- [13] Box, G., Hunter, S. y Hunter, W., *Estadística para Investigadores: Diseño, innovación y descubrimiento*, 2ª Ed. (REVERTÉ, México, 2008).
- [14] Bao, L. & Redish, E., *Concentration analysis: A quantitative assessment of Student states*, Am. J. Phys. Suppl. **69**, 45-53 (2001).
- [15] Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P., *Metodología de la Investigación Educativa*, 4ta. Ed. (Mc Graw Hill, México, 2006).
- [16] Medina Ramos, M.C., *Una Propuesta de Enseñanza basada en la Investigación Dirigida del tema de*

*Transmisión de Calor para estudiantes de bachillerato*, Tesis de Maestría (2011). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, México.

## APÉNDICE A

A continuación se muestra el instrumento utilizado en la presente investigación educativa. Cabe mencionar que las primeras ocho preguntas corresponden al test de Silveira y Moreira [9]. Las respuestas correctas aparecen en negritas.

### *Evaluación de los conceptos de calor, temperatura y transmisión de calor*

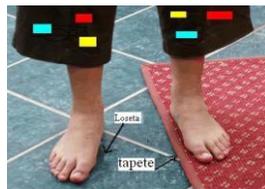
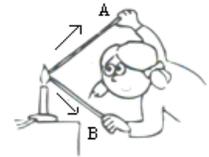
- 1. Asociamos la existencia de calor:**
  - a. A cualquier cuerpo, pues todo cuerpo posee calor
  - b. Sólo a aquellos cuerpos que están “calientes”
  - c. A situaciones en las que ocurre una transferencia de energía**
- 2. Para que se pueda hablar de calor:**
  - a. Es suficiente un único sistema (cuerpo)
  - b. Son necesarios, por lo menos, dos sistemas**
  - c. Es suficiente un único sistema, pero tiene que estar “caliente”
- 3. Para que se pueda admitir la existencia de calor debe haber:**
  - a. Una diferencia de temperaturas**
  - b. Una diferencia de masas
  - c. Una diferencia de energías
- 4. Calor es:**
  - a. Energía cinética de las moléculas
  - b. Energía que se transfiere por una diferencia de temperaturas**
  - c. La energía contenida en un cuerpo
- 5. En el interior de una habitación que no haya sido calentada o enfriada durante varios días:**
  - a. La temperatura de los objetos de metal es inferior a los de madera
  - b. La temperatura de los objetos de metal es la misma que los de madera**
  - c. Ningún objeto presenta temperatura
- 6. Considera dos esferas idénticas, una en un horno caliente y la otra en el congelador. Básicamente, ¿qué diferencia hay entre ellas inmediatamente después de sacarlas del horno y del congelador respectivamente?**
  - a. La cantidad de calor contenida en cada una de ellas
  - b. La temperatura de cada una de ellas**
  - c. Una de ellas contiene calor y la otra no

7. **Dos cubos metálicos A y B son colocados en contacto. A está más caliente que B. Ambos están más calientes que el ambiente. Al cabo de un cierto tiempo la temperatura final de A y B será:**
  - a. Igual a la temperatura inicial de B
  - b. Un promedio entre las temperaturas iniciales de A y de B
  - c. Igual a la temperatura ambiente
  
8. **Dos esferas del mismo material pero cuyas masas son diferentes quedan durante mucho tiempo en un horno. Al retirarlas del horno, son inmediatamente puestas en contacto. En esa situación:**
  - a. Ninguna de las dos esferas transfiere calor a la otra.
  - b. Se transfiere calor de la esfera de mayor masa hacia la de menor masa
  - c. Se transfiere calor de la esfera de menor masa a la de mayor masa
  
9. **Se tienen dos varillas de aluminio. ¿Qué sucede al ponerlas en la flama como se indica en la figura?**
  - a. El calor solo se conduce hacia arriba por la varilla A
  - b. El calor solo se conduce hacia abajo por la varilla B
  - c. El calor se conduce por igual en las varillas A y B
  
10. **¿Por qué al estar descalzos en casa se siente más frío al pisar la loseta que al pisar el tapete? Observa la figura.**

- a. Porque el tapete está a mayor temperatura que la loseta
- b. Porque la loseta es mejor conductor del calor que el tapete
- c. Porque el tapete es mejor conductor del calor que la loseta

11. **Al colocar una mano a unos 30 cm por encima de la flama de una vela, sientes que te quemas debido a que:**
  - a. El aire caliente sube por conducción
  - b. El aire caliente sube por radiación
  - c. El aire caliente sube por convección

12. **Se tienen dos latas una negra y una blanca. Ambas están llenas con agua a 50 °C. ¿Cuál se sentirá más caliente al acercarse a 5 cm de distancia?**
  - a. La lata negra
  - b. La lata blanca
  - c. Ambas se sienten igual



APÉNDICE B

Tabla. Actividades de aprendizaje para caracterizar y diferenciar la *radiación* como proceso de transmisión de calor.



Actividades de aprendizaje y características



Objetivos

Que el estudiante logre:

(A) Presentación de la situación problemática

<p><b>Medidas que hay que tomar en cuenta para adquirir un auto con base en la radiación de calor para ahorrar energía eléctrica.</b></p> <p>✚ (A) Planteamiento de la pregunta generadora <i>¿De qué color debe de ser un carro para favorecer un clima tolerable dentro de él en el verano y en el invierno?</i></p> <p>✚ (A) Discusión de la importancia de la situación problemática <i>¿En cuáles situaciones de tu vida cotidiana has observado que el calentamiento y el enfriamiento de un objeto dependen de su color? ¿Cómo impacta a la economía familiar tener o no este conocimiento?</i></p>	<p>Diferenciar la razón de transferencia de calor en relación al color del objeto.</p> <p>Reconocer la incidencia de los fenómenos térmicos en la vida diaria y por tanto la importancia de adquirir un conocimiento científico de ellos.</p>
<p>✚ (A) Estudio cualitativo de la situación problemática <b>Discusión de aspectos como:</b> <b>La influencia del color de un objeto en la rapidez para que se caliente o se enfríe, por ejemplo, se tienen dos latas, una negra y una blanca, ambas están llenas con agua a 50 °C, ¿En cuál se sentirá más caliente al acercarse a 5 cm de distancia? Si quieres mantener caliente un café mientras lo consumes, ¿tendrá el mismo efecto tenerlo en un vaso de unigel blanco que en un vaso de unigel pintado de negro?</b></p> <p>✚ (A) (I) Investigación Documental previa sobre radiación de calor. <b>En esta actividad se pretende que el estudiante conozca y discuta:</b> -El mecanismo de transferencia por radiación. -La rapidez de calentamiento por radiación dependiendo del color del objeto.</p>	<p>Construir una idea general sobre el trabajo que va a desarrollar en el tema de radiación de calor.</p> <p>Identificar que la radiación de calor se da por ondas electromagnéticas.</p> <p>Identificar y describir que el calentamiento por radiación depende del color del objeto, del tiempo de calentamiento y del área de exposición.</p>
<p>✚ (A) Planteamiento de hipótesis.</p>	<p>Practicar el planteamiento de hipótesis con base en sus conocimientos adquiridos sobre radiación de calor.</p>
<p>✚ (A) Discusión de las alternativas de solución <b>Discusión sobre la necesidad de realizar actividades experimentales para contrastar las hipótesis elaboradas y consensuar que se buscaría en dichas actividades experimentales.</b> <b>Se orienta la discusión con preguntas tales como:</b> <i>¿Cómo mostrar el calentamiento y el enfriamiento de un objeto en función de su color?</i> <i>¿Cuáles son las variables que debemos controlar para comparar el calentamiento y el enfriamiento por radiación en objetos pintados de diferentes colores?</i></p>	<p>Discutir las características de la actividad experimental como alternativa para la contrastación de hipótesis y por tanto para la solución de la situación problemática.</p>
<p>✚ (A) (I) Realización de actividades experimentales <b>En esta actividad, se calientan iguales cantidades de agua en botes (del mismo tamaño y geometría) pintados de diferentes colores, expuestos a la radiación solar</b></p>	<p>Reconocer que el calentamiento por radiación depende del color del</p>

<p>para medir las temperaturas alcanzadas en un mismo intervalo de tiempo (10 minutos). Después se miden las temperaturas de enfriamiento también para un mismo intervalo de tiempo. Esta actividad se realizó alrededor de las 10 de la mañana. Se les solicita a los estudiantes realizar la misma actividad en sus casas entre 4 y 5 de la tarde.</p> <p>En el análisis de la actividad experimental, se pretende que el estudiante identifique que tanto el calentamiento como el enfriamiento por radiación dependen del color y que ambos procesos son más rápidos en el color negro (con una mayor emisividad y absorción) que en el color blanco.</p> <p>Por otro lado que identifiquen que el calentamiento por radiación es mayor en la tarde que en la mañana situación que es tomada en cuenta para orientar la construcción de casas.</p>	<p>objeto, del tiempo de calentamiento y del área de exposición.</p> <p>Diferenciar las características del calentamiento por radiación particularmente en objetos pintados de blanco y negro por poseer características opuestas.</p>
<p>✚ (A) Análisis de resultados en equipo y en grupo</p> <p>Contrastación de las hipótesis con los resultados obtenidos en sus actividades experimentales.</p> <p>Discusión de la pregunta generadora en equipo y luego en grupo.</p>	<p>Explicar y argumentar sus ideas y opiniones de fenómenos térmicos con base en los conceptos aprendidos de radiación de calor.</p>
<p>✚ (A) (I) Actividades de consolidación</p> <p>Discusión sobre situaciones de la vida diaria que involucran el calentamiento por radiación.</p> <p>En un día muy soleado tienes que decidir entre ponerte una de tres camisas de algodón cuya única diferencia es el color, hay amarilla, roja y café, <i>¿Cuál te pones para no sentir tan caliente el ambiente?</i></p> <p><i>¿Por qué se calienta un objeto cuando se expone a la radiación solar, si la distancia entre la Tierra y el Sol es enorme y existe vacío?</i></p> <p>En un día de invierno, cuando entras al salón de clases, entre más estudiantes entran, más se calienta el espacio. <i>¿Cómo se lleva a cabo este calentamiento?</i></p> <p><i>CTS</i></p> <p><i>Situación problematizada</i></p> <p>Medidas que hay que tomar en la construcción de una casa común con base en la transferencia de calor para ahorrar energía eléctrica.</p> <p>Preguntas generadoras:</p> <p><i>¿Cómo construirías una casa con la arquitectura tradicional tomando en cuenta la transferencia de calor por conducción, convección y radiación para ahorrar energía eléctrica en el verano y en el invierno?</i></p>	<p>Profundizar en la comprensión de los conceptos asociados a la radiación de calor.</p>

# Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação



**Correa do Nascimento, Janaina, Barbosa de Barros Aragão, Eduardo Cezar, Cardoso de Sousa, Daniel, De Faria Barbosa, Felipe Tuyama, Pereira de Abreu, Guilherme Jean, Magno Barbosa, Itamar, Malmonge Martin, Inácio, Grigoriev Grigorov, Korneli, Edmundo Germano, José Silvério, Gomes e Bogos Nubar Sismanoglu, Marcelo Pego**

*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Física, Laboratório de Mecânica, Laboratório de Óptica e Espectroscopia, São José dos Campos, São Paulo.*

**E-mail:** bogos@ita.br

(Recebido em 14 de Mayo de 2014, aceito em 30 de Agosto de 2014)

## Resumo

Experimentos que são preparados facilmente podem ser realizados em laboratório por alunos do ensino médio e superior ou, na ausência do laboratório, fato que é infelizmente recorrente no ensino de ciências na América Latina, podem ser demonstrados em sala de aula pelo professor. Este trabalho elenca alguns experimentos e a teoria necessária para que se possa, a partir do procedimento experimental, compreender de maneira robusta os princípios físicos que regem a dinâmica do movimento de um corpo rígido. Basicamente, no estudo do corpo rígido, aplica-se a Lei de Conservação do Momento Angular, a taxa de variação deste em torno do centro de massa do corpo e o Teorema do Impulso de uma força que tende a girar o corpo em torno de seu centro de massa. Este trabalho também fornece ferramentas e técnicas experimentais que podem ser adotados nas aulas de laboratório, em problemas específicos que envolvem corpos rígidos.

**Palavras chave:** Laboratório didático, Experimentos, Corpo rígido, Leis da mecânica.

## Abstract

Experiments that can be easily implemented can be performed in the laboratory by the students of the high school or college or, in the absence of the laboratory ambient, a fact that is unfortunately recurrent in Latin America, can be demonstrated in the classroom by the teacher. This paper lists both experiments and theory necessary so that one can, from the experimental procedure, a way for understanding the physical principles that govern the dynamics of motion of a rigid body. Basically, for the study of the rigid body, we apply the Law of Conservation of Angular Momentum, the rate of change of this around the center of mass of the body and the Theorem of Impulse of a force that tends to rotate the body around its center of mass. This work also provides tools and experimental techniques that can be adopted in the lab to solve problems involving rigid bodies.

**Keywords:** Didactic laboratory, Experiments, Rigid body, Mechanics laws.

**PACS:** 01.40.gb, 01.50.Pa, 45.20

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUÇÃO

Uma das grandes dificuldades no ensino da dinâmica do corpo rígido (CR) está na aplicação das teorias desenvolvidas. Existem muitos exemplos e exercícios com aplicações dos conceitos relacionados ao estudo do CR, como o do momento de inércia, momento angular, torque de uma força, além da Lei da conservação do momento angular, a clássica Lei da conservação da energia mecânica, a Segunda Lei de Newton aplicada ao centro de massa (CM) do CR e o teorema do impulso de uma força, que pode gerar rotação do CR em torno de seu CM.

O bom senso mostra que as aulas de física, ou ciências, em qualquer nível de formação, devem não só contemplar a teoria acompanhada com resolução de exercícios, como também a demonstração de alguns experimentos para que o aluno possa “visualizar” o que foi abordado e, assim, assimilar de maneira mais completa o tema estudado [1, 2, 3, 4]. A maioria das escolas públicas e privadas de nível médio não possui laboratórios e grande parte das Instituições de Ensino Superior mantém uma rotina de aulas práticas em seus laboratórios que não acompanham, em termos de conteúdo e abordagem, o assunto estudado nas aulas teóricas, pelo menos concomitantemente. Deste modo, cabe ao professor, que ministra o conteúdo teórico

em sala de aula, apresentar alguns experimentos conjuntamente com a explanação teórica.

A idealidade seria aquela em que a sala de aula fosse uma “sala ambiente” ou “sala inteligente”, onde teríamos um espaço com toda a infraestrutura necessária para desenvolver de maneira ampla o assunto a ser estudado, acompanhado de equipamentos, material e multimídia como ferramentas de apoio ao professor [5]. No nosso mundo real, na ausência destas salas, o que se pode fazer é desenvolver um conjunto de experimentos para servirem de apoio ao professor.

Este artigo apresenta um conjunto de experimentos de Mecânica Física que esclarecem alguns aspectos na aplicação das Leis da física relacionadas ao estudo da dinâmica (e também da cinemática) do “Corpo Rígido”, tema estudado em nível superior nos cursos de Exatas, mas que também atraem a atenção daqueles alunos do ensino médio que se preparam para estudarem nestes cursos. Portanto, além de abordar a teoria envolvida no tema de corpos rígidos, este trabalho elenca alguns procedimentos experimentais que podem servir de apoio para uma melhor compreensão do assunto. Os experimentos podem ser realizados pelo professor em sala de aula ou pelos alunos no laboratório. Além disto, este trabalho objetiva apresentar montagens experimentais para o conhecimento de alunos e professores que, através do apoio de uma oficina mecânica, poderão construí-las.

Oficinas mecânicas bem equipadas poderão construir equipamentos mais sofisticados, porém com maior custo financeiro. Por outro lado, muitos destes experimentos são vendidos por empresas especializadas no ramo de ensino experimental, mas com custo muito elevado de aquisição e com uma qualidade que geralmente é bastante inferior. Por exemplo, ao se adquirir um “pêndulo composto”, tema desenvolvido neste trabalho, geralmente as empresas oferecem uma barra de material plástico que, quando colocada para oscilar, param em alguns segundos. Deste modo, através do uso de material metálico, com o auxílio de uma oficina mecânica, com muita criatividade e com poucos recursos financeiros, consegue-se montar experimentos robustos e duradouros. O ideal, então, é que o equipamento produzido consiga de alguma maneira reproduzir, dentro das incertezas experimentais, aquilo que se estudou na teoria e que fora previsto por ela.

## II. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO: A TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DO MOMENTO ANGULAR OBTIDA EM RELAÇÃO A UM PONTO QUALQUER

Seja um corpo rígido (CR) com centro de massa (CM) localizado pelo vetor  $\vec{R}_o$ , sendo  $O$  um ponto qualquer cujo vetor posição é  $\vec{r}_o$  em relação a um referencial inercial (RI). Seja  $m_i$  a  $i$ -ésima partícula deste corpo, localizada na posição  $\vec{r}_i$  e, por fim,  $\vec{r}_{io}$  é o vetor posição de  $m_i$  em relação ao ponto  $O$  (Figura 1) [3, 4].

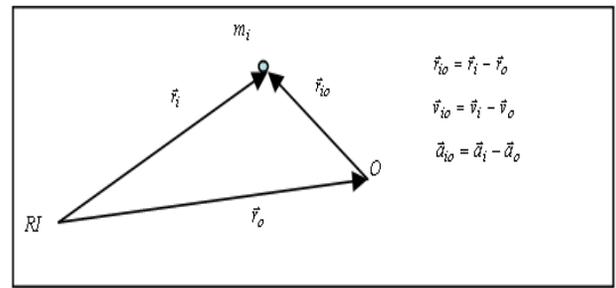


FIGURA 1. Localização da  $i$ -ésima partícula, de massa  $m_i$ , de um corpo rígido.

O CR está sob a ação de uma força externa  $\vec{F}$ . Portanto, o torque da força externa em relação ao ponto  $O$  será

$$\vec{N}_o = \sum_i \vec{r}_{io} \times \vec{F} = \sum_i \vec{r}_{io} \times m_i \vec{a}_i. \quad (1)$$

O momento angular em relação ao ponto  $O$  é dado por

$$\vec{L}_o = \sum_i m_i \vec{r}_{io} \times \vec{v}_{io}. \quad (2)$$

Logo, a taxa de variação temporal de  $\vec{L}_o$  é obtida através da diferenciação da Eq. 2.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_{io} \times (\vec{a}_i - \vec{a}_o) = \vec{N}_o - M \vec{R}_o \times \vec{a}_o. \quad (3)$$

Onde  $M$  é a massa total do CR. Na prática, ao aplicarmos a Eq. 3, queremos que o termo negativo se anule, para que possamos resolver um determinado problema com relativa facilidade. O modo mais fácil de fazer isto é considerar o ponto  $O$  como o CM do CR, pois neste caso  $\vec{R}_o$  será nulo. A Eq. 3 é o equivalente da Segunda Lei de Newton aplicada numa partícula. Portanto, para o CR teremos as equações auxiliares

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{N}_{CM}, \quad \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \vec{F}. \quad (4)$$

O impulso  $\vec{J}$  de uma força externa aplicada durante um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$  pode fornecer a velocidade do CM no instante logo após o impacto.

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt = m \vec{v}_{CM}. \quad (5)$$

E a velocidade angular do CR, calculada em torno do CM, pode se obtida pela equação

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM} \vec{\omega}. \quad (6)$$

Onde  $I_{CM}$  é o momento de inércia do corpo em relação ao CM. Por fim, resolvendo estas equações, podemos obter a solução de diversos problemas envolvendo o tema CR. Na próxima seção, forneceremos alguns exemplos de aplicações destas equações em CR.

### III. APLICAÇÕES: TEORIA E PRÁTICA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO CORPOS RÍGIDOS

#### A. Centro de percussão numa barra homogênea

A barra na Fig. 2 está no chão liso, com pouco atrito. Um golpe é dado numa das extremidades da barra. Observa-se nesta figura que logo após o golpe dado na extremidade direita da barra, um ponto localizado próximo à outra extremidade praticamente não se mexe. Este ponto é conhecido como “Centro de Percussão” (CP) e tem muitas aplicações no dia-a-dia.



**FIGURA 2.** Barra homogênea em repouso no chão liso sendo golpeada na extremidade da direita. A sequência mostra o movimento da barra nos instantes posteriores ao golpe, em intervalos de 33ms. No 2º quadro observa-se que um ponto (centro de percussão) situado a aproximadamente 1/3 da extremidade da barra não se move, relativamente aos outros pontos da barra.

Como a barra é homogênea,  $I_{CM} = Ml^2/12$ , onde  $M$  é a massa da barra e  $l$  é seu comprimento. A partir da Eq. 6 podemos escrever [3, 4].

$$L_{CM} = I_{CM}\omega = \int N_{CM}dt. \quad (7)$$

Na solução do problema proposto, obtemos então

$$\int N_{CM}dt = \frac{1}{2} \int Fdt = J \frac{l}{2}.$$

Q que resulta, finalmente,  $\omega = 6J/Ml$ . Ora, como a barra é considerada um CR, a velocidade de cada ponto da barra logo após o golpe é dado por  $\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_t$ , onde  $v_{CM} = J/M$  e  $\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r}$  é a velocidade de um ponto da barra a uma distância  $|\vec{r}|$  do CM que experimenta uma velocidade angular  $\vec{\omega}$ , ou seja, a barra tende a girar no sentido anti-horário (Fig. 2). O ponto  $O$  da barra onde se localiza o CP terá velocidade nula, ou seja,  $v_{CM} - v_t = 0$  e, substituindo nesta equação os dados explicitados anteriormente, obtemos finalmente  $r = l/6$ . Deste modo, a uma distância 1/3 da

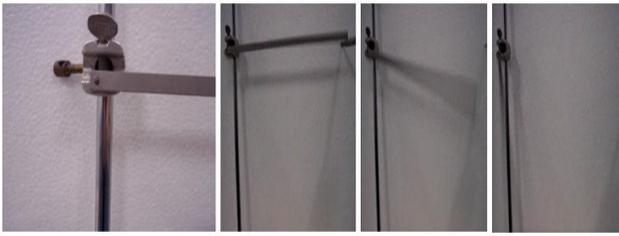
extremidade oposta ao golpe dado, haverá um ponto da barra que não se move no momento logo após o golpe. Na Fig. 2 isto pode ser verificado através da sequência de quadros obtidos através da utilização do software livre VirtualDub [6], cuja aplicabilidade pode ser vista nas referências [1] e [2]. Nesta figura, uma barra está em repouso no chão liso e num dado instante um chute é dado na ponta da barra. No exato instante do golpe, verifica-se que o CP, situado a aproximadamente 1/3 de sua extremidade oposta, praticamente não se move (quadro 2, obtido após 33ms do chute).

Os estudos sobre centros de percussão de corpos rígidos têm aplicações nas máquinas, carros, instrumentos e equipamentos produzidos atualmente, inclusive para o conforto do usuário ou para a proteção do próprio equipamento. Podemos citar alguns exemplos: a) o martelo é projetado para que o CP se situe na cabeça do martelo e o centro de rotação (CR) na outra extremidade, na empunhadura. Isto se faz para que o usuário não fique com “bolhas” na mão devido à trepidação, ou seja, na empunhadura a velocidade de recuo do martelo é praticamente nula; b) Na engenharia de produção, a máquina de ensaio de impacto possui o CP na massa pendular para que não ocorra trepidação e vibração no braço do pêndulo, o que com o tempo de uso resultaria em deformação permanente na região do centro de rotação (pivotamento) deste pêndulo; c) numa simples vassoura doméstica, a empunhadura deve ser se dar num local específico do cabo, para que a varrição ocorra com eficiência e nenhuma sujeira fique para trás; d) por fim, num automóvel é interessante que o CP fique no eixo traseiro para que os passageiros que se sentam no carro não sofram, principalmente nas estradas do país, toda vez que a roda dianteira (geralmente a roda motriz) encontra o famigerado buraco, ou a vultosa lombada.

Mas e quando o centro de rotação é pivotado num ponto  $O$  que não seja o CM? Neste caso, observa-se a oscilação ou a rotação do CR em torno deste ponto. E como se aplica a Eq. 3? Simples, basta observar que o pivô é fixo (ponto  $O$ ) e, neste caso, sua aceleração é nula ( $\vec{a}_o = \vec{0}$ ), o que também anula o termo negativo nesta equação, resultando novamente  $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{N}_o$ , só que agora calculado em relação ao ponto  $O$  (pivô) do CR. Vamos ver no próximo exemplo a solução de um problema envolvendo CR pivotado.

#### B. Barra homogênea pivotada em sua extremidade

A Fig. 3 mostra a mesma barra usada na seção anterior, porém, ela está pivotada em sua extremidade e posta na horizontal, onde será abandonada de seu repouso. O objetivo é obter a velocidade angular instantânea ( $\omega$ ) no ponto mais baixo da trajetória circular da barra, usando a Eq. 3. É claro que podemos obter o mesmo resultado muito mais facilmente através da Lei da conservação da energia mecânica e, portanto, faremos a solução do problema através dos dois métodos para que possamos compreender melhor o fenômeno.



**FIGURA 3.** Barra metálica pivotada em sua extremidade e posicionada na horizontal (figura da esquerda). Na sequência, os quadros mostram o instante inicial do movimento, o intermediário e o final, quando a barra girou 90° (quadros obtidos através do software VirtualDub).

No procedimento experimental deveremos determinar  $\omega$ , ou seja, queremos obter a variação temporal do ângulo  $\theta$  (Figura 3) de 0 a 90°. Isto pode ser feito através do uso dos Softwares VirtualDub, Pasco ou Tracker [1, 2]. A dedução teórica para  $\omega$  (ou  $\dot{\theta}$ ) é feita com o uso da Eq. 3

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{N}_o \rightarrow I_o \dot{\omega} = \frac{Mgl}{2} \cos \theta. \quad (8)$$

Sabe-se que  $I_o = Ml^2/3$  e  $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ . Logo, a Eq. 8 resulta

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \cos \theta. \quad (9)$$

e como o objetivo final é a obtenção da velocidade angular instantânea  $\dot{\theta}$  no ponto mais baixo, podemos resolver a Eq. 9 através da seguinte transformação útil

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}^2). \quad (10)$$

Deste modo, a Eq. 9 fica reduzida a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta}^2) = \frac{3g}{2l} \cos \theta \rightarrow$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{3g}{l}.$$

o que finalmente resulta em  $\omega = \sqrt{3g/l}$ . Através da Lei de conservação de energia mecânica podemos obter este mesmo resultado, lembrando que para um CR pivotado no ponto  $O$ , a energia cinética de rotação em relação a um eixo que passa por este ponto é dada por

$$T_o = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2.$$

Deste modo, a energia potencial gravitacional inicial da barra será totalmente transformada em energia cinética de rotação no ponto mais baixo

$$\frac{Mgl}{2} = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta}^2 \rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{3g/l}.$$

Um incauto poderia querer usar o CM da barra para aplicar esta Lei e cometer um erro grave, a não ser que se lembre

de que se trata de um CR, o que impinge que devemos acrescentar a energia cinética rotacional ( $T_{rot,CM}$ ) desenvolvida pelas partículas constituintes da barra em relação ao próprio CM. Assim,

$$\frac{Mgl}{2} = \frac{1}{2} M\dot{R}_o^2 + T_{rot,CM}. \quad (11)$$

Onde

$$\dot{R} = \dot{\theta}l/2 \text{ e } T_{rot,CM} = \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{Ml^2}{12} \dot{\theta}^2,$$

o que resulta, finalmente, de novo,  $\dot{\theta} = \sqrt{3g/l}$ . Portanto, deveremos ter muito cuidado na aplicação dos conceitos de Momento de Inércia, Torque e Momento Angular, pois eles são obtidos sempre em relação a um determinado ponto do sistema dinâmico previamente escolhido. Também podemos aplicar a equação de energia  $\frac{Mgl}{2} = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2$  em outro problema bastante interessante, o do disco que rola, tema da próxima seção.

Na Fig. 3 observa-se a aplicação do Software VirtualDub para a obtenção do movimento da barra quadro a quadro. A barra em questão possui comprimento  $l = (34,5 \pm 0,4)$  cm e o valor da aceleração da gravidade local é  $g = (9,78 \pm 0,06)$  m/s/s. Através da equação teórica  $\dot{\theta} = \sqrt{3g/l}$ , obtém-se  $\omega = (9,22 \pm 0,09)$  rad/s. Através da medição do intervalo de tempo para que a barra atingisse o ponto mais baixo também se pode estimar o valor desta velocidade angular neste instante. Com o auxílio do VirtualDub, observou-se que a barra alcançou o ponto mais baixo no instante  $\Delta t \sim 0,32$ s a partir de seu repouso inicial em  $t_0 = 0$ . Então, a velocidade angular média pode ser expressa como

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\omega}{2}.$$

Pois no instante  $t_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 0$  para  $\theta_0 = 0$ rad. Assim, substituindo nesta equação  $\Delta\theta = \pi/2$ , obtém-se finalmente  $\omega \sim 9,85$ rad/s, resultado que concorda com aquele obtido anteriormente.

### C. Disco rolando plano abaixo, sem escorregamento

Este problema trata de um disco pesado de massa  $M$  e raio  $R$  que rola sem deslizar ou escorregar por um trilho inclinado, cuja velocidade angular instantânea é  $\dot{\theta} = \dot{R}/r$ , onde  $r$  é o raio do cilindro menor que é concêntrico ao eixo do disco (Figure 4).



**FIGURA 4.** Disco rolando sem escorregamento através de um plano inclinado.

Como  $r$  é pequeno comparado com  $R$ , o disco desce plano abaixo, rodando, com uma velocidade do centro de massa  $\dot{R}$  pequena. A conservação da energia mecânica em relação ao ponto de apoio do cilindro pode ser escrita como

$$Mgh = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2. \quad (12)$$

Onde  $h = \Delta s(\sin\beta)$  é a altura no instante inicial de partida com velocidade nula. A abordagem experimental obriga obter a velocidade média do centro de massa,  $V_m$ , através da medição do intervalo de tempo  $\Delta t$  para que o disco percorra a distância  $\Delta s$  até um ponto mais baixo. Deste modo, a velocidade média do CM pode ser escrita em função da velocidade angular instantânea, observando-se que

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\dot{R}}{2} = \frac{r\dot{\theta}}{2} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{2V_m}{r}.$$

Lembrando que  $V_m$  do CM nada mais é que a média aritmética entre as velocidades do CM obtidas entre o instante inicial (velocidade nula) e final ( $\dot{R}$ ). Deste modo, a Eq. 12 torna-se

$$Mgh = \frac{1}{2}I_o\left(\frac{2V_m}{r}\right)^2.$$

E, finalmente, consegue-se facilmente obter o valor de  $I_o$  através deste método dinâmico, através do uso da velocidade média do CM. Podemos verificar este resultado, também experimentalmente, através do uso do Teorema de Steiner ou dos eixos paralelos para momentos de inércia

$$I_o = I_{CM} + Mr^2. \quad (13)$$

Lembrando que para o disco,

$$I_{CM} = \frac{1}{2}m_1R^2 + 2\left(\frac{1}{2}m_2r^2\right) = \frac{1}{2}\rho\pi R^2(aR^2 + 2br^2),$$

conforme suas dimensões e massa específica ( $\rho$ ), desde que o disco e seu eixo sejam feitos do mesmo material. Porém, observa-se na Fig. 4 que o eixo cilíndrico do disco é de ferro, enquanto que o disco é de alumínio. Deste modo, a massa  $m_2$  nesta equação para  $I_{CM}$  deverá contemplar a massa específica do ferro, enquanto que a massa  $m_1$  deverá se relacionar com a massa específica do alumínio.

#### D. Cinemática da rotação

Além da dinâmica do CR, podemos estudar a cinemática de um corpo em rotação em torno de um eixo fixo através de outro experimento simples: a cinemática da rotação de um disco, que inicia o movimento devido ao torque de uma força externa. A Fig. 5 mostra em detalhes a montagem experimental, onde se observa que o disco de raio  $R$  pode girar livremente na direção vertical, através do torque proveniente de uma força tensora imposta por um fio enrolado em torno de um cilindro menor de raio  $r$  concêntrico ao eixo do disco. Na extremidade livre do fio, encontra-se um corpo de massa  $m$  suspenso no ar. Portanto,

Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação o corpo desenvolve aceleração escalar instantânea ( $a$ ) para baixo e o disco gira com aceleração angular instantânea ( $\alpha$ ), sendo  $a = \alpha r$ .

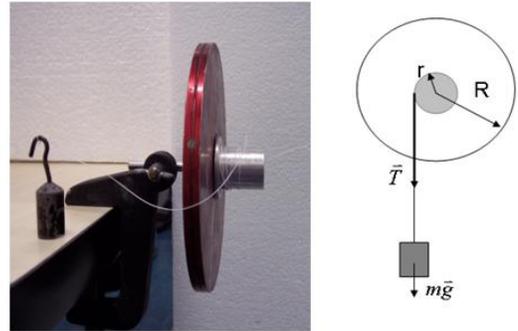


FIGURA 5. Dinâmica e cinemática da rotação de um disco em relação a um eixo fixo que passa pelo CM.

Em relação ao ponto  $O$  (no centro do disco = CM do disco), escrevemos o torque da força externa. Devemos tomar o cuidado de observar que a força externa geradora do torque não é a força peso, e sim a força tensora no fio de módulo  $T$ , onde

$$N_o = Tr = I_o\alpha. \quad (14)$$

Através do Princípio Fundamental da Dinâmica escrevemos a segunda Lei de Newton para a massa suspensa, que desce com aceleração escalar instantânea  $a$  dada pela equação

$$mg - T = ma. \quad (15)$$

Deste modo, resolvendo simultaneamente as Eqs. 14 e 15, obtemos

$$a = \frac{mg}{m + I_o/r^2} \quad e \quad \alpha = \frac{mgr}{mr^2 + I_o}. \quad (16 \text{ a, b})$$

Experimentalmente, basta obter a aceleração do corpo suspenso que desce em Movimento Retilíneo e Uniformemente Variado e, a seguir, obter a aceleração angular do disco. Para verificar as Eqs 16a e 16b, deveremos primeiro calcular  $I_o$  (ver cálculo para o disco na seção 3.3.).

Porém, a observação mais importante que se faz neste experimento é a seguinte: o que aconteceria com  $a$  e  $\alpha$  se enrolássemos o fio no disco de raio maior,  $R$ ? O incauto rapidamente responderia que  $a$  aumentaria em módulo e como  $a = \alpha r$ , então  $\alpha$  diminuiria. Vamos analisar, através das Eqs. 16a e 16b, se esta resposta esta totalmente correta.

Através da Eq. 16a, observamos que, realmente, quando  $r$  aumenta, a aceleração  $a$  aumenta, visto que nesta equação o termo  $1/r^2$  tende a zero no limite quando  $r$  tende ao infinito ( $r \rightarrow \infty$ ). E mais, para um raio  $R$  muito grande,  $1/R^2 \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow g$ , ou seja, praticamente é uma queda livre. Isto é muito fácil de intuir. Por outro lado, com relação à aceleração angular instantânea, de acordo com a Eq. 16b, a análise fica mais complicada, pois a variável  $r$  aparece no numerador e no denominador da equação. O que se pode fazer então é obter a derivada  $da/dr$  da aceleração angular em relação a  $r$  e verificar seu sinal, ou seja, se  $\alpha$  aumenta ou

diminui com a variação positiva da dimensão do raio. Esta derivada é

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{mg(I_o - mr^2)}{(I_o + mr^2)^2}. \quad (17)$$

Através da Eq. 17 observam-se duas situações distintas: 1) se  $I_o > mr^2$ ,  $\frac{d\alpha}{dr} > 0$  e  $\alpha$  aumenta com o aumento de  $r$ ; 2) se  $I_o < mr^2$ ,  $\frac{d\alpha}{dr} < 0$  e  $\alpha$  diminui com o aumento de  $r$ . Deste modo, a massa  $m$  do corpo suspenso desempenha papel importante para a definição da aceleração angular do disco.

Experimentalmente, basta confeccionar um disco com momento de inércia  $I_o > mR^2$  e outro com momento de inércia  $I_o < mR^2$ , para verificar a Eq. 17. Na situação em que  $I_o < mR^2$ , deveremos escolher um disco de material de baixa densidade, com o centro de massa localizado bem próximo ao centro do disco. Salientou-se anteriormente que a Eq. 3 é equivalente ao Princípio Fundamental da Dinâmica (PFD), ou seja,  $\frac{d\vec{L}_o}{dt}$  é equivalente a  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ . Basta então usar a Eq. 3 ou o PFD para obtermos as variáveis dinâmicas desejadas. A solução envolvendo  $\frac{d\vec{L}_o}{dt}$ , ou a conservação do momento angular,  $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{0}$ , que implica em  $L_o = \text{constante}$  de movimento, apesar de às vezes ser mais trabalhosa, mostra detalhes do movimento que ficariam sem serem percebidos quando se aplica apenas o PFD. Por exemplo, a Lei das Áreas do movimento planetário de Kepler, demonstrada facilmente através da conservação do momento angular, ficaria praticamente imperceptível se usássemos apenas o PFD. Neste exemplo, a força gravitacional atrativa entre o Sol e o planeta considerado é uma força central, ou seja, aponta para o Sol, que é o ponto  $O$ , um dos focos da trajetória elíptica.

### E. Pêndulo cônico

Um experimento simples que mostra a equivalência citada na seção anterior é o do pêndulo cônico (Fig. 6), onde um corpo de massa  $m$  gira em torno de um círculo de centro  $O'$  e raio  $l \sin \theta$ , sendo  $l$  o comprimento de um fio que une o corpo a um ponto fixo  $O$ .

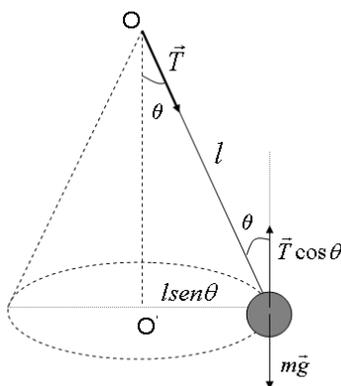


FIGURA 6. Pêndulo cônico.

O corpo executa MCU em torno de  $O'$ . Aplicando o PFD à massa, obtemos

$$T \sin \theta = \frac{mv^2}{l \sin \theta} \quad e \quad T \cos \theta = mg. \quad (18)$$

Com a solução  $T = mg/\cos \theta$  para a força tensora no fio, o que fornece a solução para a velocidade tangencial do corpo no seu MCU em torno de  $O'$ . Obtemos estes mesmos resultados usando a Lei da Conservação do Momento Angular, aplicado, por exemplo, em relação ao ponto  $O$ , para onde a força centrípeta  $T \sin \theta$  aponta. Deste modo, seu torque é nulo em relação a este ponto. Usando coordenadas cilíndricas para descrever as variáveis, podemos escrever.

$$\vec{N}_{O'} = \vec{r}_{O'} \times \vec{F} = l \sin \theta \hat{\rho} \times (T \cos \theta \hat{z} - T \sin \theta \hat{\rho} - mg \hat{z}) = 0 \rightarrow T = mg \cos \theta.$$

Onde  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{z}$  são os triedros-versores em coordenadas cilíndricas, com  $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$  e  $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$ .

### F. Pêndulo balístico

Outro experimento bastante interessante e simples de construir é o que representa o pêndulo balístico (Fig. 7). O diferencial deste pêndulo é que seu braço é um corpo rígido e, portanto, pivotado num ponto fixo  $O$  e que oscila até certa altura  $\Delta h$  após receber o impacto inelástico de uma bolinha de metal de massa  $m$ .

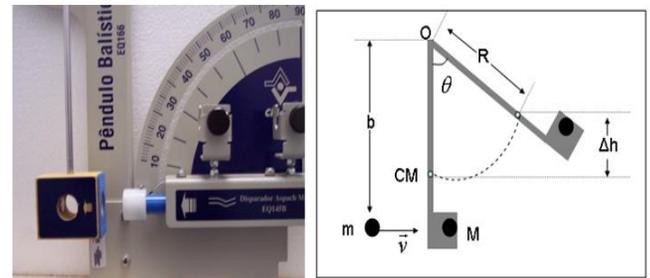


FIGURA 7. Pêndulo balístico.

Nesta figura,  $R$  é a distância entre  $O$  e o CM do sistema pêndulo + bola de metal. Este CM pode ser facilmente determinado se soltarmos o pêndulo de seu pivô  $O$  e, através de uma corda, o equilibrarmos na horizontal juntamente com a bola presa em seu casulo. Deste modo, após o impacto da bola, todas as variáveis mostradas na Fig. 7 podem ser facilmente mensuradas, inclusive o ângulo  $\theta$  da altura máxima  $\Delta h$ . Esta altura alcançada pelo CM depende da velocidade inicial da bola e de sua massa. Mas também é função do momento de inércia do conjunto que sofre rotação para cima. Diferentemente do sistema pendular que usa fio (pêndulo simples), este caso exige a aplicação da Lei da conservação do momento angular, além é claro da Lei da conservação da energia mecânica. O momento angular da bola em relação ao ponto  $O$ , antes da colisão, é dado por  $L_b = mbv$ .

A energia mecânica do pêndulo logo após o impacto inelástico é  $E = 0,5I_o\omega^2$  e seu momento angular é  $L_o = I_o\omega$ , o que resulta em  $L_o = (2I_oE)^{0,5}$ . Esta energia  $E$  é totalmente convertida em energia potencial gravitacional na altura máxima alcançada,  $E = MgR(1 - \cos\theta)$  sendo  $M$  a massa total do sistema. Por fim, através da Lei da conservação do momento angular, obtém-se

$$mbv = \sqrt{2MI_o gR(1 - \cos\theta)}. \quad (19)$$

Deste modo, através da Eq. 19, obtém-se a velocidade inicial  $v$  da bola, desde que se conheça o valor de  $I_o$ . A maneira mais fácil de obter  $I_o$ , o momento de inércia do sistema que gira em torno de  $O$ , também advém de outro experimento. Sabe-se que todo CR pivotado num ponto que não seja seu CM oscila periodicamente em torno deste ponto.

Deste modo, basta oscilar o sistema e, para ângulos pequenos, mede-se o período desta oscilação e, através da equação

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{MgR}}. \quad (20)$$

Obtém-se  $I_o$ . Assim,  $I_o$  deve ser obtido através deste segundo experimento, independentemente do problema anterior referente ao pêndulo balístico. O período  $T$  na Eq. 20 não pode ser confundido com o tempo de subida no pêndulo balístico, pois esta equação só é válida para ângulos pequenos de oscilação, do mesmo modo que é feito para pêndulos simples. O leitor pode verificar que no problema do pêndulo balístico não há conservação da energia cinética.

Uma rápida inspeção na Eq. 20 remonta àquela deduzida para pêndulos simples. Isto mostra que sempre existirá um “pêndulo simples equivalente” ao pêndulo balístico, tema que será discutido na próxima seção.

### G. Pêndulo composto ou pêndulo físico

Todo pêndulo composto possui um equivalente mecânico pêndulo simples, ou seja, haverá um pêndulo simples de comprimento  $l$  com massa pendular  $m$  igual à massa do pêndulo composto que oscila periodicamente exatamente igual a este. A Fig. 8 mostra um pêndulo composto no formato de uma barra homogênea, repleto de furos equidistantes. A barra tem massa  $M$  e comprimento  $L$ .

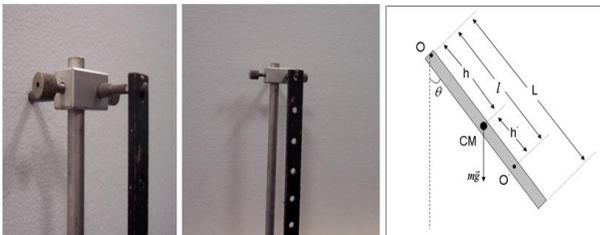


FIGURA 8. Pêndulo composto em formato de barra homogênea repleta de furos igualmente espaçados.

Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação É bastante comum na Engenharia a definição de raio de giração  $K_o = \sqrt{I_o/M}$  quando não se sabe como calcular o momento de inércia  $I_o$  exato de um corpo de massa  $M$  em relação a um ponto  $O$ . Este valor para  $K_o$  é obtido experimentalmente. Portanto, neste próximo experimento, obtemos  $K_o$  e  $l$  para o pêndulo composto da Fig. 8. Nesta figura,  $OO'$  define o pêndulo simples equivalente que desejamos encontrar, de comprimento  $l$ .  $O'$  é conhecido como “centro de oscilação” e é análogo ao “centro de percussão” visto anteriormente no 1º experimento e, portanto, para a barra homogênea, deverá estar localizado a uma distância  $2L/3$  da extremidade pivotada da barra (ponto  $O$ ). O torque total do peso está relacionado ao momento angular, em relação ao ponto  $O$ , através da relação

$$\dot{L} = N_o = I_o\ddot{\theta} \rightarrow Mgh \sin\theta = -MK_o^2\ddot{\theta}.$$

O sinal negativo aparece porque o torque é sempre restaurador. Isto resulta

$$\ddot{\theta} = -\frac{gh}{K_o^2} \sin\theta. \quad (21)$$

Uma rápida observação desta equação identifica a muito bem conhecida equação para o pêndulo simples.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta. \quad (22)$$

Ora, fazendo-se  $l = K_o^2/h$ , obtém-se o ponto  $O'$  que define o pêndulo simples equivalente (Fig. 8), onde

$$l = h' + h \rightarrow lh = h'h + h^2$$

$$\therefore K_o^2 = h'h + h^2. \quad (23)$$

A Eq. 23 nos remete novamente ao teorema de Steiner dos eixos paralelos, onde o momento de inércia em relação a um ponto  $O$  ( $MK_o^2$ ) é igual ao momento de inércia em relação ao eixo paralelo ( $Mh'h$ ), somado a  $Mh^2$ , sendo  $h$  a distância entre os dois pontos considerados do CR. Deste modo, a Eq. 23 fica

$$MK_o^2 = Mh'h + Mh^2 \quad (24)$$

Assim, como  $h$  define a localização do CM da barra,  $Mh'h = K_{CM}^2$ , ou seja, o produto  $hh'$  define o raio de giração em relação ao CM. Como esta equação é simétrica em  $h$  e  $h'$ , conclui-se que se a barra fosse pivotada em  $O'$ , o centro de oscilação estaria agora no ponto  $O$  [3, 4]. A Eq. 23 então fica  $h^2 - lh + K_{CM}^2 = 0$ . Esta é uma equação do 2º grau em  $h$  e as raízes podem ser obtidas facilmente através da relação entre a soma e o produto entre elas,  $h_1h_2 = K_{CM}^2$  e  $h_1 + h_2 = l$ .

Para o estudo do movimento oscilatório da barra em torno do ponto  $O$ , a Eq. 21 pode ser simplificada, fazendo-se  $\sin\theta \sim \theta$ , para que experimentalmente possamos obter o ponto  $O'$ , o centro de oscilação. Deste modo,

$$\ddot{\theta} = -\frac{gh}{K_o^2} \theta \quad \text{para } \sin \theta \sim \theta. \quad (25)$$

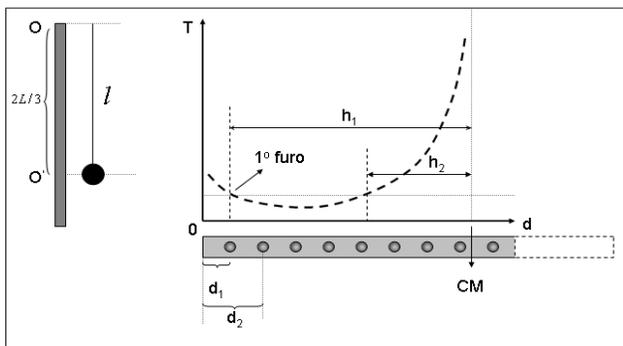
A Eq. 25 é uma equação diferencial de um MHS, cujo período é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{Mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{CM} + Mh^2}{Mgh}}. \quad (26)$$

Observa-se que na Eq. 26,  $T$  varia com  $h$  de um modo mais complicado quando comparado com o período de um pêndulo simples. Esta equação mostra que podem haver dois pontos (pivôs) na barra que fornecem o mesmo período, algo que não ocorre em pêndulos simples. Agora temos condições de seguir com o procedimento experimental para a barra homogênea com furos equidistantes.

No procedimento experimental, pivotamos a barra pelo 1º furo, o mais próximo da extremidade. O furo deverá estar apoiado num suporte horizontal, com o mínimo de atrito, para poder oscilar. A barra deve ser metálica, relativamente pesada e o suporte horizontal deve ser de metal maciço, cilíndrico, possuindo uma cunha na ponta para reduzir o atrito no contato com o furo da barra, bem no ponto de apoio. O ideal é fabricar o equipamento numa oficina mecânica, pois os equivalentes vendidos por empresas especializadas são extremamente ruins e bastante onerosos, como a maioria dos equipamentos para experimentos de mecânica ofertados no mercado.

Em seguida, deve-se obter o período para cada furo da barra, até alcançar o CM (para uma barra com 1m de comprimento, o ideal é ter pelo menos 20 furos). Para a medição do período  $T$ , colocamos a barra para oscilar 10 vezes para cada furo e cronometrarmos o tempo. Obtemos o período correspondente a cada furo dividindo o tempo por 10. A incerteza nas medições deverá ser especificada apropriadamente através da propagação de incertezas e de acordo com a teoria de erros. Uma vez obtidos os períodos até o furo correspondente ao CM, plotamos o gráfico  $T \times d$ , onde  $d$  é a distância entre a extremidade da barra e o ponto exato de apoio na cunha, para cada furo (Fig. 9).



**FIGURA 9.** Perfil do gráfico do período versus a distância entre a extremidade da barra e o furo (pivô) para o pêndulo físico em formato de barra homogênea.

No gráfico da Fig. 9, marcamos o CM da barra ( $L/2$ ) e observamos que o período da barra tende ao infinito quando o pivô se posiciona próximo ao CM. Identificamos o 1º furo nesta curva e traçamos uma reta horizontal ao eixo das abscissas, para identificar o 2º ponto da barra que possui período igual ao do 1º furo. Deste modo, identificamos no gráfico os valores de  $h_1$  e  $h_2$  e, conforme deduzido anteriormente, obtemos  $K_{CM}$ ,  $K_o$  e  $l$ .

O pêndulo simples equivalente tem comprimento teórico dado por  $l = K_o^2/h = I_o/Mh$ . Podemos efetuar um cálculo através desta equação para confrontar com o resultado experimental anteriormente obtido. Para uma barra homogênea, o momento de inércia  $I_o$  em torno de um ponto localizado em sua extremidade é  $I_o = ML^2/3$  e o comprimento  $l$  do pêndulo simples equivalente será então  $l = I_o/Mh = ML^2/(3Mh)$ . Como  $h = L/2$ , que é a localização do CM da barra, obtemos, finalmente,  $l = 2L/3$ . Ou seja, para a barra suspensa no ponto  $O$  (extremidade), o centro de percussão fica localizado no ponto  $O'$ , a  $1/3$  da extremidade inferior da barra (Fig. 9).

## IV. CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou divulgar alguns experimentos simples de mecânica física relacionados ao tema dinâmica do corpo rígido e cinemática do corpo rígido. Ao mesmo tempo, elencou-se a teoria necessária para a compreensão do problema e para a validação dos resultados experimentais obtidos. Apesar de serem de fácil montagem, os experimentos são reveladores das Leis e Teoremas que explicam o movimento geral do corpo rígido, como a Lei da conservação da energia mecânica, Lei da conservação do momento angular, Teorema do impulso de uma força resultante externa, Lei da conservação do momento angular em relação a um eixo, taxa de variação do momento angular e sua relação com o torque de uma força externa e momento de inércia do corpo rígido em relação a um eixo. Neste último, verificou-se também o teorema dos eixos paralelos.

Este trabalho pretende auxiliar professores de física e ciências em suas aulas teóricas, oferecendo exemplos práticos de aplicações que podem facilmente ser realizados em sala de aula, objetivando a aplicação imediata do conteúdo abordado nas aulas. Ao mesmo tempo, este trabalho fornece ferramentas e técnicas experimentais que podem ser adotados nas aulas de laboratório, em problemas específicos que envolvem corpos rígidos. Em alguns casos, adentrou-se no tema das oscilações de corpos rígidos, como o do pêndulo físico. No caso específico de movimentos com alta velocidade angular, o trabalho reapresentou a técnica da filmagem e utilização do software gratuito VirtualDub, que transforma o filme num agrupamento de quadros separados por um intervalo de tempo suficiente para que se possa determinar com relativa precisão a posição e o tempo de um determinado ponto do corpo rígido em rotação. Com isto, é possível obter a taxa de variação da posição angular e a velocidade angular instantânea correspondente.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio parcial das agências FAPESP e CNPq sob nº FAPESP/12/13064-4, CNPq/MCTI/SECIS406035/2013-0, CNPq/310419/2012-3DT, CNPq/306095/2013-0 PQ e Capes 88881.030340/13-01 BJT.

## REFERÊNCIAS

[1] Sismanoglu, B. N., Germano, J. S. E., Amorim, J. e Caetano, R., *A utilização da filmadora digital para o estudo do movimento dos corpos*, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 1501-1–1501-7, (2009).

*Aprendendo a dinâmica do corpo rígido através da experimentação*

[2] Sismanoglu, B. N., Caetano, R. F., Germano, J. S. E., Rezende, M. V. O., Hoyer, Y. D., *Dinâmica de massa variável: corrente suspensa na máquina de Atwood*, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 2310-1 – 2310-7 (2011).

[3] Symon, K. R., *Mecânica*, (Editôra Campus, Rio de Janeiro, 1982).

[4] Goldstein, H., *Classical Mechanics* 2nd ed., (Addison-Wesley, Reading, 1980),

[5] Divisão de Ciências Fundamentais do ITA, <http://www.ief.ita.br/portal/?q=node/114>, consultado em 06 de março de 2014.

[6] [www.virtualdub.org](http://www.virtualdub.org), consultado em 06 de março de 2014.

# Estudio de movimientos en tiempo real. Dificultades de aprendizaje en dos diseños didácticos diferentes



**Yanitelli, Marta<sup>1</sup>; Concari, Sonia Beatriz<sup>2</sup>; Scancich, Miriam<sup>1</sup>;  
Pérez Sottile, Ricardo<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,  
Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, C.P. 2000, Rosario, Argentina.*

<sup>2</sup>*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Rosario,  
Universidad Tecnológica Nacional, E. Zeballos 1341, C.P. 2000, Rosario, Argentina.*

**E-mail:** myanitel@fceia.unr.edu.ar

(Recibido el 3 de Febrero de 2014, aceptado el 25 de Agosto de 2014)

## Resumen

En los últimos años se han ido configurando nuevos escenarios para la experimentación en la enseñanza de las ciencias en los cursos básicos universitarios de física, a partir de la incorporación de diferentes tecnologías digitales. La presente investigación estuvo orientada a detectar posibles correspondencias entre las dificultades que evidencian los estudiantes en el tratamiento de gráficas de variables cinemáticas, correspondientes a dos diseños didácticos que utilizan, uno de ellos, un sistema de adquisición de datos en tiempo real y el otro, una cámara digital. Los resultados obtenidos sugieren que tales dificultades no dependerían del recurso informático utilizado sino que estarían asociadas con la brecha que existe entre las características concretas del fenómeno en estudio y las variables abstractas asociadas a la descripción física del movimiento y su modelado.

**Palabras clave:** Tecnologías digitales, dificultades de aprendizaje, gráficas de variables cinemáticas.

## Abstract

New scenes have been formed for the experimentation in science teaching, particularly in university physics courses, with the incorporation of different digital technologies in education. The present research was designed to detect possible correspondences in difficulties that students show in processing kinematic variables graphically according to two instructional designs with digital technologies. One of them has used a data acquisition system in real time and the other a digital camera. The results suggest that such difficulties would do not depend on the computing resource used but they would be associated with the gap between the specific characteristics of the phenomenon under study and the abstract variables associated with physical description and modeling motion.

**Keywords:** Digital technologies, learning difficulties, graph kinematic variables.

**PACS:** 01.40.Fk, 01.50.Lc, 45.40.Aa

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Los cambios y demandas sociales impuestos por la denominada Sociedad del Conocimiento exigen que las instituciones educativas se adecuen a ellos, introduciendo las actuales tecnologías de la información y la comunicación (TIC), ya que será en este contexto en el que los individuos se relacionarán, aprenderán y desarrollarán profesionalmente. En particular, las instituciones destinadas a la formación de ingenieros deben acompañar este proceso de cambio cultural incorporando las tecnologías digitales en sus ámbitos de actividad institucional a través de planteamientos pedagógicos que contemplen la adquisición y renovación permanente de nuevas capacidades y competencias.

Así, en los últimos años se han ido configurando nuevos escenarios para la experimentación en la enseñanza de las Ciencias en los cursos básicos universitarios a partir de la incorporación de las diferentes tecnologías digitales. De acuerdo con el tipo de que se trate y las formas de representación utilizadas, existe un nivel diferencial de habilidades intelectuales involucradas que contribuyen al crecimiento y transformación de los procesos de pensamiento. En particular, los sistemas de adquisición de datos en tiempo real y el video digital ofrecen interesantes posibilidades desde el punto de vista educativo.

En los cursos universitarios de física, las tecnologías empleadas están principalmente vinculadas al trabajo experimental, y en el primer curso, a temas de mecánica.

La representación gráfica de variables cinemáticas, entre otras, es una actividad de aprendizaje generalmente

presente en los experimentos de mecánica, pues constituye un medio para construir conocimiento de conceptos y procedimientos científicos inherentes a la disciplina.

En este trabajo, se presentan resultados de un meta-análisis realizado sobre los resultados informados de dos experiencias didácticas llevadas a cabo en sendos cursos de física con estudiantes de ingeniería, en dos universidades públicas de Argentina.

## II. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES SOBRE EL TEMA

Numerosas investigaciones asociadas a la introducción de los sistemas de adquisición de datos en las prácticas de laboratorio han mostrado que este recurso brinda oportunidades para ayudar al estudiante a aprender significativamente construyendo su conocimiento [1, 2]; favorecer la capacidad de razonar y comprender conceptos científicos [3]; introducir modificaciones en variables relevantes para la aplicación de un dado modelo teórico y establecer criterios de ajuste [4] y contribuir a cambiar algunas ideas previas erróneas muy frecuentes y persistentes sobre el movimiento de un objeto por un plano inclinado y el movimiento oscilatorio de un cuerpo sujeto a un resorte [5]. Otras investigaciones han focalizado su interés en el desarrollo de habilidades para la interpretación de gráficas [6, 7].

En relación con las perspectivas que ofrece el video digital, algunos autores han planteando que el análisis de videos podría constituir una herramienta potencialmente útil para el aprendizaje de diversos temas, en especial, el movimiento de tiro oblicuo cuando los efectos de roce del aire pueden despreciarse y cuando son significativos [8], caída libre de objetos [9-11] y en experiencias de Mecánica [12, 13]. La inversión requerida no insume grandes costos; los programas informáticos de tratamiento de vídeo digital no solo permiten obtener datos numéricos de las filmaciones, también generan las gráficas correspondientes; las actividades resultan motivadoras para los estudiantes y los resultados experimentales son aceptables.

Un aspecto característico de ambos recursos es que permiten fortalecer las interrelaciones entre los diferentes tipos de lenguajes -icónico, verbal, tabular, gráfico y algebraico- utilizados para describir movimientos reales [14]. Sin embargo, diversas investigaciones [6, 7] dan cuenta de las distintas dificultades que tienen los estudiantes con el análisis e interpretación de gráficas de movimientos en tiempo real aduciendo que los estudiantes esperan tratar con gráficas matemáticas de funciones regulares y/o casos ideales de física e interpretan las "irregularidades" como indicador de errores de medición y/o signos de mal funcionamiento de los aparatos.

Estos resultados y los obtenidos en dos investigaciones [15, 16] que hemos realizado a partir de la implementación de dos diseños didácticos que incorporan, uno de ellos, un sistema de adquisición de datos en tiempo real y el otro, videos producidos por los propios estudiantes y procesados con programas computacionales de uso libre, nos motivaron

*Estudio de movimientos en tiempo real. Dificultades de aprendizaje...*

a continuar profundizando en las dificultades que evidencian los estudiantes en el tratamiento y la interpretación de gráficas de variables cinemáticas.

Los referentes teóricos que orientaron el presente estudio se organizaron con aportes provenientes del paradigma cognitivo actual, en particular, la teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel. Cuando un nuevo conocimiento es aprendido por un proceso de interacción con conceptos o proposiciones previas que posee el sujeto, éstos también se modifican. La presencia sucesiva de este hecho produce una elaboración adicional jerárquica de los conceptos y proposiciones, dando lugar a una diferenciación progresiva [17]. A medida que las nuevas informaciones son adquiridas, los elementos ya existentes en la estructura cognitiva pueden ser precisados, relacionados y, como consecuencia, reorganizados alcanzando un significado nuevo. Esta recombinación de los elementos deviene en una reconciliación integradora.

Todo aprendizaje producido por reconciliación integradora también dará lugar a una mayor diferenciación de los conceptos o proposiciones existentes [17]. La diferenciación progresiva y la reconciliación integradora son procesos dinámicos que ocurren durante el aprendizaje significativo de conceptos, principios y leyes de la Física.

La incorporación de los medios digitales en las actividades experimentales de física no garantiza un aprendizaje comprensivo y significativo, su uso demanda diseños didácticos específicos que potencien una interacción activa de los estudiantes con el equipo experimental y pongan en acción su capacidad de conceptualización y simbolización de los fenómenos reales.

En particular, han de promover procesos reflexivos durante el análisis y la interpretación de las gráficas obtenidas con los recursos informáticos. Por ello consideramos que el desarrollo de la presente investigación orientada a detectar posibles correspondencias entre las dificultades que evidencian los estudiantes en el tratamiento de gráficas de variables cinemáticas correspondientes a dos diseños didácticos que utilizan tecnologías digitales diferentes puede aportar insumos para delinear estrategias que acompañen al estudiante en el pasaje por los diferentes niveles de abstracción requeridos para una comprensión genuina de los fenómenos físicos.

## III. LAS INVESTIGACIONES QUE SE CONSTITUYERON EN OBJETO DE ESTUDIO

Las investigaciones se llevaron a cabo en dos cursos de física I del ciclo básico de carreras de Ingeniería; uno de ellos, de la Facultad de ciencias exactas, ingeniería y agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) y el otro, de la Facultad Regional Rosario de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), ambas instituciones de Argentina.

Los diseños didácticos aplicados en ambos cursos, contemplan un conjunto de actividades que orienta el trabajo de los estudiantes, en el estudio cualitativo de la situación problemática planteada y los posiciona en relación

Yanitelli, Marta et al.

con el marco teórico específico. Tales diseños, promueven el desarrollo de acciones en forma grupal. Como resultado de lo actuado, los estudiantes elaboran una memoria escrita que incluye los resultados obtenidos, el análisis crítico e interpretación de los mismos, el enunciado de conclusiones y posibles implicancias.

### A. Investigación sobre la introducción de un sistema de adquisición de datos como recurso didáctico

Para el desarrollo de la investigación de Yanitelli, Massa y Scancich [15] se seleccionó una práctica de laboratorio orientada al estudio del primer principio de Newton a partir del movimiento de un planeador que flota sobre un colchón de aire, eliminándose el contacto entre superficies, Figura 1.

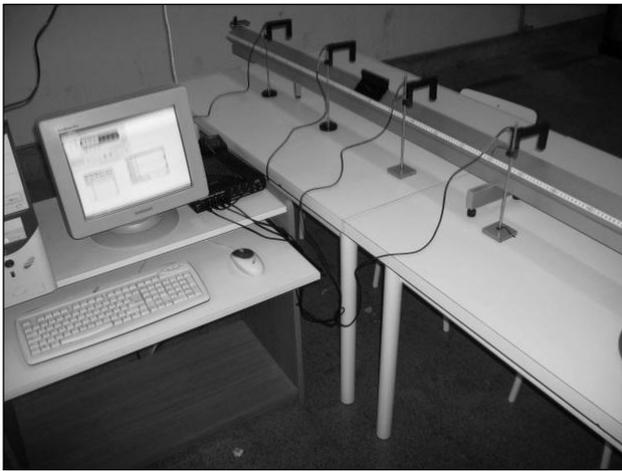


FIGURA 1. Dispositivo experimental.

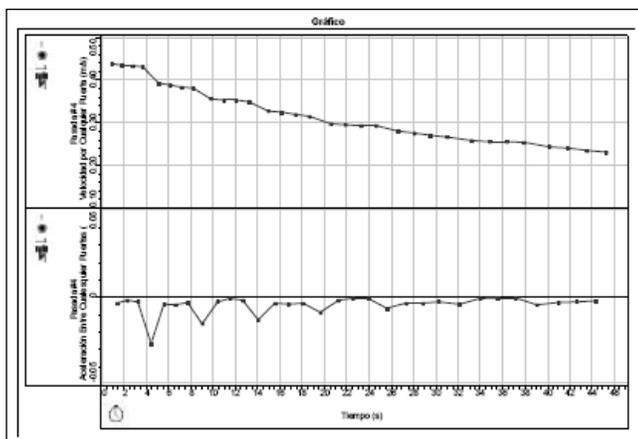


FIGURA 2. Módulo de la velocidad y componente de la aceleración en función del tiempo, gráficas superior e inferior respectivamente.

En la Figura 2 se muestran las gráficas del módulo de velocidad y la componente de la aceleración en función del tiempo, donde se registran distintas situaciones referidas al

movimiento del planeador. Los picos pronunciados que se destacan en la gráfica  $a=a(t)$  no tienen significado físico, sino que son resultado de un algoritmo de cálculo.

En la transformación de los datos se apeló a un análisis cualitativo integral y se definió, a priori, el siguiente conjunto de categorías asociadas a las cuestiones propuestas en la guía:

*Diferenciación de velocidades.* Atiende a la interpretación de las condiciones experimentales sobre el límite implicado en la definición de velocidad instantánea.

Se definieron las modalidades: Referencia sólo al concepto de velocidad media; Aproximación a velocidad instantánea; Referencia sólo a velocidad instantánea, sin especificar definiciones cinemáticas.

*Tipificación del movimiento.* Hace referencia a los supuestos explicitados sobre la caracterización del movimiento del planeador. Se tienen en cuenta, además, las consideraciones acerca del impacto del planeador en los extremos de la pista. Se adoptaron cinco modalidades: Afirmación MRU; Tendencia MRU; Contradicción entre MRU y MRUV; Impacto en términos de MRUV; Impacto sin identificar tipo de movimiento.

*Interpretación de gráfica en tiempo real.* Se establecieron las siguientes subcategorías: Lectura  $\Delta t$ . Atiende a la identificación y cálculo del intervalo de tiempo en los diferentes momentos del recorrido del planeador: tramo comprendido por los cuatro sensores y el tramo correspondiente al choque contra la banda elástica. Se tuvieron en cuenta las modalidades: Lectura correcta de los intervalos de tiempo; Lectura incorrecta de los intervalos de tiempo; Sin lectura. Gráfica de  $v=v(t)$ . Hace referencia a la diferenciación de los valores representados en la gráfica de la velocidad del planeador en función del tiempo transcurrido. Se incluyeron tres modalidades: Interpretación física de la gráfica en los tramos rectos; interpretación física de la gráfica en los extremos; sin interpretación. Gráfica  $a=a(t)$ . Se refiere al significado otorgado a la aceleración en los diferentes tramos del recorrido del planeador. Se adoptaron las modalidades: Interpretación física correcta de la gráfica en los tramos rectos; interpretación física incorrecta de la gráfica en los extremos; sin interpretación.

*Representación de fuerzas.* Considera los elementos incorporados en la construcción del diagrama de cuerpo aislado del planeador en movimiento a lo largo de la pista de aire. Se establecieron las modalidades: Diferenciación de las interacciones en los tramos rectos y en la colisión con la banda elástica en los extremos; Diferenciación de fuerzas actuantes sobre el planeador sólo en el tramo recto.

La asociación de modalidades a cada categoría de análisis, detectadas en las producciones escritas de los estudiantes, permitió identificar tres niveles de conceptualización.

*Conceptualización significativa (36%).* Todos los grupos interpretaron la gráfica  $v=v(t)$  apelando a conceptos físicos y elementos de la matemática, denotando que los estudiantes asociaron el movimiento real con las características ideales del fenómeno. Sin embargo, se observó que no lograron interpretar la gráfica  $a=a(t)$ . Algunos grupos otorgaron significado físico a los valores

de los picos pronunciados de la gráfica interpretando la aceleración en ese tramo como la pendiente de la curva  $v=v(t)$ , sin comprender que éstos sólo derivan de un algoritmo de cálculo. En la interpretación de  $a=a(t)$  correspondiente al movimiento del planeador en los tramos rectos de la pista, algunos grupos elaboraron una explicación sustentada en la definición de aceleración media sin tener en cuenta la inversión del movimiento.

Algunos grupos justificaron las distintas pendientes observadas en la gráfica de  $v=v(t)$  durante el recorrido del planeador sobre la pista, desde un punto de vista dinámico.

*Conceptualización sesgada* (43%). El análisis de las gráficas  $v=v(t)$  y  $a=a(t)$  está sesgado por términos físicos y/o matemáticos utilizados en forma imprecisa. En particular, el estudio de la gráfica  $v=v(t)$  está sesgado por argumentos de tipo icónico debido a que el análisis se realizó permanentemente vinculado con las pendientes de los segmentos, sin considerar el significado físico de las mismas. No consiguieron elaborar relaciones fundamentadas entre los conceptos físicos y los elementos de las gráficas.

*Conceptualización reducida* (21%). La indicación incorrecta de los signos asociados a las variables cinemáticas y las explicaciones ambiguas basadas en algunos conceptos y elementos matemáticos evidencian un tratamiento limitado de las gráficas  $v=v(t)$  y  $a=a(t)$ . La confusión conceptual evidenciada denota que estos estudiantes no han asimilado información relevante para vincular las gráficas con el movimiento real del sistema en estudio.

## B. Investigación sobre la incorporación del video digital como recurso didáctico

La investigación de Concari y Pérez Sottile [16] se efectuó sobre una práctica de laboratorio diseñada para integrar conocimientos y transferirlos a la resolución de un problema, al finalizar el desarrollo del tema movimiento en una y dos dimensiones. La actividad consistió en el registro en video de movimientos de diversos objetos procesados con un programa computacional que permitió el análisis de los fotogramas, la construcción de gráficas de variables cinemáticas y los correspondientes ajustes.

Las variables de interés, los valores asignados y los criterios de evaluación de las mismas, empleadas en la investigación para analizar la producción de los estudiantes fueron:

*Registro del video.* Evalúa el resultado del registro. Los valores que adopta esta variable son: No lo hace; mal, corresponde a videos con deficiencias importantes; regular, corresponde a videos con algunos errores menores, que no impiden su procesamiento; bien, valor asignado a un video que reúne las condiciones de calidad fotográfica y operativa.

*Descripción.* Evalúa el grado de descripción que el estudiante hace del evento preparado o natural. Los valores de esta variable son: Lat. Am. J. Phys. Educ. **8**, No. 1, March 2014, corresponde a descripciones incompletas del

*Estudio de movimientos en tiempo real. Dificultades de aprendizaje...* objeto y/o de la situación; Bien, valor asignado a descripciones del objeto y de la situación registrada que permiten identificarlos aún sin ver el video.

*Representación gráfica.* Tiene en cuenta la inclusión de gráficos de posición vs. tiempo y los de velocidad vs. tiempo para cada una de las dimensiones que correspondiesen. Los valores de esta variable son: no lo hace; mal; regular corresponde a gráficas incompletas; bien, corresponde a gráficas  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $v_x=v_x(t)$  y  $v_y=v_y(t)$  del objeto, que permiten analizar su movimiento.

*Ajustes.* Considera la realización de ajustes de los puntos de las gráficas. Los valores que adopta esta variable son: no lo hace; mal; regular, corresponde a ajustes gráficos que no incluyen la expresión matemática correspondiente, y/o los parámetros de dicha ecuación; bien, ajustes gráfico y analítico que incluyen los parámetros de las ecuaciones matemáticas correspondientes.

*Análisis.* Evalúa el análisis de los ajustes realizados. Los valores que adopta son: no lo hace; mal; regular, corresponde a análisis incompletos; bien, análisis de los ajustes incluyendo el significado de los parámetros de las ecuaciones matemáticas correspondientes.

*Interpretación de los resultados obtenidos.* Considera la presentación de discusiones sobre las gráficas y ajustes realizados, y su vinculación con el movimiento estudiado.

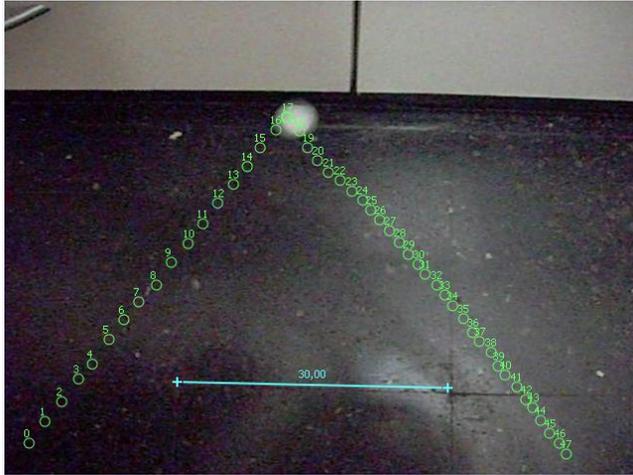
Interesa evaluar la correspondencia entre la representación gráfica, la representación matemática y el movimiento real del objeto. Los valores que adopta esta variable son: no lo hace; mal; regular, corresponde a interpretaciones incompletas y confusas de los resultados; bien, discusiones que incorporan el significado de los parámetros obtenidos de los ajustes, identificación de la ecuación matemática como ley de movimiento, y las características del mismo.

Los resultados obtenidos mostraron que el 90% de los estudiantes hicieron algún tipo de ajuste, aunque aproximadamente el 70% (evaluados como Regular), lo hace incluyendo sólo el ajuste gráfico, sin presentar la expresión matemática correspondiente, y/o los parámetros de dicha ecuación. Los estudiantes que realizaron un ajuste, gráfico y analítico, incluyendo los parámetros de las ecuaciones matemáticas desarrollaron un análisis adecuado de tales ajustes.

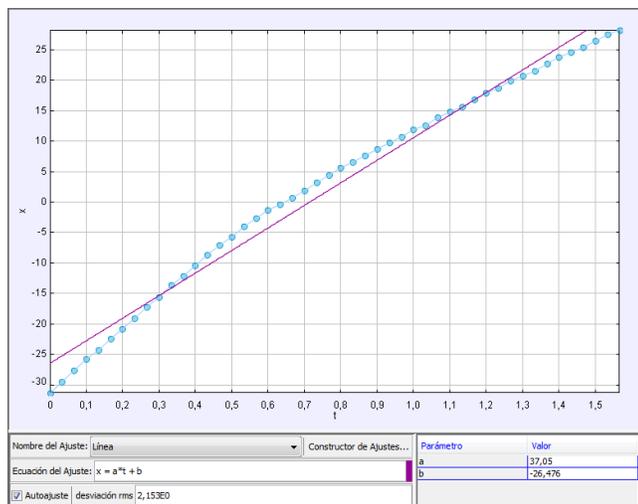
Los errores más significativos provienen de interpretar los valores arrojados por el programa, sin considerar las incertezas experimentales que derivan en puntos en las gráficas, que presentan dispersiones. Asimismo, se registraron ajustes con una única función lineal, de puntos que responden a dos movimientos diferentes como en el rebote de una pelota contra la pared, o no seleccionar adecuadamente la función matemática que mejor ajuste los puntos experimentales, Figura 3 y 4.

Es en la variable interpretación de los resultados obtenidos, donde se han detectado las mayores dificultades de los estudiantes. Un 60%, aproximadamente, elabora interpretaciones incompletas y poco precisas o no efectúa interpretación alguna. Finalmente, se observó que la mitad de los estudiantes presenta dificultades para comprender la correspondencia entre el movimiento real y las gráficas, y

entre las gráficas y las funciones matemáticas que la modelan.



**FIGURA 3.** Fotogramas de una pelota de golf rodando sobre el piso y rebotando en forma oblicua.



**FIGURA 4.** Selección inadecuada de una función lineal para ajustar los datos experimentales del movimiento.

### III. METODOLOGÍA

Se adoptó un enfoque cualitativo de carácter interpretativo, basado en un estudio comparativo entre las dos investigaciones que se describieron en el apartado anterior.

En particular, interesó trabajar en profundidad sobre las dificultades que evidenciaron los estudiantes en el tratamiento y la interpretación de gráficas de variables cinemáticas, sin hacer uso de parámetros estadísticos descriptivos.

Las memorias escritas elaboradas como resultado de las actividades experimentales realizadas se constituyeron en los instrumentos de recolección de datos. Se utilizó una técnica de análisis interpretativo textual [18]. La misma se

basó en la identificación de expresiones en el documento escrito por los estudiantes que pueden ser interpretadas en términos de representaciones activadas.

En el análisis de los datos cualitativos se utilizó el método de comparación constante propuesto por Glaser y Strauss [19]. Este método ha sido diseñado para contribuir a generar conocimiento que se corresponde estrechamente con los datos, ya que la comparación constante obliga a considerar la mayor diversidad de éstos. Por diversidad se entiende que cada incidente (observaciones, entrevistas, documentos) es comparado con otro incidente, en términos de la mayor cantidad de similitudes y diferencias como sea posible. Se parte del supuesto de que estas divergencias y semejanzas permiten obtener conocimientos claros, consistentes y plausibles del evento en estudio. Este método hace uso explícito de procedimientos de codificación y análisis con el propósito de establecer categorías teóricas que se conciben como analíticas y conceptuales. Las mismas engloban información diversa pero con cierta afinidad y denominador común.

El estudio comparativo se abordó a los efectos de detectar posibles correspondencias entre las dificultades que evidencian los estudiantes en el tratamiento de gráficas de variables cinemáticas correspondientes a diseños didácticos que utilizan recursos digitales diferentes.

### IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como consecuencia del reconocimiento de semejanzas que permitieron generalizar y de diferencias que viabilizaron el particularizar, se identificaron tres categorías de las dificultades que denotan los estudiantes al abordar el análisis de gráficas de movimientos en tiempo real obtenidas con tecnologías digitales diferentes. Las mismas dan cuenta de dificultades asociadas tanto al empleo de los distintos tipos de lenguaje involucrados en el estudio de movimientos desde un enfoque cinemático como con la modelización del sistema en estudio. En la Tabla I se presentan las categorías identificadas, su descripción, algunas dificultades representativas de cada una de ellas y el diseño didáctico en el que se evidenciaron. La simbología SAD y VD corresponde al diseño didáctico que incorpora un sistema de adquisición datos y video digital respectivamente.

Del análisis de la Tabla I se puede inferir que las dificultades correspondientes a cada una de las categorías presentan diferentes niveles de demanda cognitiva asociados a los distintos grados de abstracción requeridos para la comprensión y traducción a los diferentes tipos de lenguajes involucrados. A partir del evento, consistente en un movimiento real (natural o provocado), eminentemente visual y pictórico, se requiere que el estudiante construya, comprenda, interprete y analice gráficas que constituyen representaciones de dicho movimiento, en las que están involucrados sistemas de referencia, sistemas de coordenadas, escalas, datos experimentales y conceptos físicos. Finalmente, se requiere que el estudiante modele el movimiento a través de un proceso de selección de

funciones matemáticas que ajusten los puntos de las gráficas -lo cual demanda dominar el lenguaje simbólico de la matemática-, que interprete las mismas en el marco de las teorías de la disciplina -lenguaje específico de la física- y las vincule con el hecho real analizado.

En este sentido, la presencia de dificultades identificadas como genéricas derivó en que los estudiantes

*Estudio de movimientos en tiempo real. Dificultades de aprendizaje...*  
no lograron utilizar las herramientas de ajuste que permiten relacionar entre sí los lenguajes gráfico y algebraico al estudiar el movimiento real y, por lo tanto, algunos no pudieron avanzar en la interpretación del evento en estudio mientras que otros, elaboraron interpretaciones incompletas y confusas.

**TABLA I.** Descripción de las categorías, dificultades asociadas y diseño didáctico en el que se detectaron.

Categoría	Descripción	Dificultades	Diseño didáctico
Genéricas	Asociadas a los ajustes gráficos que se corresponden con el trazado de una curva continua por los puntos registrados, obtenidos de datos experimentales, y a la especificación de la función analítica correspondiente a dicha curva. Estas dificultades están relacionadas con la lectura de la gráfica y el tratamiento matemático de los datos y gráficas obtenidas.	Consignar la función analítica asociada a la curva que mejor ajusta los puntos experimentales. Ajustar los puntos experimentales que responden a dos movimientos diferentes del sistema en estudio.	VD SAD-VD
Básicas	Hacen referencia a la asignación de significado físico tanto a los valores representados en las gráficas posición-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo como a los parámetros de la función analítica, que proporciona el programa informático. Estas dificultades están asociadas a la interrelación entre el lenguaje gráfico, el matemático y el disciplinar.	Asignar significado físico a los parámetros de la función analítica. Diferenciar los puntos de la gráfica que corresponden a dispersiones y a un algoritmo de cálculo no representativo del evento en estudio. Relacionar dispersiones con la escala seleccionada. Elaborar relaciones fundamentadas entre los conceptos físicos y las partes identificadas en las gráficas. Inferir algunas características del movimiento del sistema en estudio.	VD SAD-VD SAD-VD SAD-VD SAD-VD
Específicas	Están vinculadas a la interpretación de la información contenida en las gráficas en función de la estructura conceptual disponible, al establecimiento de relaciones con el sistema real que es objeto de estudio y a la diferenciación entre tendencia "ideal" y "real" en la evolución del comportamiento del sistema físico. Estas dificultades están ligadas con la modelización que implica traducir una situación del mundo real en una representación ideal, simplificada, del sistema en estudio.	Interpretar la función analítica de ajuste como ley de movimiento del sistema. Comprender la correspondencia entre el movimiento real y su representación en las gráficas registradas. Comprender la correspondencia entre las gráficas y el modelo matemático asociado. Reconocer que la ley de movimiento hace referencia a los conceptos (entidades abstractas) relevantes para la caracterización del sistema en estudio. Interrelacionar los resultados de las gráficas $v=v(t)$ y $a=a(t)$ .	VD VD SAD-VD SAD-VD SAD

Las dificultades denominadas básicas estarían denotando falencias en el dominio del lenguaje disciplinar, necesario para expresar correctamente la información que suministra tanto la función analítica derivada del ajuste gráfico de los puntos experimentales como las partes que han sido identificadas a partir del análisis de la estructura del gráfico y que dan cuenta de algunas características del movimiento del sistema. Como consecuencia de estas dificultades, a los estudiantes no les es posible avanzar más allá de

interpretaciones superficiales y en algunos casos ambiguas.

El análisis de las dificultades nombradas como específicas pone de manifiesto la ausencia de instancias de reconstrucción de significados que implica recuperar los conocimientos disponibles, relacionarlos con la estructura del gráfico para derivar en interpretaciones fundamentadas del movimiento en estudio y, finalmente, explicitar las propiedades relevantes y las relaciones lógico-matemáticas asociadas al modelo teórico.

Las dificultades detectadas en el marco de la presente investigación estarían asociadas con la brecha, indicada en línea de puntos en la Figura 5, que existe entre las características concretas del fenómeno en estudio y las variables abstractas asociadas a la descripción física del movimiento y su modelado. La evolución desde el nivel concreto al abstracto implica activar procesos de

interpretación, transformación, diferenciación e integración de la información contenida en la gráfica. Es decir, los estudiantes para lograr una comprensión genuina, que implica un aprendizaje significativo del movimiento de los cuerpos, tienen que superar un escalón importante que debería ser graduado desde la acción docente.



FIGURA 5. Esquema de evolución desde el nivel concreto al abstracto.

Desde esta perspectiva, los resultados obtenidos sugieren elementos para delinear estrategias que acompañen al estudiante en esta evolución. El planteo de acciones que contemplen desafíos crecientes en complejidad con una gradación “diferencial” posibilitaría el pasaje por diferentes niveles de abstracción requeridos para la modelización de los fenómenos físicos.

En las Figuras 6, 7 y 8, se presentan posibles acciones a realizar por los estudiantes, a fin de favorecer el tratamiento de *dificultades genéricas, básicas y específicas* y contribuir, de esta manera, a superar la brecha existente entre el nivel concreto y el simbólico-abstracto del fenómeno en estudio. En los esquemas elaborados se apeló a una estructura

escalonada con peldaños de pequeña altura para indicar un pasaje progresivo y gradual de una acción (consignada en la parte superior del escalón) a otra, de forma de propiciar que los estudiantes puedan alcanzar los niveles deseados de comprensión y de construcción de conocimientos superando las dificultades detectadas.

En lenguaje ausubeliano, la organización secuencial de acciones propuesta, tendiente a la superación de las dificultades identificadas, supone que una acción presentada previamente se constituye en soporte ideacional u organizador de la siguiente, de este modo, actúa como facilitador, justificando así la importancia de dicha organización.

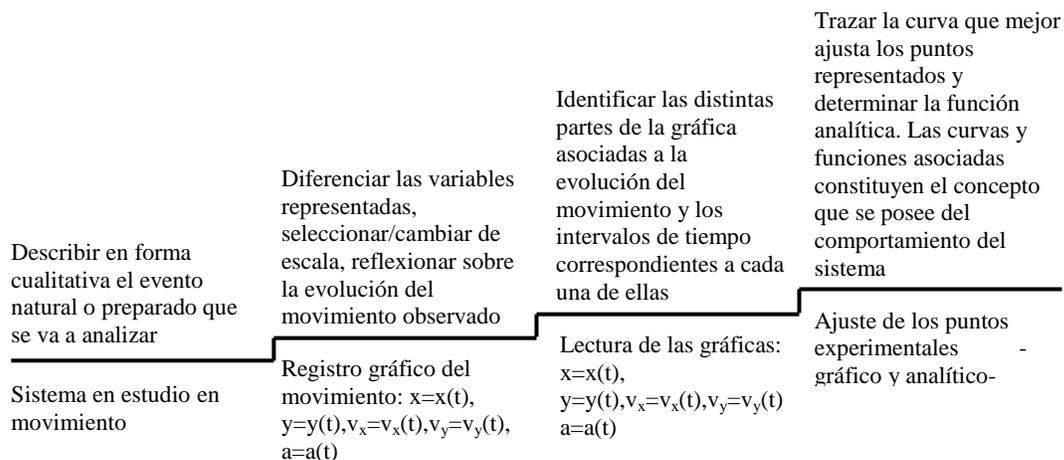


FIGURA 6. Esquema de acciones para favorecer el tratamiento de *dificultades genéricas*.

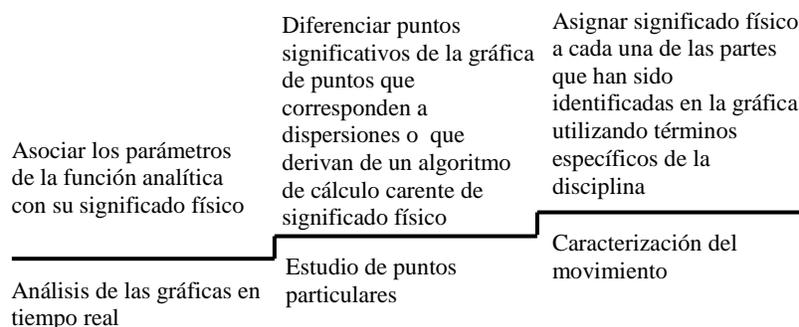


FIGURA 7. Esquema de acciones para favorecer el tratamiento de *dificultades básicas*.

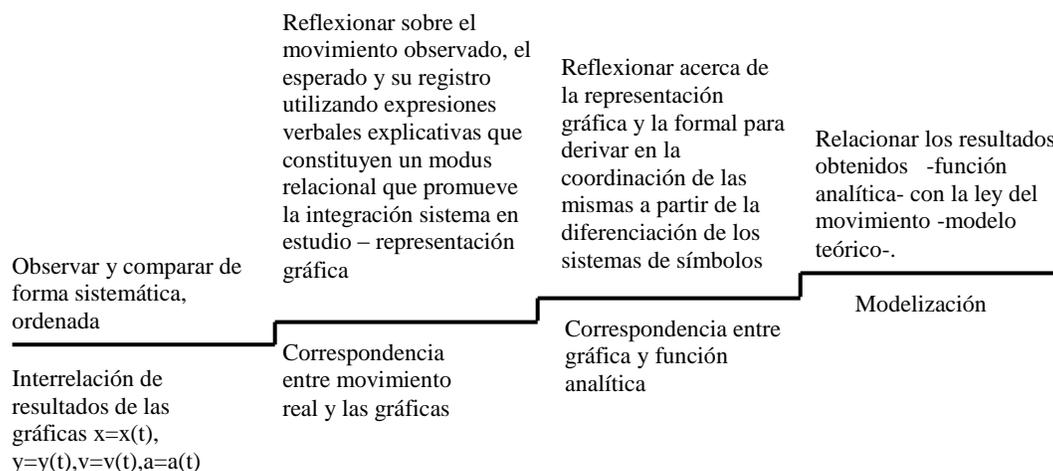


FIGURA 8. Esquema de acciones para favorecer el tratamiento de *dificultades específicas*.

## V. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos sugieren que las dificultades caracterizadas como genéricas, básicas y específicas no dependerían del recurso informático utilizado sino que estarían asociadas con la comprensión de los múltiples lenguajes que están involucrados en el estudio de una situación experimental en Física.

Si bien a los estudiantes les es más familiar el uso y apropiación de los recursos digitales, la interpretación de las gráficas y su modelado matemático, esencia de la descripción física del movimiento, les demanda internalizar información específica y por lo tanto un mayor esfuerzo cognitivo.

Es nuestra intención, continuar y profundizar en el estudio de las dificultades dado que consideramos que puede aportar elementos para fortalecer los fundamentos teóricos y metodológicos al delinear estrategias que contemplen una mayor incorporación, integración y aprovechamiento de las tecnologías en la formación de los estudiantes universitarios.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco de los proyectos: “Estrategias didácticas con integración de TIC para la enseñanza de la física en carreras de ingeniería” (UTN-25/MI01), “Influencia de las prácticas de laboratorio de física básica mediadas por un sistema informático en el desarrollo de representaciones y habilidades cognitivas de los estudiantes” (PID UNR/ING 328) y “Desarrollo de estrategias con integración de nuevos recursos didácticos para la educación en física y capacitación docente para su uso y autogestión” (SECTEI-2010-111-11).

## REFERENCIAS

- [1] Beltrán Llera, J., *Enseñar a aprender, Conferencia de Clausura*, Segundo Congreso de EDUCARED. (2003).
- [2] Newton, L., *Data-logging in the science classroom: approaches to innovation*, Second International Conference of the European Science Education Research Association (ESERA) Research in Science Education: Past, Present, and Future. (2000).

- [3] Sáez, M., Pintó, R. y García, P., *Relaciones conceptuales en el uso de MBL para el estudio del movimiento*, Enseñanza de las Ciencias. VII Congreso. Número Extra. (2005).
- [4] Yanitelli, M., Massa, M. y Moreira, M., *The use of personal computers in the resolution of experimental situations. Proceedings GIREP 2008 International Conference*. Nicosia, Chipre. (2010).
- [5] Torres Climent, A. L., *Empleo del laboratorio asistido por ordenador en la enseñanza de la física y química de secundaria y bachillerato*. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación en Ciencias **7**, 693-707 (2010).
- [6] Sassi, E., Monroy, G. y Testa, I., *Teacher training about real-time approaches: Research-based guidelines and training materials*, Science Education **89**, 28-3 (2005).
- [7] Testa, I., Monroy, G. y Sassi, E., *Students' reading images in kinematics: the case of real-time graphs*. International Journal of Science Education **24**, 235-256 (2002).
- [8] Calderón, S., Núñez, P. y Gil, S., *La cámara digital como instrumento de laboratorio: estudio del tiro oblicuo*. Latin-American Journal of Physics Education **3**, (2009). [http://www.fisicarecreativa.com/papers\\_sg/papers\\_sgil/Docencia/camara\\_dig\\_2k9.pdf](http://www.fisicarecreativa.com/papers_sg/papers_sgil/Docencia/camara_dig_2k9.pdf). Consulta realizada el 12 de noviembre de 2010.
- [9] Pérez Millán, C., *Uso de una cámara digital para estudiar la caída de los cuerpos*, Uso de Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de la Física, UNS - Bahía Blanca. (2008). [http://www.cienciaredcreativa.org/especiales/Informe\\_ceciliaPM2k9.pdf](http://www.cienciaredcreativa.org/especiales/Informe_ceciliaPM2k9.pdf). Consulta realizada el 12 de noviembre de 2010.
- [10] Sampallo, G. y Meza, S., *La cámara digital en la adquisición de datos en Física. Cómo obtener datos para el estudio de movimientos empleando la cámara digital*, (2005). <http://www.lanormalenlinea.com.ar/fq/DocFisica1/01datosmov.pdf>. y Guía RAD video tools. <http://www.lanormalenlinea.com.ar/fq/DocFisica1/03GuiaRad.pdf>. Consulta realizada el 12 de noviembre de 2010.
- [11] Sampallo, G. y Meza, S., *La cámara digital en el estudio de movimientos*, Memorias V CAEDI, pp. 527-534 (2006).
- [12] Irala Leitão, L., Dorneles Teixeira, P.F. y Saraiva da Rocha, F. *A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica*. REIEC **6**, 1-15 (2011). <http://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v6n1/v6n1a03.pdf>.
- [13] Valdés Castro, R. y Tricio, V., *Actividades experimentales en física general con fotografía y vídeo digitales*. Revista Cubana de Física **24**, 46-50 (2007). <http://gemini.udistrital.edu.co/comunidad/grupos/gef/fisicayarte/artigos/fotografia%20y%20vide.pdf>. Consulta realizada el 12 de noviembre de 2010.
- [14] Juan Martínez, A., Juliá Espí, M., Jover Mullio, E., Prats Llopis, G., Pons Pons, I. y Bernat Martínez, S., *El vídeo digital como recurso didáctico para el estudio cinemático del movimiento*. Actes VII Jornades de la Curie d'Intercanvi d'Experiències de Física i de Química, 53-65 (2003). <http://www.tic.fisquim.org/video/Documentos/Articul.pdf>. Consulta realizada el 12 de noviembre de 2010.
- [15] Yanitelli, M., Scancich, M. y Massa, M., *Un experimento asistido por un sistema informático. Una indagación de relaciones conceptuales en el estudio del movimiento sobre una pista de aire*, Memorias X Simposio de Investigación en Educación en Física. Posadas, Argentina, (2010).
- [16] Concari, S. y Pérez Sottile, R., *Cámara digital y teléfono celular como recursos para el estudio cinemático de cuerpos en movimiento*. XVII Congreso Internacional Tecnologías para la Educación y el Conocimiento. Tecnologías Emergentes XVIICITEC2012. Madrid, España. (2012).
- [17] Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, (Editorial Trillas, México, 1983).
- [18] Bernárdez, E., *El papel del léxico en la organización textual*, (Universidad Complutense de Madrid, España, 1995).
- [19] Glaser, B. y Strauss, A., *El desarrollo de la teoría fundada*, En: Goetz, J. y LeCompte, M., 1988. Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa, (Ediciones Morata, Madrid, 1967).

# Intervenciones transversales basadas en situaciones problemas



**Meoli, Jorgelina Julia; Martínez, Diana Elina; Concari, Sonia Beatriz**

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Rosario, Universidad Tecnológica Nacional, E. Zeballos 1341, C. P. 2000, Rosario, Argentina.*

**E-mail:** jmeoli@frro.utn.edu.ar

(Recibido el 3 de Febrero de 2014, aceptado el 19 de Agosto 2014)

## Resumen

Se describe la "Intervención transversal basada en la situación problema: Informe pericial", aplicable a los cursos de física I de carreras de ingeniería. Su resolución requiere la transferencia de conocimientos de física desarrollados al momento de la implementación de la misma, y de contenidos de asignaturas de cursado paralelo. La propuesta desarrollada consiste en el planteo de una situación-problema a partir de un accidente de tránsito entre dos automóviles. Se plantea determinar la velocidad a la que circulaban los vehículos, el posible mecanismo del accidente y algunas vías de optimización del procedimiento a seguir en casos futuros. Para responder a estas cuestiones, los estudiantes deben recorrer un camino que incluye la búsqueda de información relativa al vehículo, a las condiciones de las calzadas y a la legislación vigente, entre otras. Desde la perspectiva del aprendizaje activo, se pretende que el estudiante logre la integración significativa de los conocimientos construidos, el desarrollo de competencias vinculadas a las futuras incumbencias profesionales, así como competencias transversales que completan una visión del estudiante como ser integral y social.

**Palabras clave:** Tecnologías emergentes, TIC, enseñanza de las ciencias, estrategias didácticas.

## Abstract

The "Transverse intervention based on the situation problem: expert report", for physics courses for engineering students is described. Physics knowledge teachered and contents of parallel courses have to be transferred for its resolution. The developed proposal consists of a problem situation from a traffic accident between two cars. Students have to determinate the speed to which the vehicles were circulating, the possible mechanism of the accident and some routes of optimization of the procedure to follow in future cases. To answer to these questions, the students must cross a way that includes the search of information relative to the vehicles, to the conditions of the causeways, to the in force legislation, etc. From the perspective of the active learning, there is claimed that the student achieves the significant integration of the constructed knowledge, the development of competitions linked to the future professional incumbencies, as well as transverse competitions that complete a vision of the student as an integral and social human being.

**Keywords:** Problem resolution, Transverse intervention, Didactic design, Physics, Engineering.

**PACS:** 01.40.gb, 01.55.+b

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Se propuso el desarrollo de una propuesta didáctica con características de una intervención de tipo transversal, destinada a promover el desarrollo de habilidades y competencias en la resolución de problemas que puedan presentarse en el ejercicio de la ingeniería, en la búsqueda y organización de la información, en la planificación, en la argumentación, justificación y aceptación de diversidades de soluciones del problema con sus respectivos análisis, en la utilización del lenguaje escrito y oral como instrumento de comunicación, consenso, aprendizaje, refutación y defensa, el juicio crítico y desarrollo de posturas éticas, el

trabajo cooperativo y colaborativo y la toma de decisiones y presentación de la respuesta.

El diseño fue orientado a que el estudiante desarrolle competencias en la capacidad de aprendizaje autónomo, y que en la dinámica de resolución de este tipo de problemas, modele y resuelva la situación enunciada analizando sus limitaciones, marcos teóricos de aplicación y posibilidades reales de extrapolación, orientando a promover el pensamiento crítico e innovador.

El diseño didáctico desarrollado: "Intervención transversal basada en la situación problema: Informe pericial", obtuvo el primer premio en la Categoría "Intervenciones pedagógicas transversales" del Concurso de ejercicios competencias emprendedoras en las Ingenierías,

*Meoli, Jorgelina Julia et al.*

en el marco del Programa Regional de Emprendedorismo e Innovación en Ingeniería (PRECITYE) [1], iniciativa auspiciada por el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) y realizada por instituciones de Argentina, Brasil, Chile y Uruguay para promover y difundir la cultura emprendedora y de innovación en la formación de ingenieros.

A través de la secuencia de consignas y actividades propuestas, el problema del choque adquiere una dimensión diferente a los clásicos problemas de lápiz y papel, revelando su marcado carácter transversal.

## II. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES SOBRE EL TEMA

La formación de profesionales reflexivos [2], junto con las características deseadas en el ingeniero que va a desempeñarse hoy y en el futuro cercano [3], van orientando progresivamente la enseñanza desde la clásica fragmentación en disciplinas enmarcadas en cátedras, hacia un currículo integrado, de acuerdo con la propuesta de James Beane quien critica el contenido del currículo de los estándares oficiales, aduciendo que éste pretende el dominio de contenidos de diversas disciplinas y “no el uso de los conocimientos en relación con temas de la vida real, ni la integración de conocimientos que es necesaria para situaciones de la vida real” (Beane, [4], p. 121, citado por Ramírez Romero [5]). Propone en cambio, que deben incluirse temas, problemas y preocupaciones ampliamente compartidas en toda la sociedad [5].

De acuerdo con James Beane, la integración curricular es un enfoque pedagógico que se ocupa de mejorar las posibilidades de integración personal y social mediante la organización del currículo en torno a problemas y temas importantes, identificados de forma colaborativa por educadores y alumnos, sin que las fronteras de las disciplinas sean un obstáculo. Para este autor, la integración curricular consiste en organizar temas que se desprenden de experiencias, de intereses personales y globales y de la vida cotidiana, en el contexto de la comunidad en la que está inserta la institución educativa [4].

Por su parte, Ferreira Lorenzo [6], reflexiona sobre la integración curricular en la educación superior, proponiendo como principios la atención a los perfiles profesionales previsibles requeridos, basado en la determinación de las competencias propias de la profesión y la determinación de los perfiles profesionales afines; el principio de la comunicación oral, escrita y las relaciones interpersonales, para crear una cultura del debate, de la exposición de los resultados, del trabajo en equipos y de la aplicación de metodología de investigación para el desarrollo de los trabajos científicos; el principio de la aplicabilidad de la computación y las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC), insoslayable en una formación contemporánea que abarque el empleo de plataformas interactivas para la realización de cursos y actividades de aprendizaje; el principio de la atención a las especificidades de la ciencia, atendiendo a nuevos

conocimientos científicos y desarrollos tecnológicos, en el formato de asignaturas optativas y el trabajo interdisciplinario sobre la base de resolución de problemas reales planteados como proyectos de diferentes asignaturas o proyectos de investigación.

“Un modelo que se ajuste a estos principios puede garantizar la formación integrada de las cualidades académicas, laborales e investigativas que deben adoptarse en la organización curricular de la disciplina integradora a la vez que permitirá exhibir características de un currículo integral, polivalente, flexible, formativo, centrado en el alumno y motivante.” [6, p. 8].

La integración vertical de competencias ha sido incorporada en el currículo de carreras de ingeniería, como en el caso de ingeniería civil informática en una universidad de Chile [7].

Otros medios para integrar conocimientos lo constituyen los denominados trabajos integradores o las intervenciones pedagógicas transversales; éstas últimas son intervenciones didácticas -ejercicios, proyectos, talleres y dinámicas de trabajo, susceptibles de ser utilizadas en clase con fines pedagógicos- que para cumplir sus objetivos deben necesariamente desarrollarse en más de una asignatura.

De acuerdo con Echazarreta y Haudemand [8], “la metodología de los trabajos integradores consiste en aproximarse a la totalidad del problema desde el comienzo de la carrera universitaria, en los niveles de profundidad que sean posibles, según el momento y la asignatura en que se encuentre cursando el alumno”.

Siguiendo a esos autores, la estrategia de enseñanza seleccionada para desarrollar la propuesta corresponde al Método de Casos [9], la misma consiste en presentar a los estudiantes la descripción de una determinada situación real o ficticia, que tiene solución o no, para que intenten arribar a una solución individual o grupal. La propuesta debe resultar interesante por varias razones: como motivación, porque un problema o caso puede ser conflictivo e interpretado de diversos modos, lo cual puede conducir a la discusión e interés; para desarrollar la capacidad de análisis, de espíritu crítico y creativo; para la adquisición de nuevos conceptos e incremento de su vocabulario; para participar activamente; para que familiarizarse en la toma de decisiones [8].

Los objetivos de una intervención didáctica transversal pueden poner el énfasis en distintos aspectos. El desarrollo de competencias funcionales al emprendedorismo y/o la innovación son desde luego relevantes para la formación de ingenieros.

En tal sentido, se han adoptado las significaciones del Programa Regional de Emprendedorismo e Innovación en Ingeniería [1]: “se consideran competencias emprendedoras a un conjunto de saberes actitudinales, tácitos, que no suelen ser codificados por la educación formal y que forman parte de las características personales. Saber trabajar en equipo, tener la capacidad de asumir riesgos, identificar oportunidades, desarrollar redes de apoyo y saber fijar metas son algunas de las competencias emprendedoras”.

Se entiende por innovación a la “capacidad para modificar las cosas, incluso partiendo de formas o situaciones no pensadas con anterioridad, sin que necesariamente exista un requerimiento externo que lo empuje. Implica idear soluciones nuevas y diferentes ante problemas o situaciones que se presenten” [1].

*Intervenciones transversales basadas en situaciones problemas*

Tomamos como referencia el material provisto por los organizadores del concurso organizado por el PRECITYE, acerca de las competencias y habilidades en emprendedorismo e innovación, que se sintetizan en las Tablas I y II.

**TABLA I.** Descripción de las competencias emprendedoras y de innovación [1].

Competencia	Descripción
Toma de decisiones	Capacidad de analizar información, gerenciar, mitigar riesgos, moverse en ambientes inciertos, terrenos desconocidos y animarse a tomar decisiones. Motivación ante el Riesgo.
Creatividad e innovación	Capacidad para modificar y adaptar las cosas, incluso partiendo de formas o situaciones no pensadas con anterioridad, sin que necesariamente exista un requerimiento externo que lo empuje.
Aprendizaje continuo	Capacidad de extraer conocimiento de las acciones que se emprenden, la actitud de búsqueda de información. Cada error y cada éxito es una fuente de aprendizaje.
Sociabilidad	Capacidad de adaptación y de construir, mantener y explotar redes sociales.
Trabajo en equipo	Capacidad de colaborar y cooperar con los demás, de formar parte de un grupo y de trabajar juntos. Comunicar adecuadamente, flexibilidad para entender puntos de vista, liderar equipo, lograr resultados.
Liderazgo	Capacidad de orientar un grupo a la acción, transmitiendo la energía y seguridad necesaria.

**TABLA II.** Habilidades y actitudes emprendedoras y de innovación [1].

Habilidades	Actitudes
Identificar problemas	Proactividad
Estar abierto a nuevas ideas	Independencia
Obtener información bien fundada y hacer uso adecuado de ella	Responsabilidad
Analizar los aspectos positivos y negativos de diferentes situaciones	Compromiso
Analizar objetivamente las ideas propias y de otros	Versatilidad
Planificar	Dinamismo
Solucionar problemas	Versatilidad
Negociar	Ética
Persuadir	Iniciativa
Comunicarse	Acción en función de metas y objetivos

**III. LA PROPUESTA DIDÁCTICA**

La intervención fue titulada: “Intervención transversal basada en la situación problema: Informe pericial”. La misma fue diseñada para ser utilizada en la asignatura física I de las carreras de ingeniería pero también puede ser aplicado a la materia integradora del primer nivel de las diferentes carreras y se requieren conocimientos de física I, álgebra y geometría analítica, análisis matemático I, sistemas de representación, fundamentos de informática y legislación para la resolución completa y efectiva de la situación problema.

Como ya se mencionó, la propuesta obtuvo el primer premio en la Categoría "Intervenciones pedagógicas transversales" del concurso de ejercicios competencias emprendedoras en las ingenierías, en el marco del Programa regional de emprendedorismo e innovación en ingeniería [1], iniciativa auspiciada por el Banco Interamericano de Desarrollo (BID) y realizada por instituciones de Argentina, Brasil, Chile y Uruguay para promover y difundir la cultura emprendedora y de innovación en la formación de ingenieros.

A continuación se describen las distintas actividades o ejercicios diseñados para el logro de los objetivos de formación previstos, que conforman la propuesta desarrollada.

**A. Ejercicio 1. Presentación de la situación problema y búsqueda de datos**

1. Cuerpo del ejercicio: Analizar la documentación provista por el juzgado actuante que consta en el Anexo I. Extraer los elementos que considere relevantes a los fines del peritaje. Por ejemplo, dirección y sentidos posibles de marcha de los vehículos antes del accidente, las marcas de frenada, la relación entre ésta/s y la posición final del/de los vehículos.

2. Competencia/s emprendedora/s que el ejercicio promueve: La toma de decisiones al necesitar analizar información perteneciente a un ámbito desconocido representado por el léxico propio del ámbito legal. El aprendizaje continuo al asumir una actitud de búsqueda y organización de información para saber cómo se realiza un peritaje, cuáles son las reglas a las que debe atenderse desde el principio de su intervención, sus derechos y obligaciones como perito; esa información puede ser provista por la

cátedra de Legislación. Se pretende fomentar la comunicación vertical con profesores de otras asignaturas y promover también la comunicación horizontal en estudiantes. Exige desarrollar la capacidad de admitir diversidad de puntos de vista, argumentar el propio y consensuar respuestas respecto de cuáles son los datos importantes que provee el Anexo I. Es además muy probable que aparezca el liderazgo natural de una o más personas al interior de los grupos. El uso del lenguaje como instrumento de comunicación: escrita, para consensuar ideas, para el aprendizaje. El juicio crítico en el análisis de la información.

La actitud ética atraviesa todos y cada uno de los ejercicios aquí propuestos, considerada como una obligación por parte del perito.

### **B. Ejercicio 2. Discusión acerca de la posible mecánica del accidente**

1. Cuerpo del ejercicio: Describir la posible mecánica del accidente y conforme a ella la ubicación final de los vehículos involucrados.

2. Competencia/s emprendedora/s que el ejercicio promueve: El manejo de las formas, espacio, medidas en la reconstrucción mental del accidente (basado en el croquis) y la aplicación de la lógica del conocimiento racional. Introduce además la necesidad de escoger un modelo a utilizar para abordar el fenómeno físico. De esta manera se pondrá en juego nuevamente la capacidad de aceptar diversidad de respuestas, analizar objetivamente las ideas propias y las de los otros, valorándolas críticamente de forma continua, además en todo momento se requiere del trabajo en equipo y de la cooperación entre pares.

3. Consideraciones: Con este ejercicio se espera que surjan respuestas diversas tanto entre grupos como al interior de cada grupo en particular, esto pondrá en juego nuevamente la capacidad de explicitar los puntos de vista, de argumentar porqué una hipótesis de trabajo aparece como más probable que otra/s y la necesidad de consensuar.

Luego se sugerirá un análisis de las masas de los vehículos involucrados a fin de poder detectar posibles analogías con el tema choques, analizar si se puede aplicar conservación de cantidad de movimiento, trabajo y energía etc.

### **C. Ejercicio 3. Las condiciones iniciales**

1. Cuerpo del ejercicio: Establecer la velocidad de los vehículos protagonistas del accidente basándose en los datos provistos en el extracto de sumario.

2. Competencia/s emprendedora/s que el ejercicio promueve: Una vez comprendido el hecho y discutidas las posibles variables intervinientes, se debe decidir qué modelo se ha de utilizar en el marco elegido, el porqué de esa elección y sus limitaciones; para ello es necesario analizar aspectos positivos y negativos de las diferentes situaciones, poner en juego nuevamente las habilidades comunicacionales para debatir las ideas propias y la de los otros, y tomar decisiones para arribar a la solución del

problema.

3. Consideraciones: Una vez comprendido el hecho y discutidas las posibles variables intervinientes, se debe decidir qué modelo se ha de utilizar en el marco elegido, el porqué de esa elección y sus limitaciones, para ello es necesario analizar aspectos positivos y negativos de las diferentes situaciones, poner en juego nuevamente las habilidades comunicacionales para debatir las ideas propias y la de los otros, y tomar decisiones para arribar a la solución del problema.

### **D. Ejercicio 4. Exposición de las conclusiones del perito**

1. Cuerpo del ejercicio: Se solicita que:

a) Evalúe daños y desperfectos de los vehículos según constancias de autos, y en base a lo anterior estime el monto aproximado de reparación detallado en 2 categorías: repuestos y mano de obra.

b) Proceda a realizar un informe que refleje las secuencias fundamentales del estudio efectuado, los métodos y medios importantes empleados, una exposición razonada y coherente, las conclusiones, fecha y firma.

2. Competencia/s emprendedora/s que el ejercicio promueve: De manera similar al Ejercicio 1, el primer ítem del Ejercicio 4 promueve el análisis de las evidencias y la toma de decisiones para así concluir qué tipo de reparación o cambio de partes de los vehículos serán necesarias. Posteriormente se deberá obtener información bien fundada de los costos de reparación, la cual deberá ser expresada de forma clara y concisa. En segundo lugar, y dando respuesta a la solicitud de informe pericial, se busca la comunicación efectiva y clara (deberá ser entendible para las partes), siendo los fundamentos científicos, el elemento condicionante del trabajo pericial, pues le permite al juez saber cuál es la razón o circunstancia en que el perito se decidió por una conclusión, y cuáles son los elementos que le permitieron arribar a ella.

3. Consideraciones: En la primera parte del ejercicio se espera que los grupos decidan cómo organizarse para recabar la información relativa a los costos, comparen presupuestos, decidan cuál de ellos resulta más ventajoso y expliciten qué criterio se tomó para realizar esa decisión y si, por ejemplo tuvieron que realizar algún tipo de negociación. Habrá grupos que por sus conocimientos de informática podrán presentar hojas de cálculo. El apartado b) sugiere hacer un repaso de todos los ejercicios anteriores y de la parte a) del presente, y que se comunique de manera efectiva.

### **E. Ejercicio 5. Hacia la mejora continua**

1. Cuerpo del ejercicio: La autoridad competente le solicita que sugiera medidas tendientes a optimizar las futuras investigaciones de accidentes de tránsito. ¿Cuáles serían los puntos principales de su informe?

2. Competencia/s emprendedora/s que el ejercicio promueve: En esta instancia se promueve la iniciativa y el pensamiento creativo e innovador, ya que se pueden idear mejoras procedimentales de la toma, recolección y

expresión de datos en pos de una mejora continua.

3. Consideraciones: La intención de este problema es sugerir que todo el proceso anterior puede retroalimentarse.

#### IV. SÍNTESIS Y PERSPECTIVAS

Se espera que este tipo de intervenciones motive a los estudiantes por medio del acercamiento a la práctica profesional, dando sentido propio al estudio de la física dentro del plan de estudios, a la vez que resignifique los contenidos de las asignaturas transversales necesarias para resolver la situación problemática. A la vez se pretende desarrollar las habilidades y competencias que este ejercicio promueve haciendo profundo hincapié en el pensamiento crítico e innovador considerados sumamente necesarios en el desarrollo de la actividad profesional.

Se proyecta que este tipo de situaciones problemáticas formen parte de un conjunto de problemas reales de la asignatura física I, específico para cada especialidad de ingeniería, orientado a promover de igual forma las habilidades y competencias citadas anteriormente.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco de los proyectos: “Estrategias didácticas con integración de TIC para la enseñanza de la física en carreras de ingeniería” (UTN-25/MI01), “Desarrollo de estrategias con integración de nuevos recursos didácticos para la educación en física y capacitación docente para su uso y autogestión” (SECTEI-2010-111-11) y “Resolución de problemas de física vinculados a la práctica profesional de la ingeniería” (UTN-25/M064).

Se agradece al PRECITYE por la distinción recibida.

#### REFERENCIAS

- [1] PRECITYE, *Programa regional de emprendedorismo e innovación en ingeniería*, (2012) <http://ingemprendedores.org/concursos/?p=10>. Consultado el 31 de mayo de 2013.
- [2] Shön, D. A., *La formación de profesionales reflexivos*, (Paidós-MEC, Barcelona, 1992).
- [3] CONFEDI, *La formación del ingeniero para el desarrollo sostenible*. Aportes del CONFEDI. Congr. Mundial de Ingeniería. Buenos Aires, Octubre (2010). <http://www.confedi.org.ar/sites/files/privado/APORTES%20de%20CONFEDI%20en%20INGENIERIA%202010.pdf>. Consultado el 14 de septiembre de 2011.
- [4] Beane, J. A., *La integración del currículum*. (R. Filella, Trad.). (Ministerio de Educación y Ciencia - Ediciones Morata, España, 2005).
- [5] Ramírez Romero, J. L., *Reseña del Libro: Beane, James A. (2005). La integración del currículum*, (R. Filella, Trad.). (Ministerio de Educación y Ciencia - Ediciones Morata, España, 2005). (2007), <http://edrev.asu.edu/reviews/revs/161>. Consultado el 03 de junio de 2012.

*Intervenciones transversales basadas en situaciones problemas*  
[6] Ferreira Lorenzo, G., *Hacia la integración curricular en la educación superior: reflexiones, necesidades y propuesta para la disciplina integradora*. Revista Iberoamericana de Educación. Número 34/2, 10 de noviembre de 2004. <http://www.rioei.org/deloslectores/789Ferreira.PDF>. Consultado el 15 de mayo de 2013.

[7] Herrera, O., Lévano, M., Aldunate, R., *Integración vertical de competencias para la carrera de Ingeniería civil informática de la Universidad Católica de Temuco*, Jornadas Chilenas de Computación (JCC2011). Curicó, 7 al 11 de Noviembre de 2011, [http://jcc2011.utralca.cl/actas/CCESC/jcc2011\\_submission\\_104.pdf](http://jcc2011.utralca.cl/actas/CCESC/jcc2011_submission_104.pdf), consultado el 08 de junio de 2012.

[8] Echazarreta, D. R. y Haudemand, R. E., *Resolución de Problemas Integradores en la Enseñanza de la Física para Estudiantes de Ingeniería Civil*, Formación Universitaria 2, 31-38 (2009). [http://biblioteca.universia.net/html\\_bura/ficha/params/id/53579404.html](http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/id/53579404.html), consultado el 12 de noviembre de 2012.

[9] Freeman, C. H., *Uso de casos estudio para la enseñanza de la ciencia*, Mayo (2005), <http://www.actionbioscience.org/esp/educacion/herreid.htm#primer>. Consultado el 11 de septiembre de 2012.

#### ANEXO I

##### EXTRACTO DEL EXPEDIENTE

ACTA DE INSPECCION OCULAR realizada por la preventora a fs 5, del Sumario Correccional correspondiente, donde se puede leer: “... se observa sobre la calle Pte. Quintana sobre la vereda Norte, a la altura catastral del 1715 un vehículo marca PEUGEOT 207, con su frente orientado hacia el punto cardinal Nor-Este con su frente abollado producto del impacto con un árbol con su rueda delantera del lado izquierdo del vehículo sobre la vereda, en la carpeta asfáltica se puede observar huellas de derrape del automóvil PEUGEOT 207, de unos 15,80 metros, y sobre la calle Italia el automóvil marca FIAT PALIO con su frente orientado hacia el punto cardinal Norte con su frente abollado...”

CROQUIS DEMOSTRATIVO LINEAL realizado por la preventora obrante a fs 6, del Sumario Correccional correspondiente, donde se puede apreciar la ubicación de los vehículos intervinientes.

**PERICIAL SOLICITADO POR LA ACTORA (Fs 4v)**  
FORMULARIO DE EXAMEN MECÁNICO DE VEHÍCULO correspondiente al automóvil FIAT PALIO, Dominio ABC 123, obrante a fs 16, del Sumario Correccional N° 1427/13, tramitado ante el Juzgado en lo Correccional de la 4° Nominación de la ciudad de Rosario, donde se puede leer “OBSERVACIONES: Paragolpe delantero deformado y hundido, capot abollado adelante, faros delanteros derechos rotos, patente delantera deformada y suelta”.

Meoli, Jorgelina Julia et al.

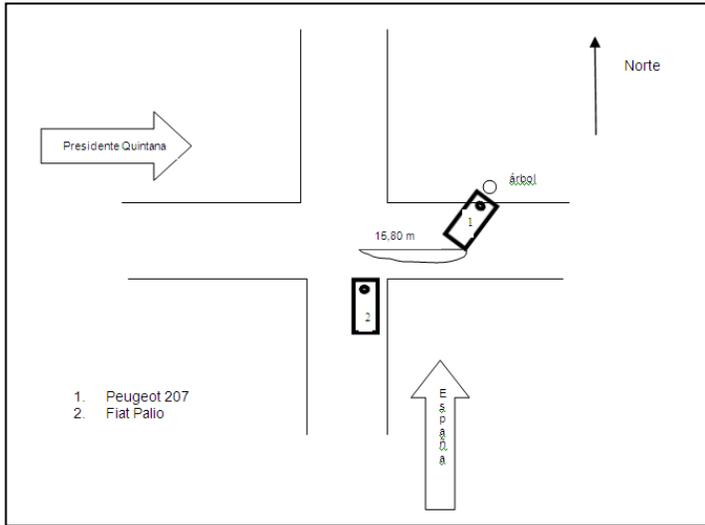
### EXTRACTO DEL EXPEDIENTE

FORMULARIO DE EXAMEN MECÁNICO DE VEHÍCULO correspondiente al automóvil PEUGEOT 207, Dominio DEF 567, obrante a fs 23, del Sumario Correccional 1427/13, tramitado ante el Juzgado en lo Correccional de la 4º Nominación de la ciudad de Rosario, donde se puede leer “OBSERVACIONES: Impacto lateral izquierdo. Puerta lado izquierdo abollada, raspada y

desalineada. Techo lado izquierdo abollado. Impacto frontal. Paragolpe delantero abollado y semidesprendido, Capot abollado y desalineado. Ambos guardabarras delanteros abollados y desalineados. Parabrisas estallado”.

### EXTRACTO DEL EXPEDIENTE

Que en la foto obrante se pueden apreciar los daños sufridos por el rodado de la Actora en su lateral izquierdo.





# Perfil sócio-educacional de estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA): um estudo de realidades e interesses acerca do conceito Energia

**André Taschetto Gomes, Isabel Krey Garcia**

*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Av. Roraima, nº1000, Prédio 13. Santa Maria – RS, Brasil. CEP: 97105-900. Tel: 55-3220-8865.*

**E-mail:** atg.andre@gmail.com

(Received 31 January 2014, accepted 26 August 2014)

## Resumo

Neste trabalho são apresentados os resultados da parte inicial de uma pesquisa de mestrado em Educação em Ciências, intitulada “Abordagem interdisciplinar a partir da Temática Energia: contribuições para uma aprendizagem significativa na EJA”. O primeiro instrumento de investigação traçou um perfil sócio-educacional dos alunos da EJA de uma escola estadual de Santa Maria – RS para a realização de uma intervenção didática adequada a este público. Além disso, foram investigados os interesses destes estudantes acerca do conceito Energia, tema estruturante no ensino de Ciências (Biologia, Física e Química). As categorias Corpo humano e Sustentabilidade apresentaram a maior relevância. Em relação à motivação, foi questionado qual disciplina os estudantes mais gostam e se interessam. A disciplina de Física é a que apresenta menor porcentagem de interesse. Os dados deste estudo foram utilizados na construção de um módulo didático, com os temas de maior relevância para os estudantes, no qual o professor tem uma atitude interdisciplinar, utilizando as colaborações das diversas áreas do conhecimento para melhor compreensão do conceito.

**Palavras-Chave:** Conceito Energia, Educação de Jovens e Adultos, Investigação de Interesses, Perfil Sócio-educacional.

## Abstract

This paper presents the results of the initial part of a research of master's degree in Science Education, entitled "Interdisciplinary approach from the Energy Theme: contributions to a meaningful learning in adult education." The first instrument of investigation traced a profile socio-educational of students a state school in Santa Maria - RS to perform a didactic intervention appropriate to this audience. Furthermore, we investigated the interests of students about the concept Energy, structuring theme in science teaching (Biology, Physics and Chemistry). The Human Body and Sustainability categories showed the greatest relevance. About the motivation, was asked who discipline the students more like and feel interested. The discipline of physics is has the lowest percentage of interest. Data from this study were used in the construction of a teaching module, with the most relevant topics for students in which the teacher has an attitude interdisciplinary, using the various branches of knowledge to better teaching the concept.

**Keywords:** Concept Energy, Youth and Adults, Research Interests, Socio-educational Profile.

**PACS:** 01.40.-d, 01.40.E-, 01.40.G-

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUÇÃO

### A. Caracterização da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e escolha do Conceito Energia

A modalidade de Ensino conhecida como EJA (Educação de Jovens e Adultos) foi inicialmente planejada para as pessoas que não conseguiram, em idade regular, frequentar a escola e concluir seus estudos. Ela é um importante meio de socialização e aquisição de cultura científica tornando os estudantes pessoas mais críticas e atuantes na sociedade, podendo, a partir da interpretação de informações, construir juízos mais conscientes sobre a importância da Ciência. O trabalho com o tema Energia a partir de uma

atitude interdisciplinar foi escolhido para atender a este objetivo.

A determinação do conceito Energia, como norteador das práticas educativas parte do princípio que este conceito/tema é bastante abordado nas mídias e no dia-a-dia dos estudantes. Além disso, ele é central nas disciplinas das ciências naturais, podendo ser trabalhado em Biologia, Física e Química. A flexibilidade curricular facilita o desenvolvimento de atividades didáticas diferenciadas na EJA. Silva[1] considera: “A EJA apresenta um currículo maleável e flexível, adequando-se a que se destina. Considerando sua importância específica, o desenvolvimento do trabalho pedagógico a partir das histórias de vida, dos interesses e dos saberes que os alunos trazem para a sala de aula, a reflexão sobre a questão dos <http://www.lajpe.org>

*conteúdos a serem trabalhados assume uma dimensão que lhe é específica.”*

Como professor de uma escola pública, acredito que o trabalho na EJA e, especificamente, com o Ensino de Ciências necessita constantes reflexões sobre os conteúdos e formas de serem trabalhados. Ciavatta [2] salienta: *“a elaboração de uma proposta curricular não pode ser definida independentemente dos sujeitos envolvidos no processo, nem da dimensão histórica e política em que é elaborada.”* O professor-pesquisador, imerso em reflexões teóricas embasadas em práticas diárias com os alunos, deve conhecer seus estudantes e suas realidades. Assim, optamos pela utilização de um instrumento de pesquisa em sala de aula que permitisse investigar os interesses dos estudantes, pois considerando o contexto e realidade das turmas, é possível favorecer a motivação e escolher estratégias adequadas para a aprendizagem.

Este trabalho faz parte de uma pesquisa mais ampla intitulada *“Abordagem Interdisciplinar a partir da temática Energia: contribuições para uma aprendizagem significativa na EJA”* na qual temos como objetivo inicial determinar questões de interesse sobre o conceito Energia e também uma caracterização mais fiel da realidade dos alunos que participarão das atividades. Posteriormente, estas informações foram utilizadas na construção e implementação de atividades aliando diferentes estratégias didáticas com o intuito de facilitar a aprendizagem dos estudantes e a sua evolução conceitual. Este trabalho já foi concluído e terá seus resultados publicados posteriormente.

No contexto deste trabalho, na qual o professor-pesquisador é regente de classes da educação de adultos, deve-se considerar que os estudantes da EJA não buscam apenas o conhecimento para participar de processos seletivos como vestibulares e concursos públicos; mas, além disso, desejam informações e subsídios que possibilitem uma compreensão de sua realidade e uma interação com ela, de modo a solucionar questões práticas e também uma preparação básica para o mercado de trabalho.

Consideramos então que a EJA não se restringe apenas a alfabetização, mas sim a uma Educação Científica. Este é um dos princípios que norteiam nossa prática em sala de aula, pois acreditamos que é a partir das experiências nas disciplinas de Ciências que os estudantes terão a possibilidade de tornarem-se pessoas mais críticas e conscientes das questões que envolvem sua cidadania. Conforme Cachapuz [3]: *“A educação científica apresenta-se como parte de uma educação geral para todos [...] trata de ajudar a grande maioria da população a tomar consciência das complexas relações entre a ciência e a sociedade, de modo a permitir-lhes participar da tomada de decisões.”* O espaço da EJA é propício para que ocorra um despertar de consciência em suas ações no dia-a-dia e para uma atuação mais crítica em nossa sociedade, seja nos processos eleitorais, na compreensão crítica de notícias e na busca de melhores oportunidades de trabalho. Chassot [4] também esclarece *“A nossa responsabilidade maior no ensinar Ciências é procurar que nossos alunos e alunas transformem, com o ensino que fazemos, em homens e mulheres mais críticos. [...] que os estudantes possam*

*tornar-se agentes de transformação – para melhor – do mundo em que vivemos.”* Essa mudança de atitudes e pensamentos deve ser incentivada e propiciada pelos professores ao estimularem seus alunos a pensar e o fazer, não apenas reproduzindo mecanicamente informações em um ensino tradicional que não considera as possibilidades favorecidas por uma Educação Científica efetiva.

## **B. A investigação de interesses**

A investigação de interesses e temáticas na EJA é uma importante aliada e que pode trazer maior significado aos alunos sobre o que é estudado em aula, quando se consideram as necessidades deste público. Pressupõe-se que esse contexto é distinto em cada escola, pois os estudantes da EJA são bastante heterogêneos. No entanto, a partir desta determinação do perfil sócio educacional podemos obter dados que caracterizam os estudantes dessa modalidade, mostrando suas peculiaridades e interesses. Como adverte Borges [5] é necessário pensar no contexto do público que frequenta esta modalidade de ensino, suas necessidades e perspectivas: *“Quando a escola nega a identidade do sujeito da EJA, ela nega a possibilidade de uma articulação entre experiência e prática. O aluno, jovem ou adulto, possui uma experiência ainda maior que a criança, tem uma vivência ímpar que deve ser levada para a sala de aula.”*

Conhecer a realidade dos alunos da EJA e traçar alternativas para facilitar a aprendizagem, tornando-a mais significativa, são os principais enfoques desta pesquisa. Pensar nessa modalidade como parte integrante da rede pública de ensino é fundamental para a construção de metodologias adequadas a esta realidade e não repetir estratégias ineficientes com estes alunos adaptadas do ensino regular. Delizoicov [6] esclarece: *“O desafio de por o saber científico ao alcance do público escolar em escala sem precedentes [...] não pode ser enfrentado com as mesmas práticas docentes de décadas anteriores [...] Hoje é imperativo ter como pressuposto a meta de uma ciência para todos.”* Neste sentido é a partir das experiências nas disciplinas das Ciências naturais que os alunos desenvolverão e poderão adquirir conhecimentos científicos e tecnológicos que proporcionem uma maior compreensão de sua realidade.

A compreensão da realidade é a primeira de inúmeras ações que podemos realizar antes de sugerir mudanças na escola a partir de investigações acadêmicas e teóricas. Como já foi dito, a investigação tem com o intuito de analisar primeiramente os interesses dos estudantes, de modo a considerá-los na construção e desenvolvimento de uma intervenção didática adequada a este público. Como aponta Vilanova e Martins [7] ainda são muito reduzidos os trabalhos na área de Ciências, relacionados com a EJA, preocupados em determinar as especificidades que o trabalho nesta modalidade exige: *“poucos esforços vêm sendo feitos no sentido de explicitar ou discutir seus contornos e especificidades neste campo pedagógico. Por sua vez, trabalhos desenvolvidos junto a estudantes jovens e adultos são praticamente inexistentes na literatura do campo da Educação em Ciências (EC)”*. Assim este trabalho tem como objetivo contribuir com alguns delineamentos em relação à

investigação de interesses e determinação de um perfil sócio-educacional com estudantes da EJA. Este tipo de investigação é muito importante para uma adequada e significativa prática na modalidade.

## II. METODOLOGIA

Para a investigação de interesses relatada neste estudo foi construído um Instrumento de Investigação com questões abertas e fechadas com a finalidade de traçar um perfil sócio-educacional (gênero, idade, estado civil, profissão, renda, número de filhos, acesso a internet, hábitos de leitura, disciplinas mais interessantes, estratégias didáticas de interesse) e também determinar as categorias relacionadas ao Conceito Energia que despertam maior interesse nos alunos. O total de estudantes que responderam as perguntas foi de 46 alunos matriculados regularmente em uma das etapas do ensino médio, modalidade EJA turno noturno, em uma escola estadual da cidade de Santa Maria-RS, Brasil, no segundo semestre de 2012.

Antes de solicitar que os alunos respondessem ao questionário, foi feita a leitura do seu cabeçalho explicativo que continha os objetivos da pesquisa, a importância em respondê-lo e esclarecia sobre o uso dos dados na pesquisa. Como os alunos investigados eram turmas das quais o professor pesquisador era titular, estes esclarecimentos foram importantes para demonstrar seu interesse em conhecer estes alunos, suas realidades, salientando que suas opiniões e necessidades são consideradas no desenvolvimento das atividades em sala de aula no ano letivo. No Apêndice “A” encontra-se o referido questionário de investigação.

## III. RESULTADOS

### A. Determinação de Perfil Sócio-Educacional

A primeira parte do questionário denominada “Perfil Sócio-Educacional” continha questões com o objetivo de verificar a realidade dos alunos das turmas investigadas. As primeiras perguntas versaram sobre aspectos sociais e caracterização destes estudantes através de informações como: faixa etária, renda familiar, gênero, estado civil, acesso a internet, hábitos de leitura, profissão, etc. As questões também abordaram motivos de seu interesse em retornar a escola após interromperem os estudos, objetivos futuros com uma melhor qualificação pessoal, o tipo de atividade (metodologias) em sala de aula que consideram mais motivadoras e que julgam facilitar sua aprendizagem, entre outros aspectos pesquisados.

No Brasil as turmas de ensino médio na modalidade EJA são divididas em 3 totalidades: etapa 7 (1º semestre), etapa 8 (2º semestre) e etapa 9 (3º semestre). Para integralizar o curso de nível médio na EJA, o aluno tem um prazo 50 % menor que o ensino médio regular, concluindo seus estudos em um ano e meio. Da amostra de 46 alunos que respondeu ao questionário, a divisão por totalidades ficou representada na forma apresentada na Figura 1. Pode-se observar que, os

alunos que responderam a esta pesquisa, estão distribuídos de forma equilibrada: 14 alunos (30%) da etapa 7 (T7), que corresponde ao primeiro semestre; 14 alunos na etapa 8 (T8) e 18 alunos (40%) na etapa 9 (T9).

Em relação ao gênero dos alunos (Figura 2) que responderam ao questionário, notamos que existe predominância do sexo feminino.

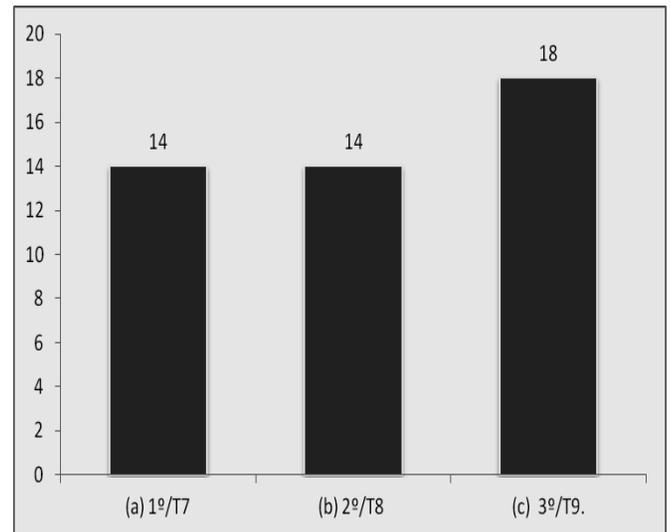


FIGURA 1. Distribuição dos estudantes nas Etapas da EJA.

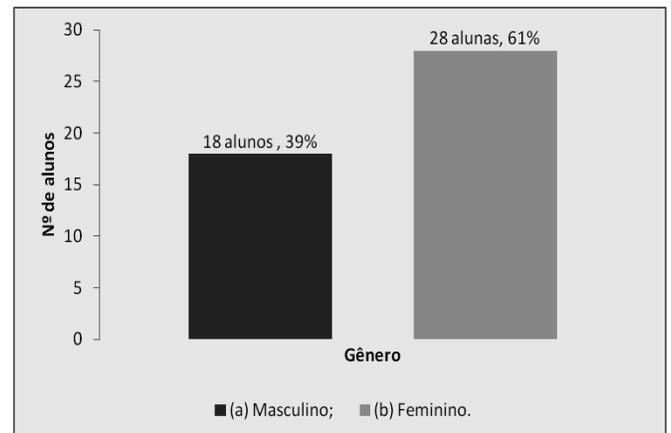


FIGURA 2. Gêneros dos estudantes pesquisados.

A figura 3 apresenta a faixa etária dos alunos pesquisados e podemos observar que a maioria dos estudantes está na faixa etária jovem, de 18 a 25 anos, e que não há nenhum aluno com idade acima de 60 anos. Desta forma há uma tendência de diminuição de alunos com o avanço da idade na modalidade EJA para o público alvo desta pesquisa. Poderíamos citar os fatores que justificariam esses resultados como a maior facilidade dos educandos jovens retornarem aos estudos, já que faz pouco tempo que abandonaram o ensino médio regular. Talvez a população mais adulta apresenta maiores dificuldades em retornar aos estudos em virtude de suas atividades domésticas e de trabalho tomarem muito de seu tempo.

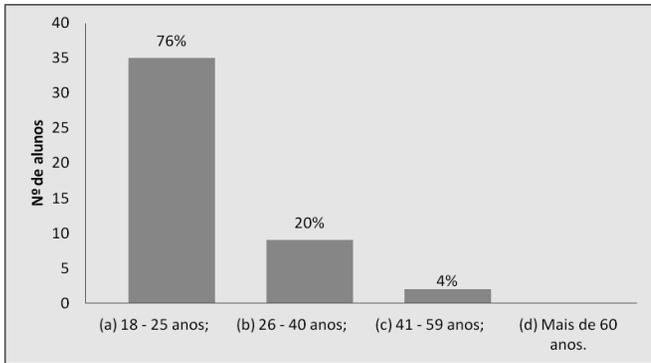


FIGURA 3. Faixa etária dos jovens e adultos.

Quanto ao estado civil (Figura 4), observamos um predomínio de pessoas solteiras e que a maioria de solteiros está na faixa etária que é, predominantemente, jovem de 18 a 25 anos.

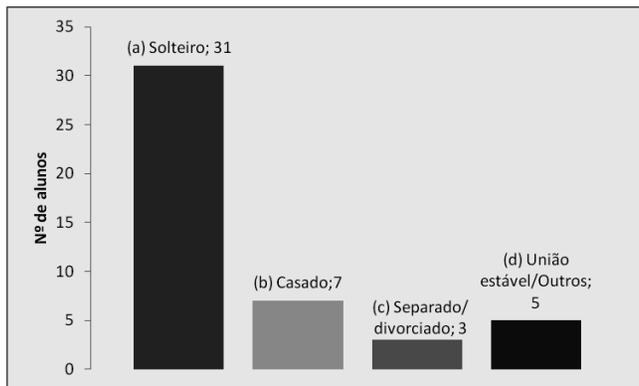


FIGURA 4. Estado Civil dos estudantes pesquisados.

Dos 46 alunos, 19 realizaram transferência do ensino regular para a EJA, ou seja, não interromperam os estudos (Figura 5). Já 27 alunos afirmam ter pausado os estudos durante um período que variou da seguinte forma: (a) até 1 ano – 7 alunos (26%); (b) a partir de 1 ano até 3 anos – 6 alunos (26%); (c) De 3 a 10 anos – 7 alunos (26%) e (d) Mais de 10 anos – 7 alunos (26%).

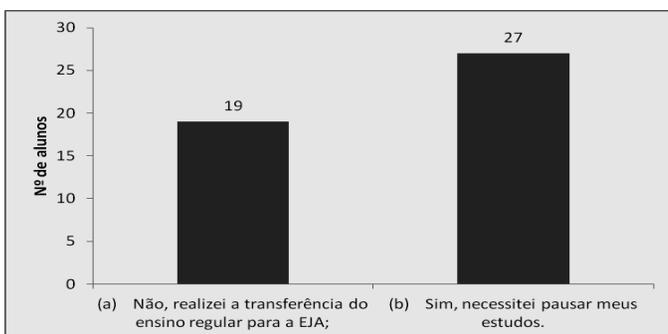


FIGURA 5. Interrupção nos estudos.

Para um melhor entendimento da realidade familiar dos estudantes, estes foram questionados sobre o número de filhos. Sabe-se que inúmeros são os fatores que influenciam no abandono escolar entre eles destaca-se a necessidade de trabalhar precocemente, o início de uma família e as

responsabilidades em cuidar de um filho, por exemplo. Nesta questão, os resultados, conforme a Figura 6 e 7, demonstraram que estes estudantes, em sua maioria ainda não tiveram filhos o que facilitou retornar aos estudos na EJA. Em relação aos demais questionados, se percebe que já constituíram família e os filhos adultos não necessitam mais de cuidados intensivos, o que possibilitou seu retorno à escola.

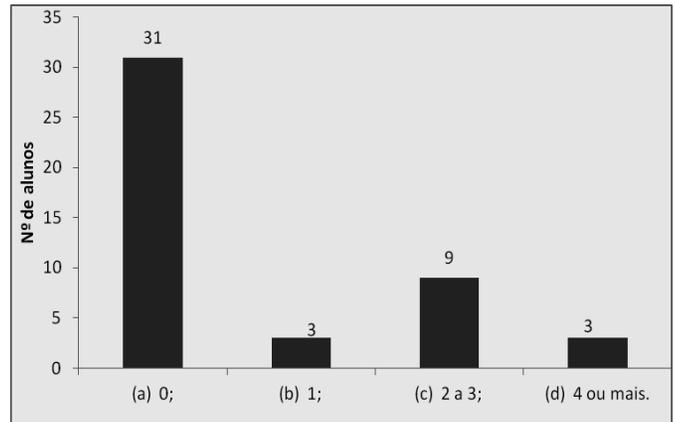


FIGURA 6. Quantidade de Filhos.

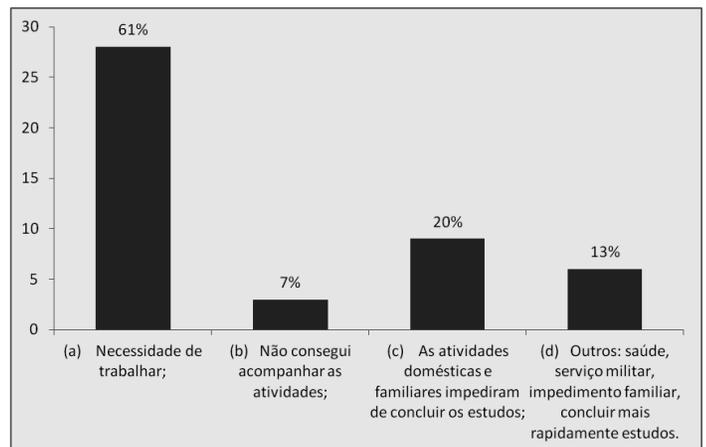


FIGURA 7. Motivos da evasão do Ensino Médio Regular.

Neste questionário, 3 questões se referiram a renda e emprego estudantes (Questões 8, 9 e 10). Da amostra pesquisada, 14 alunos (30%) não estão trabalhando e 32 alunos (70%) possuem algum trabalho fixo. Destes que possuem emprego, 75% (24 alunos) trabalham em dois turnos (manhã e tarde) e 25% (8 alunos) apenas em um turno. As profissões dos 32 alunos que afirmaram trabalhar foram organizadas na tabela 1. As categorias com mais alunos são comércio (28%), atividades domésticas/babá (22%) e área administrativa (13%).

Quanto à renda familiar, a maioria das famílias (59% - 27 alunos) apresenta uma renda de até 2 salários mínimos nacionais (R\$1.240,00, conforme Fig.8).

Em relação ao retorno a escola, uma das questões era sobre de onde partiu essa motivação. Os dados mostraram que 70% (32 alunos) tiveram iniciativa própria, admitindo a importância de concluir o nível médio. Outros 26% (12

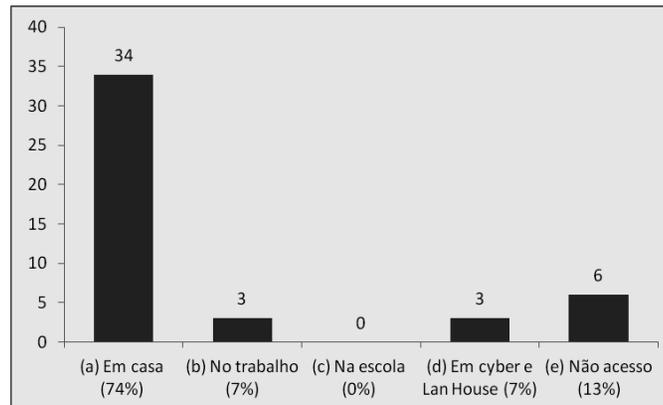
alunos) e 4% (2) receberam incentivo para retornar a escola de familiares e amigos, respectivamente.

*Perfil sócio-educacional de estudantes da EJA: um estudo de realidades e interesses acerca do conceito Energia*

jornais; **Cat.5** - 8 alunos marcaram textos de divulgação científica e **Cat.6** - 12 alunos marcaram todos os itens da categoria 2 e mais revistas jornalísticas e livros de literatura.

**TABELA I.** Profissões dos estudantes.

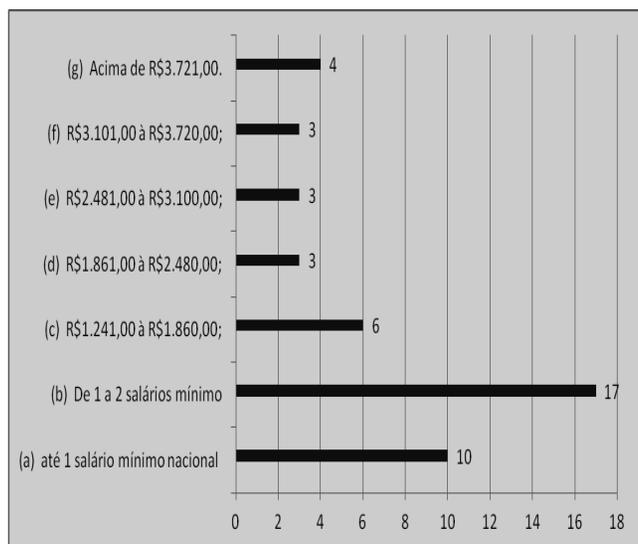
Profissão	Nº alunos	%
Cat.1 - Comércio (vendedor, operador de caixa, repositor, etc)	9	28%
Cat.2 - Administrativo (secretariado, estagiário, etc)	4	13%
Cat.3 - Construção Civil	3	9%
Cat.4 - Forças Armadas	3	9%
Cat.5 - Auxiliar de limpeza	3	9%
Cat.6 - Entregador	1	3%
Cat.7 Transportes	1	3%
Cat.8 Atividades Domésticas / Babá	7	22%
Cat.9 Não informado	1	3%



**FIGURA 9.** Meios de acesso à internet.

**TABELA II.** Variedades de Leituras.

Tipo de leitura	Marcações	%
(a) Jornais;	35	76%
(b) Revistas Jornalísticas (Veja, Isto é, Época, etc);	13	28%
(c) Revistas de Divulgação Científica/Curiosidades (Super Interessante, Galileu, Mundo Estranho, etc);	8	17%
(d) Revistas de Lazer/Celebridades (Tititi, Minha Novela, Caras, etc);	14	30%
(e) Revistas em Quadrinhos/Gibi;	10	22%
(f) Textos da Internet;	12	26%
(g) Livros de Auto-ajuda/Religiosos;	21	46%
(h) Livros didáticos;	3	7%
(i) Livros de literatura;	10	22%
(j) Não costumo ler materiais além daqueles da escola;	3	7%
(k) Outras fontes de leitura. Quais?	2	4%



**FIGURA 8.** Faixas de Salário dos estudantes.

Quanto ao acesso a internet, podemos observar (Figura 9) que grande parte dos alunos possui em sua casa computador conectado à rede (34 alunos) e afirmam ter conhecimentos para manipulá-lo. Nenhum aluno acessa a internet no laboratório de informática na escola com frequência, isto demonstra que as atividades desenvolvidas não utilizam frequentemente essa tecnologia como recurso metodológico.

Com o objetivo de verificar o hábito de leitura destes alunos foi perguntado quais as principais fontes de leitura, caso eles a pratiquem frequentemente. Os resultados (Tabela II) mostraram que a leitura predominante é com o objetivo de lazer, notícias e auto-ajuda/religiosos.

A segunda análise nesta questão foi sobre quantas e quais fontes de leitura cada aluno possuía. Os resultados mostraram que: **Cat.1** - 3 alunos não possuem nenhum hábito de leitura; **Cat.2** - 17 alunos leem apenas jornais, textos na internet, gibi e revistas de lazer; **Cat.3** - 2 alunos selecionaram em seus questionários leitura de textos religiosos/auto-ajuda; **Cat.4** - 4 alunos marcaram somente

A questão 15 foi elaborada para identificar o objetivo do retorno à escola e as perspectivas futuras em relação ao término dos estudos. Os pesquisados puderam selecionar mais de uma alternativa. Os dados apontam que existe um grande interesse em ter uma estabilidade profissional através de um emprego público (54% dos pesquisados). Também associada a melhores oportunidades de trabalho, 23 alunos (50%) afirmaram que gostariam de concluir o ensino médio com o objetivo de melhorar seu currículo profissional e facilitar a busca por uma oportunidade de emprego mais satisfatória. Uma parcela significativa (19 alunos – 40%) também pretende cursar faculdade. Isto pode estar associado à idade do público alvo dessa pesquisa que, em sua maioria, ainda se encontra em fase de decidir seu futuro profissional. Na categoria outros motivos, um aluno afirmou ter a pretensão de iniciar um curso técnico pós-médio.

Já em relação as razões de estudar à noite, 33 alunos (77%) afirmam ser em virtude de trabalhar durante o dia, 7

alunos (15%) estudam a noite porque a escola só disponibiliza as aulas da EJA neste turno, 5 alunos (11%) afirmaram que as atividades domésticas impedem os estudos durante o dia e 1 aluno (2%) deseja concluir mais rapidamente seus estudos.

## B. Investigação de interesses

Com o objetivo de investigar o grau de interesse pelos conteúdos das ciências naturais, a questão 17 perguntou qual(is) disciplina(s) os alunos mais gostam e se sentem interessados. Os resultados foram organizados em 4 categorias (Figura 10) conforme a divisão da Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Sul (Seduc – RS). Nesta análise, não se notam grandes diferenças nos interesses dos alunos, parece existir uma igualdade entre as áreas do conhecimento. Isso ocorreu pois existe uma diferença nas quantidades de disciplinas em cada área e também porque os alunos tiveram a liberdade de colocar múltiplos interesses, podendo elencar mais de uma disciplina que gostassem. O que se percebe é um pequeno interesse na área de matemática em relação às demais.

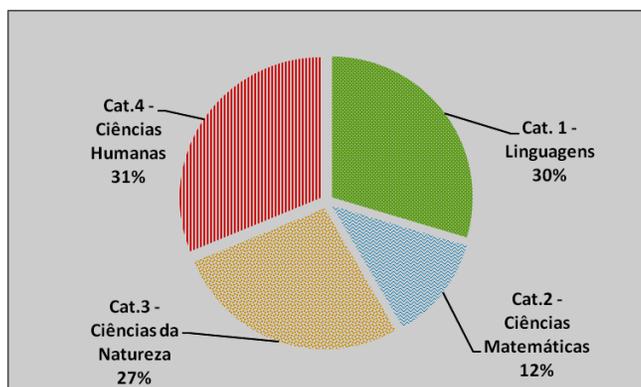


FIGURA 10. Divisão de interesses nas áreas do conhecimento.

Na figura 11, que mostra os interesses por disciplinas notamos que os alunos apresentam um grande interesse pelas disciplinas de História, Biologia, Matemática, Português e Química. Dentro do campo das ciências naturais, a disciplina de Física é a que apresenta menor porcentagem de interesse. Importante fator é que o interesse pela disciplina de educação física é o menor com apenas 1 aluno, em virtude que a maioria dos alunos trabalha e vem para escola com certo grau de cansaço. O grau de menor interesse é seguido por Ensino Religioso, Física e Sociologia.

Com a finalidade de saber a motivação destes alunos com as aulas de Ciências (Biologia, Física e Química), a questão 18 versou sobre sua satisfação deles em relação às estas disciplinas. Solicitamos que justificassem suas escolhas. Dos 46 alunos da pesquisa, 40 (87%) afirmaram estar satisfeitos e suas justificativas foram organizadas em categorias: **Cat.1** – Interesse pela área (17 alunos -37%); **Cat.2** – Conhecimento para o cotidiano (2 alunos – 4%); **Cat.3** – Professor interessado em ensinar (6 alunos – 13%); **Cat.4** – Conteúdos

resumidos (1 aluno – 2%) e **Cat.5** – Sem justificativa (14 alunos – 30%). Podemos concluir que os alunos estão satisfeitos com as aulas de ciências, mas o motivo disso não é em si pela qualidade da aula, mas por um interesse próprio como apontou os resultados expressivos na categoria 1. Somente 6 alunos incluíram sua justificativa na categoria 2, na qual afirmaram que seu motivo de satisfação é um professor que organiza uma boa aula. Os 6 alunos (13%) que afirmaram estar insatisfeitos com as aulas justificando da seguinte forma: 4 alunos (9%) falta de qualidade/preparo do professor; 1 aluno (2%) falta de interesse pelas disciplinas das ciências naturais e 1 aluno (2%) não apresentou justificativa.

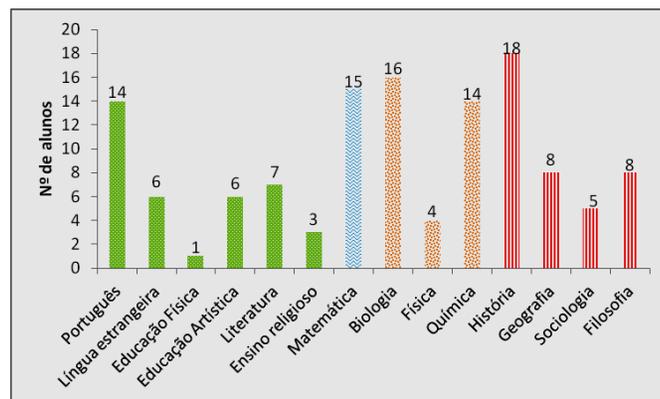


FIGURA 11. Grau de interesse por disciplinas.

Concluindo a primeira parte do questionário foram abordadas questões sobre as metodologias utilizadas em sala de aula. A questão 19 “Em quais atividades você se sente mais motivado e/ou que mais facilitam sua aprendizagem?” teve como objetivo investigar os recursos que mais interessam os alunos e que facilitam sua aprendizagem. Foi utilizada uma escala de relevância de uso com os seguintes indicadores para serem colocados em cada opção metodológica: (1) Pouco Interesse; (2) Médio interesse; (3) Interesse e (4) Grande interesse.

A tabela 3 organiza as quantidades de indicações de relevância em cada uma das atividades. Nela podemos observar que as atividades de **maior interesse** (Resposta Positiva itens marcados 3 e 4, interesse e Grande interesse, respectivamente) são Atividades no laboratório de informática (52%), Aulas dialogadas (46%), Experimentos (46%) e apresentação de trabalhos (39%). O **menor interesse** (Resposta Negativa, itens 1 e 2, pouco e médio interesse) está nas atividades com retroprojeto e jogos didáticos. Para organizar os dados, os graus de utilização foram organizados da seguinte forma: Resposta negativa (-) refere-se à porcentagem de alunos que admitiu ter pouco ou médio interesse em determinada atividade (somatório das % dos itens 1 e 2); Resposta Positiva (+) refere-se a porcentagem de alunos que tem interesse maior pela atividade didática (somatório das % dos itens 3 e 4).

TABELA III. Relevância de utilização das estratégias didáticas.

Atividade	Menor Interesse	Maior Interesse
<b>A - Quadro e giz</b>	<b>46%</b>	<b>54%</b>
<b>B – Retroprojektor</b>	<b>63%</b>	37%
<b>C – Slides</b>	<b>54%</b>	46%
<b>D - Livro Didático</b>	<b>54%</b>	46%
<b>E - Folhas xerocadas</b>	30%	<b>70%</b>
<b>F – Experimentos</b>	37%	<b>63%</b>
<b>G – Vídeos</b>	24%	<b>76%</b>
<b>H - Laboratório de Informática</b>	9%	<b>91%</b>
<b>I - Aulas Dialogadas</b>	37%	<b>63%</b>
<b>J - Jogos didáticos</b>	<b>59%</b>	41%
<b>K -Apresentação Trabalhos</b>	<b>48%</b>	<b>52%</b>

### C. Categorias de maior relevância em relação ao Conceito Energia

Concluída a primeira parte do questionário, foi solicitado que os alunos respondessem sobre seus interesses em relação ao Tema Energia na última parte das questões. Primeiramente, foi feita a explicação das instruções para responder esta parte do questionário. Foram criadas 4 categorias para organizar as diferentes questões foco que foram escolhidas para trabalhar com o tema. Os alunos deviam seguir a escala de classificação das questões, indicando qual o seu interesse de estudo em cada categoria, utilizando os números de 1 a 4 (1- Nenhum interesse; 2- Pouco interesse; 3-Médio Interesse; 4- Grande interesse), escrevendo-os dentro dos parênteses que estavam na frente de cada categoria. Na parte das categorias, eles poderiam utilizar apenas uma vez cada um dos números, classificando todas as categorias conforme seu interesse para determinar as prioridades. Já nas questões problema, de cada categoria, deveriam marcar com um “x” o seu interesse, ao lado da questão.

As categorias prévias organizavam o tema energia através diferentes questões que posteriormente serviram para a produção de um módulo didático, de acordo com o interesse dos alunos.

TABELA IV. Categorias de Energia.

CATEGORIAS	[1]		[2]		% -	[3]		[4]		% +
<i>Categoria 1: Corpo Humano</i>	8	18%	4	9%	27%	6	13%	27	<b>60%</b>	<b>73%</b>
<i>Categoria 2: Sustentabilidade</i>	6	13%	11	24%	38%	22	<b>49%</b>	6	13%	<b>62%</b>
<i>Categoria 3: Meio ambiente</i>	3	7%	18	40%	47%	18	40%	6	13%	53%
<i>Categoria 4: Combustíveis/Armamentos</i>	27	<b>60%</b>	10	22%	<b>82%</b>	2	4%	6	13%	18%

A categoria nº 4 Combustíveis e Armamentos apresentou o menor índice de interesse, com rejeição de 82%. As categorias 1 e 2, Corpo humano e sustentabilidade, respectivamente, apresentaram o maior interesse pelos alunos.

Para o desenvolvimento do módulo didático foram selecionadas as categorias números 1 e 2, por apresentarem o maior nível de interesse pelos alunos pesquisados, conforme tabela VI. A EJA, como modalidade com um currículo bastante flexível e maleável aos contextos locais, não apresenta rígidos padrões a serem seguidos como, por exemplo, obedecer programas de vestibular e respectivas ementas de conteúdos.

- Na *Categoria número 1 – Corpo Humano*, as questões propostas se relacionam de alguma maneira com o organismo e suas múltiplas interações. Os itens (d) e (e), por apresentarem menor grau de interesse não fizeram parte do módulo didático desenvolvido. Foram selecionadas duas questões da categoria 1, correspondentes ao item (c) “Sol: qual a sua influência em nossa vida/saúde” e item (a) “Bebidas energéticas e estimulantes: qual a sua influência no corpo humano?”.

- Na *Categoria 2 – Sustentabilidade*, foram selecionadas as questões (a) “Em meu dia-a-dia, eu posso ter atitudes para manter os recursos do planeta?” e (c) “Podemos utilizar a água como fonte de energia?”

TABELA V. Questões relacionadas à Energia Categorias 1 e 2.

CATEGORIA	% -	% +
<b><i>Categoria 1: Corpo Humano</i></b>		
(a) Bebidas energéticas e estimulantes: Qual a sua influência no corpo humano?	33%	<b>67%</b>
(b) Como os alimentos geram energia em nosso corpo?	33%	<b>67%</b>
(c) Sol: qual a sua influência em nossa vida/saúde?	30%	<b>70%</b>
(d) Como os anabolizantes e suplementos influenciam no desempenho dos atletas?	47%	53%
(e) Qual a relação do clima com as sensações de calor e frio?	42%	58%
<b><i>Categoria 2: Sustentabilidade</i></b>		
(a) Em meu dia-a-dia, eu posso ter atitudes para manter os recursos do planeta?	28%	72%
(b) Sol gera energia?	29%	71%
(c) Podemos utilizar a água como fonte de energia?	21%	79%
(d) Como cata-ventos gigantes podem gerar energia a partir dos ventos?	29%	71%

### VI. CONCLUSÕES

A partir desta pesquisa, foi possível determinar as questões de maior interesse de resolução pelos estudantes da EJA relacionadas com o tema Energia. Além disso, foi possível traçar um perfil sócio-educacional destes estudantes que nos permitiu conhecer a realidade contextual do público alvo

desta modalidade de ensino. Em virtude do pouco tempo extra classe que alunos desta modalidade dispõem, este fator deve ser considerado no desenvolvimento das atividades do professor. Portanto, as atividades propostas aos estudantes devem ser planejadas para ocorrer na escola. Trabalhos extras devem ser pedidos com ponderação em virtude dessa realidade dos alunos. Conforme observado na figura 8, há uma distribuição heterogênea de rendas, ou seja, o público alvo atingido pela EJA não é somente de baixa renda, como poderia se pensar previamente. Esses dados demonstram que os estudantes da EJA não são somente aqueles que estavam à margem da sociedade, com poucas oportunidades de vida. A utilização de textos em sala de aula é também um importante recurso para contextualizar os assuntos e também para o desenvolvimento dos alunos, de acordo com a investigação de estratégias metodológicas e de leitura em sala de aula.

Este tipo investigação, a partir de nossos resultados, se mostrou como uma interessante estratégia que pode ser utilizada pelos professores desta modalidade de ensino antes de iniciarem suas atividades em sala de aula.

Além disso, a partir do questionário também foi possível perceber um grande desinteresse pelas disciplinas das Ciências Naturais, principalmente pela disciplina de Física. Este resultado sugere que diferentes ações e novos trabalhos voltados especificamente para este público alvo devem ser pensados e construídos. Tornar o ensino de Ciências mais motivador e ligado à realidade dos alunos é uma questão que deve ser considerada pelos docentes que atuam na EJA. Os estudantes desta modalidade são bastante distintos em relação àqueles que frequentam o ensino regular e o trabalho interdisciplinar se mostra como alternativa para uma adequada e ampla compreensão do tema Energia. A reflexão por parte dos professores e seu constante aprimoramento no trabalho com a EJA são necessidades evidentes. Pesquisas nesta área devem ser fomentadas pelas universidades em contínua parceria com as unidades de ensino, onde a vivência com estes alunos acontece de fato, e o conhecimento fidedigno da realidade favorecerá uma

aproximação entre a teoria proposta por pesquisadores e a prática diária do professor em sala de aula.

## AGRADECIMENTOS

Aos estudantes da EJA pela disponibilidade em participar da pesquisa e a Capes pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- [1] Silva, G. S., Martins, S. A., *Educação de Jovens e a adultos (EJA): a luta pelo desenvolvimento da cidadania*. Revista Nucleus **9**, 231-240 (2012). Disponível em: <<http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3988612.pdf>>.
- [2] Ciavatta, M., Rummert, S.M., *As implicações políticas e pedagógicas do currículo na educação de jovens e adultos integrada à formação profissional*, Revista Educ. Soc., vol.31, n.111,461-480 (2010) Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/es/v31n111/v31n111a09.pdf>.
- [3] Cachapuz, A. et al. *A Necessária Renovação do Ensino das Ciências*, (Cortez, São Paulo, 2011).
- [4] Chassot, A., *Alfabetização Científica: questões e desafios para a educação*, (Unijuí, Ijuí, 2001).
- [5] Borges, L.P.C., *Reflexões necessárias sobre a educação de jovens e adultos: perspectivas, desafios e possibilidades*, Espaço do Currículo **3**, 137-155 (2009). Disponível em: <http://periodicos.ufpb.br/ojs/index.php/rec/article/download/3688/3008%E2%80%8E>.
- [6] Delizoicov, D. et al., *Ensino de Ciências: fundamentos e métodos*, (Cortez, São Paulo, 2007).
- [7] Vilanova, R., Martins, I., *Educação em Ciências e educação de jovens e adultos: pela necessidade do diálogo entre campos e práticas*, Ciência & Educação (Bauru), vol.14, n.2, 331-346 (2008). Disponível em < <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v14n2/a11v14n2.pdf>>.

Acessos dos links em: 10/10/2013.

## **APÊNDICE A**

### **Investigação de Interesses e Perfil Sócio-Educacional**

Temática: Energia

Público Alvo: Turmas de Educação de Jovens e Adultos



#### **Orientações:**

Esta pesquisa tem por objetivo investigar seus interesses acerca dos conhecimentos que são abordados nas disciplinas de ciências naturais (Física, Química e Biologia) relativos ao tema Energia. As respostas deste questionário servirão de base para elaborar estratégias de ensino que considerem as ideias e necessidades que os alunos da Educação de Jovens e Adultos possuem em relação as suas aprendizagens. Além disso, ao responder o questionário, você contribuirá para melhor selecionar as temáticas relacionadas com temas do dia-a-dia que mais lhe interessam. Sua participação é voluntária e anônima, sendo que os dados serão utilizados para esta análise e desenvolvimento da pesquisa de Mestrado.

Agradecemos sua colaboração e participação.

Atenciosamente,

*André Taschetto Gomes (Mestrando)*

*Isabel Krey Garcia (Professora Orientadora)*

- Responda as questões conforme solicitado;
- Não é necessária a identificação nominal;
- Circule as alternativas escolhidas.

#### **Perfil Sócio-Educacional**

**1. Qual a etapa de seus estudos (série) /totalidade?**

- (a) 1ª/T7; (b) 2ª/T8; (c) 3ª/T9.

**2. Você interrompeu seus estudos antes de ingressar na EJA?**

- (a) Não, realizei a transferência do ensino regular para a EJA;  
(b) Sim, necessitei pausar meus estudos.

**3. Caso tenha respondido “Sim” na questão nº 2, quanto tempo você deixou de estudar antes de retornar à escola:**

- (a) até 1 ano;  
(b) A partir de 1 ano até 3 anos;  
(c) De 3 a 10 anos;  
(d) Mais de 10 anos.

**4. Qual o principal motivo que levou você a não concluir o ensino médio regular?**

- (a) Necessidade de trabalhar;  
(b) Não consegui acompanhar as atividades;  
(c) As atividades domésticas e familiares impediram de concluir os estudos;  
(d) Outro (escreva): \_\_\_\_\_

**5. Qual seu gênero? (a) Masculino; (b) Feminino.**

**6. Qual a sua Idade (selecione uma faixa etária)?**

- (a) 18 - 25 anos;  
(b) 26 - 40 anos;  
(c) 41 - 59 anos;  
(d) Mais de 60 anos.

**7. Estado civil:**

- (a) Solteiro;  
(b) Casado;  
(c) Separado/divorciado;  
(d) União estável/Outros.

**8. Trabalha: (a) Não;**

(b) Sim. Em quais turnos? \_\_\_\_\_

9. Profissão: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

10. Renda Familiar: (Somando a sua renda com a renda das pessoas que moram com você):

- (a) até 1 salário mínimo nacional (R\$620,00);
- (b) De 1 a 2 salários mínimos R\$621,00 à R\$1.240,00;
- (c) R\$1.241,00 à R\$1.860,00;
- (d) R\$1.861,00 à R\$2.480,00;
- (e) R\$2.481,00 à R\$3.100,00;
- (f) R\$3.101,00 à R\$3.720,00;
- (g) Acima de R\$3.721,00.

11. Quantidade de filhos:

- (a) 0; (b) 1; (c) 2 a 3; (d) 4 ou mais.

12. Você recebeu incentivos para retornar aos estudos de:

- (a) Familiares;
- (b) Amigos;
- (c) Conhecidos;
- (d) A iniciativa partiu de meu interesse.

13. Acessa a internet frequentemente:

- (a) Em casa;
- (b) No trabalho;
- (c) Na escola;
- (d) Em cyber e Lan House;
- (e) Não acesso.

14. Você costuma ter hábitos de leitura? Caso afirmativo, quais as fontes de leitura que você mais utiliza?  
(nesta questão podem ser marcadas mais de uma alternativa)

- (a) Jornais;
- (b) Revistas Jornalísticas (Veja, Isto é, Época, etc);
- (c) Revistas de Divulgação Científica/Curiosidades (Super Interessante, Galileu, Mundo Estranho, etc);
- (d) Revistas de Lazer/Celebridades (Tititi, Minha Novela, Caras, etc);
- (e) Revistas em Quadrinhos/Gibi;
- (f) Textos da Internet;
- (g) Livros de Auto-ajuda/Religiosos;
- (h) Livros didáticos;
- (i) Livros de literatura;
- (j) Não costumo ler materiais além daqueles da escola;
- (k) Outras fontes de leitura. Quais? \_\_\_\_\_

15. Qual o seu objetivo ao retornar à Escola? (pode ser marcada mais de uma alternativa)

- (a) Apenas concluir o ensino médio;
- (b) Concluir o ensino médio e realizar concursos públicos;
- (c) Melhorar meu currículo e facilitar a busca de oportunidades de emprego mais lucrativas;
- (d) Iniciar uma graduação na universidade (realizar uma prova seletiva de ingresso);
- (e) Adquirir conhecimentos gerais para utilizá-los em meu dia-a-dia;
- (f) Para ocupar as horas vagas do meu dia;
- (g) Outros motivos (escrever):  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

16. Qual o seu principal motivo em estudar à noite?

- (a) Trabalho durante o dia;
- (b) A escola só disponibiliza o turno noturno para as aulas da EJA;
- (c) As atividades domésticas impedem que estude durante o dia;

(d) Outro (escrever):

---



---

17. Qual(is) disciplina(s) que você mais gosta e se sente interessado?

---

18. Você se sente motivado com as aulas de Ciências (Física, Química e Biologia):

- (a) Sim, estou satisfeito com as aulas, porque...  
 (b) Não, porque (explicar as razões da escolha abaixo):

---



---



---



---

19. Em quais atividades você se sente mais motivado e/ou que mais facilitam sua aprendizagem? (coloque a relevância do uso dos recursos e atividades de acordo com a legenda abaixo no parêntese)

**LEGENDA – Relevância de Utilização**

- (1) Pouco Interesse  
 (2) Médio Interesse  
 (3) Interesse  
 (4) Grande Interesse

Atividades de interesse em sala de aula:

- (a) ( ) Quadro e Giz (onde o professor expõe os conteúdos oralmente);  
 (b) ( ) Retroprojetor (utilização de lâminas);  
 (c) ( ) Apresentações em slides com data-show;  
 (d) ( ) Livro Didático;  
 (e) ( ) Folhas xerocadas/impresas;  
 (f) ( ) Experimentos;  
 (g) ( ) Vídeos;  
 (h) ( ) Atividades no laboratório de informática;  
 (i) ( ) Aulas dialogadas nas quais o professor faz questionamentos e estimula discussões;  
 (j) ( ) Jogos Didáticos;  
 (k) ( ) Apresentação de trabalhos pelos alunos / atividades em grupo.

**Investigação de Interesses**

As categorias abaixo organizam o tema energia em diferentes questões que enfocam este conceito. Ao responder esta segunda parte do questionário, conheceremos quais os assuntos que mais lhe interessam em estudar nas aulas de Ciências (Química, Física e Biologia).

**Orientações**

- Indique qual o seu interesse de estudo em cada categoria, utilizando os números de 1 a 4 (1- *Nenhum interesse*; 2- *Pouco interesse*; 3- *Médio Interesse*; 4- *Grande interesse*), escrevendo-os dentro dos parênteses; Utilize apenas uma vez cada um dos números, classificando todas as categorias conforme seu interesse;
- Após, dentro das categorias, marque nos quadros com “x” seu interesse em cada uma das perguntas que você gostaria que fosse estudada nas aulas de ciências (seguindo a mesma escala de 1 a 4).

**Questões relativas ao Tema Energia**

( ) *Categoria 1: Corpo Humano*

Questões	1	2	3	4
(a) Bebidas energéticas e estimulantes: Qual a sua influência no corpo humano?				
(b) Como os alimentos geram energia em nosso corpo?				
(c) Sol: qual a sua influência em nossa vida/saúde?				
(d) Como os anabolizantes e suplementos influenciam no desempenho dos atletas?				
(e) Qual a relação do clima com as sensações de calor e frio?				

( ) *Categoria 2: Sustentabilidade*

Questões	1	2	3	4
(a) Em meu dia-a-dia, eu posso ter atitudes para manter os recursos do planeta?				

(b)	Sol gera energia?				
(c)	Podemos utilizar a água como fonte de energia?				
(d)	Como cata-ventos gigantes podem gerar energia a partir dos ventos?				

( ) Categoria 3: Meio ambiente

Questões		1	2	3	4
(a)	As plantas produzem energia?				
(b)	Água: como usar para não faltar?				
(c)	As usinas hidrelétrica influenciam os ecossistemas?				
(d)	As pilhas e baterias (energia portátil) são perigosas?				

( ) Categoria 4: Combustíveis/Armamentos

Questões		1	2	3	4
(a)	Os combustíveis renováveis são importantes? Qual a sua relação com a preservação ambiental?				
(b)	Como ocorre uma explosão?				
(c)	Qual a influência das ideias de Einstein, como por exemplo a famosa equação $E=m.c^2$ , na construção da bomba atômica durante a segunda guerra mundial?				
(d)	Usar gasolina, álcool, diesel ou gás natural qual a melhor saída?				

Caso você tenha outro interesse relacionado ao tema energia, descreva abaixo:

---



---

# Energías renovables: una propuesta para su enseñanza



Nelson Arias Ávila<sup>1</sup>, Verónica Tricio Gómez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Licenciatura en Física, Universidad Distrital, Carrera 3 No. 26A - 40, Bogotá, Colombia.

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidad de Burgos, Plaza Misael Bañuelos, Burgos, España.

E-mail: nelsona@udistrital.edu.co

(Recibido el 24 de Enero de 2014, aceptado el 27 de Agosto de 2014)

## Resumen

Reconociendo la importancia de enseñar tópicos sobre energías renovables y temas relacionados, se presenta una propuesta (Cartilla) para la enseñanza de dichas temáticas en secundaria, producto de la cooperación entre las Universidades de Burgos, España y Distrital de Bogotá, Colombia. En ella se integra transversalmente buena parte de las asignaturas propias del nivel mencionado, desarrollando los contenidos tradicionales pero de manera diferente a lo habitual. La cartilla constituye una guía, orientada a favorecer cambios en los planteamientos temáticos y metodológicos en la enseñanza de las energías renovables.

**Palabras clave:** Didáctica de las ciencias, enseñanza de las energías renovables, educación para el desarrollo sostenible, formación de profesores.

## Abstract

Recognizing the importance of teaching renewable energies and related topics, one presents a proposal (Primer) for teaching these subjects in secondary school, product of the cooperation between the Universities of Burgos, Spain and Distrital of Bogota, Colombia. In this is integrated transversely a great part of the own subjects of the mentioned level, developing the traditional contents but in a way different from the habitual thing. The Primer is a guide, oriented to promote changes in the thematic and methodological approaches in the teaching of renewable energies.

**Keywords:** Didactics of the sciences, education of the renewable energies, education for the sustainable development, teachers' formation.

**PACS:** 01.40.gb, 01.40.ek, 88.05.Ec, 88.05.Np.

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Hoy es comúnmente aceptado que el esquema actual de producción de energía, basado en combustibles fósiles, es fundamentalmente insostenible; además se ha comprobado que el empleo indiscriminado de estos tiene efectos nocivos sobre el ambiente. Por ello es clara la necesidad de modificar cuanto antes el modelo energético existente, sustituyendo paulatinamente el empleo de dichos combustibles por otras fuentes que no tengan los inconvenientes enunciados, y generando además un cambio radical en el ahorro y uso racional de la energía a todos los niveles [1, 2, 3, 4, 5]. Se espera que en el nuevo esquema por venir, las Energías Renovables (ER) desempeñen un papel fundamental [6, 7], aunque se sabe que dicho cambio no será fácil ni tan rápido como se quisiera, debido a muchas circunstancias de diverso orden: científicas, técnicas, económicas y políticas, entre otras.

Otra dificultad, no menos importante, está relacionada con la falta de información y conocimiento adecuados por parte de la ciudadanía en general, sobre la problemática planteada, sus dificultades y posibles soluciones. Lo

anterior implica la necesidad de un cambio en la mentalidad de las personas, cambio que debe propiciarse por todos los medios posibles, correspondiéndole a la educación una parte esencial e insustituible en el mismo [8, 9].

Para adquirir una cultura científica básica, es indudable la importancia de enseñar y aprender algunos tópicos referentes a las Energías Renovables y temas relacionados, formación que tendrá mejores frutos si se inicia a edades tempranas, es decir, en los niveles: básico y medio de educación. Ello ha de favorecer en los estudiantes no solo la adquisición de conocimientos, habilidades y hábitos básicos sobre las temáticas mencionadas, sino también el desarrollo de actitudes que se manifiesten tanto en el intercambio de ideas y experiencias con sus familiares y entorno en general, como en su comportamiento a lo largo de la vida.

Basados en lo anterior, y como producto del intercambio y cooperación entre la Universidad de Burgos (España) y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá (Colombia), se ha publicado un libro titulado *Cartilla para la enseñanza de las Energías Renovables*, que integra de manera transversal buena parte de las materias del programa escolar de Colombia y de

Nelson Arias Ávila, Verónica Tricio Gómez

España (similar en contenidos en la mayoría de países hispanohablantes) en torno a la temática planteada, permitiendo que los docentes desarrollen de manera coherente en sus asignaturas los temas en mención. La Cartilla contiene el planteamiento de las problemáticas globales relativas a las Energías Renovables, la exposición de conceptos científicos sobre la temática, actividades prácticas, ejercicios, y orientaciones sobre el lugar que dichos ítem pueden ocupar en los cursos tradicionales. En ella se tratan los contenidos habituales para los tópicos de las ER y temas relacionados (sustentabilidad, fuentes no renovables, impactos ambientales, etc.), pero de manera diferente a lo tradicional; el documento constituye una guía para los profesores, orientada a favorecer un cambio importante en los planteamientos temáticos y metodológicos de las asignaturas tradicionales, relacionadas con las Energías Renovables y temas afines, en la enseñanza secundaria.

A lo largo del presente trabajo se enuncian las bases generales de la Cartilla, su estructura y los aspectos más significativos de la propuesta que, desde la perspectiva expuesta, pueden contribuir en el proceso de la enseñanza de las ER y temas relacionados. Finalmente se muestra un ejemplo de lo que podría ser el desarrollo de una de las temáticas propuestas.

## II. LA PROPUESTA Y SUS ALCANCES

Existen múltiples publicaciones sobre las ER, sus diferentes fuentes, fundamentos físicos, aplicaciones, principio de funcionamiento de diversos dispositivos, diseño y construcción de plantas, características técnicas, ventajas y desventajas de su uso, etc., pero se encuentra poco material (al menos en español) que oriente al profesor sobre cómo enseñar tan importante temática. El objetivo de esta propuesta es brindar al profesorado de educación básica y media una herramienta que, a modo de guía de orientación y apoyo, le ayude en el proceso de enseñanza de las ER y de algunos temas relacionados como son el ahorro de energía, la eficiencia energética, y lo que ha dado en llamarse ciencia ambiental. La Cartilla no pretende ajustarse a las necesidades de un plan curricular específico o determinado, sino que puede ser útil para cualquier colegio o institución educativa.

Dicho trabajo fue publicado por la Universidad de Burgos, figura 1, y se puede encontrar en los siguientes enlaces: <http://www.e-libro.net/libros/libro.aspx?idlibro=12741>  
[www.une.es/Ent/Products/ProductDetail.aspx?ID=246218](http://www.une.es/Ent/Products/ProductDetail.aspx?ID=246218)  
[http://www.infobibliotecas.com/es/libro/cartilla-para-la-ensenanza-de-las-energias-renovables\\_272067](http://www.infobibliotecas.com/es/libro/cartilla-para-la-ensenanza-de-las-energias-renovables_272067)

Aunque la Cartilla puede ser empleada por los profesores de manera individual, la idea que prima en ella es resaltar la importancia y necesidad de un enfoque multidisciplinar –que posibilite a los estudiantes ubicar a las ER en su contexto, relacionándolas con su vida cotidiana–, por lo cual se sugiere que en la medida de lo posible se conforme en cada colegio (o grupo de ellos) un equipo de docentes de diferentes ciencias y disciplinas,

interesados en el tema, que analice el documento, tome aquello que le parezca de interés y lo implemente en sus clases.



FIGURA 1. Portada y contraportada de la publicación.

En uno de los apartes de la Presentación de la Cartilla, hecha por el Dr. Cayetano López Martínez Director General del CIEMAT, se dice: “Se trata de una iniciativa cuya finalidad es exponer para escolares, de forma comprensible y organizada, las nociones más básicas del mundo de la energía y muy especialmente las relacionadas con las energías renovables. Su interés radica no solo en la información que da a los alumnos de diferentes niveles escolares, que es mucha y valiosa, sino también en las propuestas para asimilar esa información, combinando las descripciones textuales con ejercicios que motiven al alumno y le hagan comprender de forma práctica, casi jugando, el potencial y también los problemas asociados a las energías renovables” [10].

### A. Estructura y contenido

La Cartilla consta de cinco secciones a saber: *Generalidades y Metodología*, *Resumen Científico-Técnico*, *Actividades*, *Ejercicios*, y *Sugerencias Metodológicas*; luego de un *Apéndice*, se finaliza el documento con *Bibliografía y Sitios web*.

En la primera sección, *Generalidades y Metodología*, se hace un somero recuento de las principales iniciativas que desde diferentes entidades y organismos se han presentado para abordar la problemática generada por el empleo creciente y no controlado de las energías convencionales. Se analiza brevemente la situación en Colombia y España, anotando las similitudes con otros países, se fundamenta el porqué la importancia y necesidad de enseñar las ER desde la más temprana edad, y finalmente se comenta la situación general respecto a dicha enseñanza en Colombia y España, a la luz de la reglamentación vigente en dichos países. La educación energética, como todo proceso educativo, es un camino de largo recorrido en términos de ejecución y

aplicación, con las problemáticas asociadas que van desde la falta de conocimientos por parte de algunos docentes y autoridades educativas, el carácter esporádico y “optativo” de este tipo de actividades docentes, el enfoque unilateral generalmente desde una sola asignatura, la poca flexibilidad de los planes, horarios y programas de estudio –los cuales generalmente no pueden cambiarse sino por organismos de carácter nacional–, la omnipresente falta de fondos, recursos y tiempo, hasta las influencias “externas” sobre los estudiantes, quienes generalmente ven en sus hogares y entornos comportamientos que no son acordes con lo estudiado en clases, en particular en lo referente al uso racional y ahorro de energía.

La educación energética necesita además un cambio importante en los planteamientos temáticos y metodológicos, respecto a las asignaturas de ciencias tradicionales en la enseñanza secundaria. La metodología general propuesta en la Cartilla, recoge experiencias de varios autores, favorece la apropiación de conocimientos y ciertas aptitudes referentes a la energía. También propone la realización de actividades en las cuales el joven estudiante debe analizar una situación específica y buscar respuestas y soluciones, permitiéndole formar sus propias opiniones sobre el tema, y fomentando su directa participación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La metodología propuesta, sin que implique más tiempo del previsto en los planes de estudio a nivel medio, integra de manera transversal a buena parte de las asignaturas del programa escolar en torno a la temática planteada, permitiendo que cada docente la desarrolle desde su asignatura, sin perder la conexión con las demás. Allí donde es posible se emplea la metodología conocida como “aprendizaje basado en proyectos”, donde –entre otras cosas– los estudiantes construyen dispositivos con materiales de bajo costo y sugieren soluciones a situaciones previamente planteadas. Para informarse, aprender y comunicarse también se recomiendan (además de las fuentes tradicionales) las TIC como herramienta de aprendizaje, proponiendo tareas bien definidas a modo de actividad de investigación documental, empleando la información disponible en Internet.

En la segunda sección, *Resumen Científico-Técnico*, se presenta una breve descripción sobre algunos aspectos científico-técnicos (fundamentalmente cualitativos) de las ER, con la intención de brindar al docente un resumen de estos, que lógicamente debe ser ampliado dependiendo de las asignaturas y necesidades concretas en cada clase. Se presentan los fundamentos básicos de conceptos tales como: radiación solar y su medición, efecto invernadero, el hidrógeno, “tipos” de energía: solar (térmica y fotovoltaica), eólica, geotérmica, de la biomasa, del mar, hidráulica, y las principales formas de aprovechamiento de cada una de ellas. El material de esta sección se distribuye en cuatro apartados, e incluye 34 figuras explicativas del texto, algunas de las cuales se muestran en la figura 2.

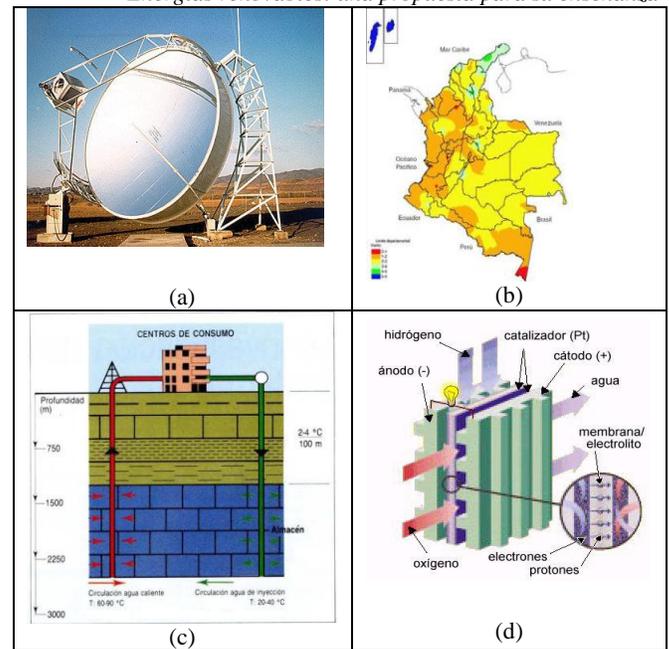


FIGURA 2. Algunas ilustraciones de la sección *Resumen Científico-Técnico*.

Fuentes de las figuras:

- (a) [http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/7869/Proyecto %20Dish%20Stirling.pdf?sequence=1](http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/7869/Proyecto%20Dish%20Stirling.pdf?sequence=1).  
 (b) [www.todacolombia.com/geografia/mapascolombianos.html](http://www.todacolombia.com/geografia/mapascolombianos.html)  
 (c) [www.igme.es/internet/Geotermia/Ficheros%20PDF/MasInfor/](http://www.igme.es/internet/Geotermia/Ficheros%20PDF/MasInfor/)  
 (d) [www.cienciateca.com/fuelcells.html](http://www.cienciateca.com/fuelcells.html).

En la tercera sección, *Actividades*, una de las principales de la Cartilla, se proponen una serie de actividades (proyectos) que implican la directa participación del estudiante, bien sea de manera individual o grupal, y bien sea en el aula de clase o fuera de ella. Dentro de dichos proyectos se encuentran el desarrollo de experimentos “caseros” y la construcción (en algunos casos con elementos de diseño) de dispositivos sencillos y de bajo costo, que emplean a las ER para su funcionamiento. Para la realización de dichas actividades se sugiere, de manera general, la creación de círculos o grupos de interés en cada colegio (o grupo de ellos), que traten problemáticas relacionadas con el medio ambiente, las ER y temas similares.

Una de las actividades concretas en este sentido es la institucionalización de un espacio que podría llamarse *Aula de las Energías Renovables*, el nombre obviamente será cosa de cada institución o colectivo. Aunque lo ideal sería un aula real donde los estudiantes puedan reunirse periódicamente, realizar sus trabajos, presentar y exponer sus proyectos, tener algunos instrumentos para realizar prácticas de laboratorio, etc., puede ser simplemente un rincón o pasillo en el colegio, donde se busque informar y sensibilizar a los visitantes (padres de familia, otros estudiantes, etc.) sobre el problema ambiental que conlleva la utilización de las fuentes convencionales de energía, su agotamiento, sus altos índices de contaminación, las posibles soluciones –entre ellas las ER–, el uso racional de la energía, etc. Un periódico mural orientado por algún

maestro, pero realizado directamente por los estudiantes es una buena forma de iniciar las actividades del *Aula de las Energías Renovables*.

En el apartado dedicado a la construcción de dispositivos, se proporciona información sobre cómo realizar varios de ellos, obviamente los “diseños” presentados se pueden (y en algunos casos se deben) mejorar y modificar; uno de los aspectos interesantes de esta metodología es que incentiva la creatividad tanto del docente como de los estudiantes, además posibilita el desarrollo de ciertas habilidades manuales, aspecto no menos importante en la formación integral del estudiante.

Se han seleccionado dispositivos de fácil construcción y los modelos más económicos, además como complemento se presenta un listado de referencias donde pueden encontrarse otros modelos, generalmente más costosos y de mayor tamaño y complejidad. Entre los diseños sugeridos se encuentran: cocina solar, secador solar, celda solar simple, manga de viento, aerogenerador simple, biodigestor y generador hidráulico simple.

Dentro de la metodología propuesta, el estudiante (o grupo de estudiantes) deberá no solo construir el dispositivo en cuestión, sino desarrollar con él ciertas mediciones y hacer los análisis, cometarios y demás actividades que previamente se hayan planteado; es importante que el estudiante entienda el tipo de aplicaciones concretas que dichos dispositivos podrían tener en la vida diaria y sus ventajas con respecto a otros similares que empleen combustibles convencionales. Asimismo, al final de esta sección se presentan con cierto detalle algunas de las posibles prácticas de laboratorio que podrían realizarse, y ciertas aplicaciones experimentales que tienen los dispositivos construidos. En la tabla 1 se muestran algunos de los aspectos que caracterizan las sesiones de laboratorio propuestas.

Como se ha mencionado, la idea es que el estudiante mismo participe en la formulación y desarrollo de las diferentes actividades, por lo cual se recomienda excluir el planteamiento de los experimentos en forma de “recetas”, es decir, aquel en que se presenta al estudiante paso a paso cada una de las acciones concretas que debe seguir durante la práctica. Será creatividad del docente en cada situación particular formular los objetivos iniciales para que el estudiante (o grupo) plantee un proyecto concreto a desarrollar. Es muy importante que los informes de la práctica o laboratorio sean discutidos y analizados con los estudiantes, esto permite aclarar conceptos y profundizar en el aprendizaje. Será cosa de cada plantel crear diversas formas de estímulos a los estudiantes que muestren mayor interés y participación en las actividades programadas, siempre es reconfortante para un autor saber que su trabajo es reconocido; las *Ferías de Ciencias* y actividades similares son buenos espacios para ello.

En la siguiente sección, *Ejercicios*, se recomienda, cuando ello sea posible, plantear ejercicios (problemas o situaciones problemáticas) sobre la temática desde el enfoque de cada asignatura.

Estos “ejercicios” serán de carácter muy variado dependiendo del nivel de los estudiantes, etc., pero se debe

procurar que no sean los ejercicios tradicionales de texto, donde se requiere simplemente la “aplicación” de una fórmula.

**TABLA I.** Características de algunas sesiones de laboratorio.

¿Qué se busca?	Aspecto principal	Aspecto complementario
Laboratorio 1	Obtener información sobre la energía emitida (y recibida) desde el Sol.	Compararla con algo “más tangible” como un bombillo común.
Laboratorio 2	Obtener información sobre la energía solar que incide diariamente en la superficie terrestre.	Compararla con la que se recibe en el patio del plantel educativo.
Laboratorio 3	Describir el funcionamiento básico de la <i>cocina solar</i> construida dentro de las actividades del apartado <i>Hacerlo en clase</i> .	Describir las transformaciones energéticas que se dan en cada una de las etapas del proceso de calentamiento de productos y alimentos.
Laboratorio 4	Describir el funcionamiento básico del <i>secador solar</i> construido dentro de las actividades del apartado <i>Hacerlo en clase</i> .	Analizar las transformaciones que se presentan en las etapas del proceso de secado de productos y alimentos.
Laboratorio 5	Describir el funcionamiento básico de la <i>manga de viento</i> construida dentro de las actividades del apartado <i>Hacerlo en clase</i> .	Realizar algunas experiencias de carácter cualitativo.

Se sugiere presentar principalmente situaciones de enunciado más abierto orientadas a trabajar con metodologías de resolución de problemas o similares, como por ejemplo, el cálculo del consumo energético (eléctrico) del hogar de cada estudiante (o del colegio), con sus implicaciones (en contaminación, etc.), y lo que supondría en todos los aspectos un consumo responsable o el replazo por una fuente renovable. A manera de ejemplo, se presentan en esta sección los tipos de “ejercicios” que podrían proponerse con las variaciones a que haya lugar.

Finalmente, en la última sección *Sugerencias Metodológicas*, teniendo en cuenta que generalmente los temas asociados con las ER que se estudian se presentan de manera desarticulada desde diferentes asignaturas, se plantean algunas sugerencias metodológicas para solventar dicho problema. Ellas se fundamentan en la necesidad de un enfoque multidisciplinar y transversal que permita a los estudiantes no solo comprender más completa e integradamente, las bases conceptuales de las ER (temas afines y su uso), desde la óptica de las diferentes asignaturas, sino –tal vez lo principal– “introyectar” dichos

conocimientos de tal manera que sean tenidos en cuenta siempre que como ciudadanos deban tomar alguna posición con respecto al uso de la energía, y en general a la conservación del medioambiente, del entorno y del planeta.

En resumen, se plantea una metodología que presenta una manera global, multidisciplinar y cooperativa de enfocar y desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las temáticas referidas. Desde todas las asignaturas del plan escolar se puede hacer algún aporte en este sentido, en cierta medida las ER y temas afines se pueden convertir en un eje común, aglutinador, donde confluyan conocimientos de diferentes áreas (historia, lengua, tecnología, química, biología, física, entre otras); no se quiere decir con esto que ese sea el único eje que puede proponerse. Simplemente se considera que dada la situación actual del planeta en cuanto a aspectos ambientales, sociales y energéticos se refiere, éste debería ser uno de los ejes centrales en la formación básica de los futuros ciudadanos, los cuales deberán estar comprometidos con el desarrollo sostenible.

Se sugiere que cada actividad programada esté relacionada con el entorno habitual del estudiante (familia, colegio, barrio, etc.), de tal forma que él pueda apreciar más tangiblemente el problema ambiental y sus posibles soluciones, así como proponer actividades concretas que puedan implementarse en dicho entorno a corto y mediano plazo. Se recomienda que las actividades realizadas por los estudiantes sean analizadas y discutidas en grupo, donde cada estudiante (o grupo de ellos) sustente el porqué de lo realizado.

Es aconsejable que el estudiante (o grupo de ellos) presente un corto escrito original sobre cada una de las principales actividades desarrolladas, el cual puede ir acompañado de ilustraciones (ojalá también originales), esto incentiva las habilidades de redacción y las aptitudes artísticas. Dichos trabajos pueden ser la base para el periódico mural mencionado; donde sea posible también pueden ser insumos para el sitio web del plantel.

### III. LA FICHA

Como una forma de implementar lo anterior, se propone en la Cartilla un modelo de ficha que se espera sea una herramienta didáctica útil que facilite y complemente la labor del docente. La “transversalidad” de la propuesta, es decir, la integración de manera transversal de la temática expuesta a buena parte de las asignaturas del programa escolar, se debe reflejar en la ficha, la cual podrá desarrollarse dentro de casi cualquier asignatura. Por ello los contenidos propuestos son generales y las actividades básicas contempladas están al alcance de la mayoría de centros educativos. En la ficha, que se considera algo muy operativo, se hará referencia a los temas tratados y expuestos en las secciones anteriores de la Cartilla.

A continuación se expone el esquema general y los objetivos de la ficha:

•**Temática:** Definir claramente la temática específica a estudiar, y enunciar las diferentes asignaturas que pueden estar involucradas en el desarrollo de esta, aunque

*Energías renovables: una propuesta para su enseñanza* pertenezcan a distintos niveles educativos. Varias asignaturas pueden tener una cobertura amplia y general en todas las temáticas a abordar, tal es el caso de las matemáticas, donde cálculos, gráficas, ejercicios y otras actividades propias de esta ciencia se pueden realizar sobre ejemplos concretos relacionados con el tema propuesto en la ficha. Algo similar se presenta con la lengua castellana donde es posible realizar ejercicios de comprensión de lectura, redacción y análisis lingüístico de escritos o artículos sobre cada tema específico, lo propio ocurre con el idioma o idiomas extranjeros que se estudien en el plantel.

•**Enfoques desde las diferentes disciplinas:** Orientar las posibles actividades desde cada una de las asignaturas definidas en el párrafo anterior. En la medida de lo posible plantear reuniones entre los profesores de las diferentes asignaturas involucradas, para coordinar las actividades propuestas. Para cada actividad propuesta se sugiere tener en cuenta tres aspectos básicos: la novedad de las ER y afines que se aporta, y en qué contenidos específicos de cada asignatura; qué resultados de aprendizaje se pretende que alcancen los alumnos con dicha actividad y cómo evaluar los mismos; y finalmente, qué actitudes de los alumnos se desean reforzar en relación con las ER.

•**Hacerlo en clase:** Se indicarán las actividades prácticas (generalmente construcción de prototipos de bajo costo, y experimentos de laboratorio) que puedan desarrollarse en cada clase (en una o varias asignaturas), lo cual dependerá en buena medida de las posibilidades e infraestructura del colegio. La actividad podrá iniciarse en una clase concreta y continuarse como un trabajo extraclase que puede abarcar varias asignaturas. Respecto a las prácticas de laboratorio es de anotar que para efectos de la ficha pueden considerarse de dos tipos, aquellas que son “propias” de cada asignatura, en las que se desarrollan conceptos específicos de alguna materia que están relacionados con las ER y temas afines, y aquellas relacionadas directamente con la ER y temas afines. Por cuestiones fundamentalmente de tiempo, estas últimas se pueden programar como actividades extraclase o complementarias.

•**Ejercicios:** Proponer ejercicios de acuerdo a la metodología expresada anteriormente.

•**Lecturas complementarias:** Se sugiere recomendar lecturas complementarias para cada tema, las cuales podrán ser artículos de revistas divulgativas o científicas, escritos de los profesores de las asignaturas, extractos de libros, revistas, periódicos, etc. También, cuando sea posible, se recomendarán (o proyectarán) películas, programas para computador, y demás material audiovisual. Se recomienda incentivar las lecturas sobre aquello que se puede hacer concretamente a nivel de cada estudiante en su entorno, para mejorar el impacto ambiental y contribuir al ahorro y no despilfarro de energía. La idea general es que se pueda realizar posteriormente algún tipo de trabajo sobre esas lecturas y actividades complementarias.

•**Bibliografía:** Aunque en la cartilla se cita cierta cantidad de bibliografía, será el docente quien conociendo las condiciones propias de su entorno (económicas, sociales y tecnológicas), de su plantel y de sus estudiantes escoja, revise y recomiende la bibliografía (no solo libros,

artículos, sitios web, sino todo tipo de material como recortes de prensa, películas, documentales, etc.) más acorde a los objetivos generales propuestos al definir cada temática.

### A. Ejemplo de ficha

A manera de ejemplo, se presentan los aspectos básicos que podría tener una de las fichas propuestas y desarrolladas en la Cartilla, sobre la energía eólica. Inicialmente la ficha remite al lector a los aspectos fundamentales sobre esta temática, tratados al inicio de la Cartilla, haciendo énfasis en que este, como los demás temas, debe abordarse de manera integrada desde diversas asignaturas como biología, química, física, geografía, historia, y ciencia, tecnología y sociedad, entre otras.

Desde la biología se sugiere abordar temas como: algunos efectos de los vientos (fenómenos de “El Niño” y “La Niña”), erosión, la salud y el aire. La química podría tratar el aire y sus componentes, la calidad del mismo, la contaminación atmosférica y el problema del ozono. La física estudiaría los gases, la presión atmosférica, el efecto de Coriolis, la velocidad y dirección de los vientos, los indicadores físicos de calidad del aire, y nociones elementales de meteorología. En la asignatura ciencia, tecnología y sociedad (o similar) se podría hacer una breve introducción a las turbinas, a las palas de los aerogeneradores, soluciones a la contaminación atmosférica, aplicaciones de la energía eólica en diferentes actividades humanas (rosa de los vientos, molinos de viento, etc.).

Las asignaturas de sociales (geografía e historia), también pueden aportar con el estudio de la atmósfera, los vientos (su clasificación, etc.), la humedad y temperatura en diferentes sitios de la Tierra (ciclones, tornados, huracanes, etc.) y su influencia en el clima. Ubicar históricamente descubrimientos (leyes) y aplicaciones de los principios básicos de la energía eólica (rosa de los vientos, molinos de viento, veletas, etc.). Personajes que han desempeñado algún papel relevante dentro de la temática, su contexto y situaciones históricas.

En Lengua Castellana (e idioma extranjero) se propone la redacción y análisis lingüístico de artículos sobre la temática mencionada.

En *Hacerlo en clase* se sugieren (y explican) varios dispositivos sencillos de bajo costo, se presenta su diseño básico y se muestra cómo construirlos; por ejemplo una manga de viento o un aerogenerador simple. Además se plantean algunas actividades a realizar con dichos dispositivos.

Como en casi todas las fichas, se sugiere realizar visitas a sitios cercanos (universidades, plantas, laboratorios, etc.), donde existan en funcionamiento dispositivos relacionados con la temática seleccionada, en este caso relacionados con la energía eólica. También serían instructivas visitas a estaciones o centros de meteorología.

Algunas de las prácticas propuestas son: erosión y vegetación, ciclo del carbono (biología); experimentos diversos con los componentes del aire, procesos químicos

que producen emisión de gases y partículas contaminantes, mediciones de acidez del agua (química); leyes de los gases, convección natural y forzada, túnel de viento, rozamiento, medición de vientos (física).

Finalmente se sugieren lecturas complementarias algunas de ellas relacionadas con la contaminación del aire y la erosión debida a los vientos. Se enuncia bibliografía complementaria tanto sobre aspectos teóricos, como sobre experimentos y construcción de dispositivos.

## IV. CONCLUSIONES

Basados en lo expuesto se puede concluir que la propuesta, concretada en la Cartilla:

- Presenta un enfoque interdisciplinar y cooperativo como guía para el docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Energías Renovables y temas relacionados, en la educación media.
- Puede emplearse en cualquier institución educativa, sin ceñirse a un plan curricular específico.
- Puede abordarse en cualquier orden, dependiendo de las características y necesidades de cada institución, y no requiere ser implementada en su totalidad.
- Su desarrollo no implica el aumento de horas en las diferentes asignaturas, aunque sugiere la creación de grupos de interés para complementar las temáticas.
- Incentiva la construcción de dispositivos de bajo costo, fomentando el desarrollo de habilidades manuales del estudiante dentro de un ambiente de formulación y desarrollo de proyectos.
- Involucra el entorno del estudiante, analizando situaciones cotidianas y desarrollando prácticas que difieren de aquellas –tipo “receta”– en las cuales el estudiante se limita a seguir unas guías preestablecidas.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá y a la Universidad de Burgos por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] Boyle, G., *Renewable Energy. Power for a Sustainable Future*, 2d. Ed. (Oxford, New York, 2004).
- [2] Gutiérrez, C. y Gutiérrez, C., *La actuación frente al cambio climático: guía para un consumo sostenible*, (Universidad de Murcia, Murcia, 2009).
- [3] Heras, M., *Fuentes de energía para el futuro*, (Ministerio de Educación, Madrid, 2008).
- [4] Menéndez, E. y Miguélez, F., (Eds.) *Energía y sostenibilidad, incidencia en el medio marino*, (Netbiblo, A Coruña, 2003).
- [5] Rodríguez, J., *Energía*, (Editolaser, Bogotá, s.f.).

- [6] García, P., *Nuevas energías*, Revista Española de Física **27**, 1, 34-40 (2013).
- [7] Valdés, R., Rodríguez, L., Tricio, V. y Lucio, J., *Nociones elementales y problemas docentes sobre la producción y utilización de hidrógeno electrolítico obtenido mediante fuentes renovables de energía*, Lat. Am. J. Phys. Educ. (en prensa).
- [8] Mendoza, J., Fernández, M. y Arrastía, M. (Coords.), *Educación Enerxética e Desenvolvemento Sostible*.

*Energías renovables: una propuesta para su enseñanza* (Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 2007).

- [9] Macedo, B. y Salgado, C. *Educación ambiental y educación para el desarrollo sostenible en América Latina*. <[www.ehu.es/cdsea/web/revista/numero\\_1/01\\_03macedo.pdf](http://www.ehu.es/cdsea/web/revista/numero_1/01_03macedo.pdf)>, Consultado el 20 de diciembre de 2013.

[10] Arias Ávila, N. y Tricio Gómez, V., *Cartilla para la Enseñanza de las Energías Renovables*, (Universidad de Burgos, Burgos, 2012), pp. 9-10.

# Tecnologías emergentes ¿cuáles usamos?



**Concari, Sonia Beatriz**

*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad Regional Rosario, Universidad Tecnológica Nacional, E. Zeballos 1341, C.P. 2000, Rosario, Argentina.*

**E-mail:** sconcari@gmail.com

(Recibido el 3 de Febrero de 2014; aceptado el 10 de Octubre de 2014)

## Resumen

Se presenta una revisión de las tecnologías que están paulatinamente siendo incorporadas a la educación, en el contexto de los nuevos escenarios educativos, la creciente disponibilidad de recursos tecnológicos de uso libre y el progresivo acceso a las tecnologías por parte de los estudiantes, así como la descripción de algunas tecnologías emergentes en estos últimos años, potencialmente útiles para la innovación en la enseñanza de las ciencias. Con el objetivo de explorar el tema y reflexionar sobre las preguntas de investigación que sean pertinentes al empleo de las tecnologías emergentes para la educación, se presentan algunas tecnologías emergentes, así como resultados de investigaciones sobre su desarrollo y empleo en la educación en física.

**Palabras clave:** Tecnologías emergentes, TIC, enseñanza de las ciencias, estrategias didácticas.

## Abstract

A review of the technologies that are gradually being incorporated into education is presented as well as the description of some emergent technologies in the latter years, potentially useful for the innovation in science education are present. Present context is characterized by new educational scenes, the increasing availability of technological resources of free use and the progressive access to technologies by students. With the aim to explore the topic and to think about pertinent research questions related to the educational use of emergent technologies, some emergent technologies as well as results of investigations on their development and employment in the physics education are also presented.

**Keywords:** Emergent technologies, ICT, science education, didactic strategies.

**PACS:** 01.50.-i, 01.40.gb, 01.50.H-

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Las tecnologías emergentes están paulatinamente siendo incorporadas a los distintos niveles de la educación formal e informal. Pero, ¿cómo se integran en la enseñanza presencial y a distancia? ¿Qué resultados se conocen sobre su empleo en el aula? ¿El desarrollo de qué habilidades cognitivas es promovido con ellas? Compete a los investigadores en educación, reflexionar sobre la pertinencia de esas preguntas, reconociendo la necesidad de responderlas a través de nuevas investigaciones.

El objetivo general de este trabajo es identificar y caracterizar las tecnologías emergentes que se han ido incorporando como medios y recursos didácticos, y las que se emplean hoy en la educación, así como los resultados de dicho empleo en la educación en física.

Para el logro de tal objetivo, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

- Identificar y caracterizar las tecnologías emergentes de mayor uso en la educación superior.
- Presentar estudios realizados sobre tecnologías empleadas en la educación en física.

## II. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES SOBRE EL TEMA

Las modernas organizaciones demandan personas con habilidades para la resolución de problemas, la toma de decisiones, la capacidad de trabajo colaborativo y la adaptación flexible a los cambios rápidos, que se producen en la sociedad del conocimiento. La educación apoyada en tecnologías ofrece oportunidades de renovar contenidos y métodos de enseñanza que permitan desarrollar esas competencias.

Los nuevos escenarios de formación están influidos por tres factores relevantes: la presencia de Internet, con la Web 2.0 y 3.0, las redes y la “nube” promueven y se desarrollan nuevas formas de pensar, producir, comunicarse, investigar, conocer, trabajar, aprender y enseñar; paralelamente hay una creciente disponibilidad de recursos tecnológicos de uso libre (simulaciones, laboratorios remotos, videos, blogs, podcasts, foros, etc.) y junto con ello, un creciente acceso a las tecnologías por parte de los alumnos potenciales (Internet, iPod, netbook, tablet, smart phone, etc.).

Como afirma Castells [1], “...la tecnología clave es la Tecnología de la Información, que es distribuida a través de Internet; lo que hace posible a -La Red- como la nueva

forma de organización social. En este sentido, Internet no es simplemente una tecnología, sino un medio de organización fundamental, que procesa la virtualidad en nuestra realidad, por lo tanto, dirige y transforma nuestra realidad”.

En este contexto, se nos impone repensar nuestro rol docente en cuanto a promover la construcción de conocimiento y la producción de sentido en nuestros estudiantes.

En poco tiempo hemos dejado de llamar a las tecnologías empleadas en la educación, nuevas tecnologías de la comunicación e información (NTIC), para ocuparnos de las denominadas tecnologías emergentes (TE). El término TE alude a nuevas tecnologías con potencial de demostrarse como tecnologías disruptivas. Constituyen innovaciones en desarrollo que en un futuro cambiarían la forma de vivir y de producir brindando mayor facilidad a la hora de realizar tareas, o haciéndolas más seguras. Incluyen tecnologías discontinuas derivadas de innovaciones, así como tecnologías más evolucionadas formadas de la convergencia de ramas de investigación antes separadas. Hablar de tecnologías emergentes implica utilizar tecnología para dar soluciones actuales y reales.

Son ejemplos de TE los nanofármacos, los teléfonos inteligentes, los cables cuánticos, las bacterias fotosintéticas creadas por ingeniería genética, la Web semántica, la Web 3.0, la impresión 3D, los sensores remotos, las pantallas flexibles, etc. [2].

Nos interesa en esta presentación abocarnos a las TE de uso actual o potencial en la educación: tecnologías móviles (teléfonos, tabletas...) destinadas al mobile learning, realidad aumentada, juegos serios, interfaces gestuales y herramientas analíticas de aprendizaje, entre otras [3, 4].

El uso de cualquiera de estas tecnologías debe superar la idea que con ellas se enseña lo mismo que antes, pero de una manera más eficiente [5], por el contrario, se puede promover el desarrollo de nuevas habilidades y competencias.

En este contexto, se requiere que el docente seleccione críticamente las distintas tecnologías, generando con ellas estrategias de enseñanza y orientando las tareas para que las mismas se constituyan en verdaderas oportunidades de aprendizajes.

A través de actividades mediadas por tecnologías, los estudiantes deben seleccionar información, procesar, simular, modelar, calcular, poniendo siempre en marcha procesos activos de construcción de saberes [6].

En la educación progresivamente se han ido incorporando nuevos recursos informáticos, digitales y basados en tecnologías; no obstante, acordamos con Litwin [7], en que “la tecnología limita o enmarca, potencia o banaliza la propuesta pedagógica y didáctica”.

En la actualidad se dispone de un gran número de recursos tecnológicos, de uso libre. Pero la disponibilidad de materiales y recursos de calidad no garantiza su uso en las aulas, por lo que se es menester procurar una adecuada formación de los profesores, y el asesoramiento en TE, a fin de que desarrolle la capacidad de evaluación y selección de recursos.

Partiendo de estas consideraciones, exploraremos las tecnologías que se anticipan como promisorias y de gran impacto en la educación superior en los próximos años, y que podrían emplearse para innovar en la enseñanza de la física.

### III. METODOLOGÍA

El presente trabajo presenta dos partes. La primera corresponde a un estudio exploratorio, por el cual se identificaron recursos tecnológicos empleados en la educación superior, a partir del relevamiento de informes especializados que han anticipado las tecnologías que tendrían mayor impacto en la educación superior en los próximos años. Fueron fuentes de datos los últimos tres informes anuales (novena a undécima edición) denominados Horizon Report, confeccionados por dos consorcios internacionales, interesados en la exploración y uso de nuevos medios y tecnologías, y avances en la enseñanza a través de tecnologías innovadoras, respectivamente: *The New Media Consortium (NMV)* ([www.nmc.org](http://www.nmc.org)) y *EDUCAUSE Learning Initiative (ELI)* ([www.educause.edu/eli](http://www.educause.edu/eli)).

Las tecnologías destacadas en cada edición del reporte, están embebidas en un contexto contemporáneo que refleja la realidad de estos tiempos, tanto en la esfera de la educación como del mundo en general. La comprensión de ese contexto por parte del comité involucrado en la confección de los reportes ha sido hecha a partir de una extensa revisión de artículos y entrevistas y nuevas investigaciones, para identificar tendencias que están afectando las prácticas de enseñanza, el aprendizaje y la creatividad. Una vez identificadas las tendencias, éstas son jerarquizadas de acuerdo con la relevancia que cada una pareciera tener sobre el aprendizaje en las instituciones de educación superior en los próximos cinco años. Las tecnologías posicionadas en los primeros lugares surgen de un acuerdo significativo entre los miembros del comité, quienes las consideran claves para ese período.

La segunda parte del trabajo es una síntesis de los trabajos de desarrollo y/o empleo de algunas tecnologías para la enseñanza de la física en la educación superior, presencial y a distancia y en la formación docente continua.

### IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Desde 2002, se da a conocer un informe anual denominado Horizon Report, confeccionados por los consorcios internacionales NMV y EDUCAUSE, interesados en la exploración y uso de nuevos medios y tecnologías, y avances en la enseñanza a través de tecnologías innovadoras, respectivamente. Se consultaron los informes correspondientes a las previsiones de impacto de las tecnologías en la educación superior realizados en los años 2011, 2012 y 2013.

En la Tabla I, se listan las seis tecnologías que el reporte

2011 [3] anticipaba como las de mayor impacto en la educación superior para el período 2011-2015, junto con

una descripción de las tendencias clave y los retos que se prevé, se presentarán en el empleo de las mismas.

**TABLA I.** Tecnologías emergentes con mayor impacto en educación superior para un horizonte de adopción en el período 2011-2015. Reproducida de Pozos Pérez [4].

Horizontes de adopción			Tendencias clave	Retos críticos
1 año o menos	2 - 3 años	3 - 5 años		
1. Libros electrónicos	3. Realidad aumentada	5. Interfaces gestuales	La abundancia de recursos e interacciones a través del Internet está incrementando el reto para repensar sobre nuestro rol como educadores en cuanto a ‘producción de sentido’, ‘coaching’ y acreditación’. Las personas esperan trabajar, aprender y estudiar en el tiempo y lugar que lo deseen. El mundo del trabajo es incrementalmente colaborativo, acrecentando la reflexión sobre la forma en que los proyectos de los estudiantes son estructurados. Las tecnologías que usamos están incrementalmente basándose en ‘la nube’ (cloud-based) y nuestras nociones sobre el soporte en TI tienden a la descentralización.	La alfabetización digital continua en ascenso de importancia como competencia clave en todas las disciplinas y profesiones. Las mediciones apropiadas para la evaluación están quedando rezagadas por la emergencia de nuevas concepciones sobre la escuela, formas de autoría, publicación e investigación. Las presiones económicas y los nuevos modelos de educación están compitiendo fuertemente contra los modelos tradicionales de universidad. Seguir el ritmo de la rápida proliferación de la información, herramientas de software y recursos está desafiando igualmente a profesores y alumnos.
2. Tecnologías móviles (teléfonos, tabletas...)	4. Aprendizaje basado en juegos	6. Herramientas analíticas de aprendizaje		

En la Tabla II, se sintetizan los seis tipos de tecnologías que, según el reporte 2012 [8], van a ser de uso generalizado en los centros universitarios hasta el año 2016.

**TABLA II.** Tecnologías emergentes con mayor impacto en educación superior para 2012-2016.

Horizontes de adopción		
Un año o menos	De dos a tres años	De cuatro a cinco años
Aplicaciones para dispositivos móviles	Aprendizaje basado en juegos	Informática basada en gestos
Tabletas	Analíticas de aprendizaje	Internet de las Cosas

**TABLA III.** Tecnologías emergentes con mayor impacto en educación superior para 2013-2017.

Horizontes de adopción		
Un año o menos	De dos a tres años	De cuatro a cinco años
Cursos abiertos masivos en línea o MOOC	Juegos y Gamificación	Impresión 3D
Tabletas	Analíticas de aprendizaje	Tecnología portátil

De igual modo, en la Tabla III, se listan las tecnologías que, *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 3, Sept. 2014*

según el Horizon Report más reciente [9, 10], van a producir impactos importantes en los centros de educación superior en los próximos cinco años. Como las anteriores, se trata de proyecciones cuyo análisis se presenta más adelante.

El comité asesor para la confección de estos informes ha estado integrado mayoritariamente por especialistas pertenecientes a instituciones de los Estados Unidos y de países desarrollados del norte, con sólo dos representantes de instituciones privadas de Brasil y uno de una universidad de Nigeria.

Puede verse en la Tabla I, que se preveía hace dos años, que el libro electrónico tendría un horizonte de adopción de un año o menos, y al menos en las instituciones de educación superior de Argentina y Latinoamérica en general, esto claramente no ha ocurrido. Aunque su uso se ha extendido, el libro electrónico no es un recurso tecnológico presente en la enseñanza en nuestras universidades.

De modo similar, como puede verse de las Tablas I y II, las aplicaciones para dispositivos móviles siguen teniendo prevista su adopción en el ámbito universitario en la actualidad, mientras que el aprendizaje basado en juegos sigue previsto en dos o tres años, por el desafío que aún existe para integrar los juegos en el contenido educativo tradicional. Sin embargo, las analíticas de aprendizaje han pasado de estar situadas en un plazo de adopción de cuatro a cinco años en la edición 2011 del informe a estar previsto su impacto en dos o tres años en el 2012. Esto se debe en gran parte a la puesta en marcha de iniciativas destinadas a

mejorarlas y a superar sus aspectos científicos y técnicos. Por su parte, las interfases gestuales permanecen invariablemente situadas en un plazo de adopción mayor, quizá debido a que, mientras esta tecnología genera una gran sensación entre los consumidores, no se han llevado a cabo estudios pormenorizados de su aplicación en entornos específicos de aprendizaje [11].

Puede verse también, que la realidad aumentada, prevista en 2011 como ya adoptada hacia 2013 (ver Tabla I), no aparece en los informes posteriores.

El reporte 2013 anticipa tecnologías emergentes no consideradas en los informes anteriores, como es el caso de los cursos abiertos masivos en línea (MOOC), los que han evidenciado un rápido crecimiento de la matrícula, y otras, como la impresión 3D, con un horizonte de adopción más

lejano.

En la Figura 1 se reproduce el ciclo de las tecnologías emergentes de Gartner [12]. En la misma puede verse que las previsiones a mediados del año 2011 ya mostraban a los libros electrónicos ubicados en la curva de la desilusión, al no haber satisfecho las expectativas puestas en ellos, mientras que se sitúan en el pico de expectativas “infladas” a la impresión 3D, la gamificación, la realidad aumentada y las tabletas. Puede verse también que se han incluido otras muchas tecnologías emergentes, cuyo desarrollo y aplicaciones en un futuro muy próximo en la educación general y superior podrían ser promisorias. Bastará esperar sólo unos meses o años para verlo.

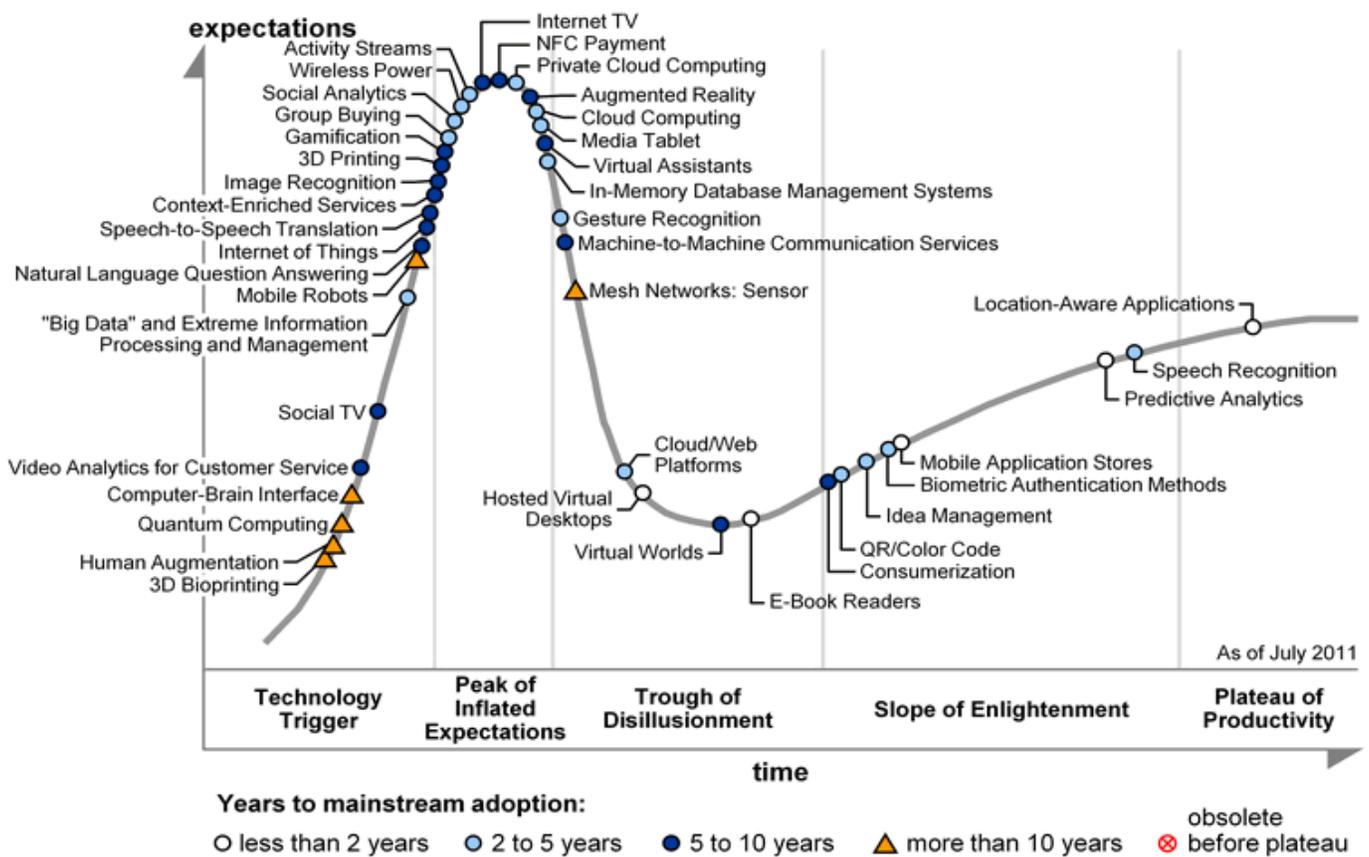


FIGURA 1. Expectativas generadas por tecnologías emergentes de acuerdo a Gartner [12].

Contrariamente a los resultados de los estudios prospectivos mostrados en los Horizon Report, no hay evidencia que sugiera que en los centros universitarios esté siendo empleado un gran espectro de tecnologías para apoyar la enseñanza y el aprendizaje [13], en cambio, un pequeño grupo de tecnologías está siendo usado por los estudiantes para un amplio conjunto de tareas. Son ellos quienes seleccionan tecnologías y las usan fuera de las aulas, dependiendo cada vez menos de sus centros educativos para apoyar sus aprendizajes.

**A. Tecnologías emergentes con mayor impacto en educación superior**

Se describen a continuación, algunas de las tecnologías emergentes que mayor impacto han tenido o se espera que tengan en la educación superior en esta década.

**A.1 M-learning**

Concari, Sonia Beatriz

Se denomina aprendizaje electrónico móvil (*mobile learning* o *m-learning*) a un modelo tecnológico donde el uso de pequeños dispositivos móviles con alguna forma de conectividad inalámbrica (teléfonos móviles, tabletas, Pocket-PC o Palm, iPod) está fundamentado por un diseño educativo previo.

El aprendizaje es móvil en términos de espacio (en el lugar de trabajo, en casa y en los lugares de ocio); es móvil en distintas áreas de la vida, es decir, puede estar relacionado con requisitos del trabajo, la auto mejora o el ocio; y es móvil en cuanto al tiempo, pues ocurre en distintos momentos a lo largo del día, en días laborables o el fin de semana [14].

Los dispositivos móviles pueden recoger datos reales o simulados, *in situ* respecto al entorno tanto en tiempo y espacio, actuar ante ellos, mientras la conectividad permite crear redes compartidas entre teléfonos y otros dispositivos.

Mediante los dispositivos móviles, el intercambio de datos y la colaboración con otros alumnos puede hacerse cara a cara, respondiendo a la necesidad innata antropológica de este tipo de comunicación.

El diseño didáctico deberá definir claramente el por qué, el para qué y el cómo se va a utilizar este tipo de tecnología inalámbrica, la cual, si bien va siendo progresivamente incorporada a la educación, no ha sido aún adoptada en nuestro medio.

Se han empleado exitosamente dispositivos móviles en actividades de aprendizaje sobre confección y comprensión de gráficas, una tarea compleja para los estudiantes de matemática y física [15].

Como afirman Castells et al., [16], la más rápida aceptación y mayor capacidad de los jóvenes para adoptar, adaptar, usar e innovar con las nuevas tecnologías y para usarlas mejor, más a menudo y más velozmente, ponen de manifiesto de forma más rápida sus usos potenciales. Cabe a nuestra generación de docentes, aprovechar dicho usos en la educación.

## A.2 Realidad aumentada

La realidad aumentada (RA) es una tecnología particular que permite agregar imágenes e información generada por computadora a la realidad normal percibida.

La información agregada (imágenes, texto y objetos virtuales) se produce en visores especiales, otorgando información adicional al entorno real. A través de esta tecnología, es posible visualizar información, la mejora, amplía y agrega información. Dicha información se despliega en diferentes formatos en un mismo espacio, en tiempo real, y es esencialmente visual y provocativa.

El proceso de construcción de la RA parte de una imagen real de aquello que se desea enriquecer con información adicional a la percibida visualmente (una escena callejera, una persona, un aparato); se captura esa imagen con un dispositivo que tenga cámara, pantalla y conexión a Internet, ya sea un móvil, una webcam u otro (los servicios de geolocalización exigen además que el hardware incluya GPS, brújula y acelerómetro).

Una vez capturada la imagen, mediante un software, o

accediendo o un servicio informático específico, se obtienen los datos reales y se presentan las capas de información superpuestas a la imagen original.

El resultado final es una imagen de la realidad, en el dispositivo, enriquecida con una serie de capas de datos digitales que amplían nuestro conocimiento sobre lo que estamos viendo.

La posibilidad que la RA ofrece, combinada con la tecnología móvil, de ampliar la información disponible para los estudiantes al realizar trabajos de campo, experiencias y visitas a lugares de interés científico (museos, muestras) la constituye en una herramienta portátil para el aprendizaje basado en el descubrimiento potencialmente útil.

Imágenes tridimensionales interactivas de RA sobre energías renovables con tecnología Smart Grid pueden verse en: [http://ge.ecomagination.com/smartgrid/#/augmented\\_reality](http://ge.ecomagination.com/smartgrid/#/augmented_reality).

## A.3 Códigos QR

Es posible adicionar información en los textos de apoyo didáctico, a través del empleo de códigos QR (Quick Response Barcode). Un QR es una matriz de puntos o un código de barras bidimensional útil para almacenar información. La información que contiene el código puede ser una dirección Web, un número, o un breve texto.

Se puede generar un código QR utilizando programas de uso libre (QRStuff, u otros) y una vez generado, el código QR puede ser bajado y colocado en documentos.

Para visualizar el contenido de un código QR se debe utilizar un lector específico, muchos ya incorporados en los dispositivos móviles (Google Goggles, QR Droids, Scan).

En la Figura 2 se reproduce un código QR que remite a una página web.



FIGURA 2. Código QR vinculado a la página de la Facultad Regional Rosario de la Universidad Tecnológica Nacional.

## A.4 Juegos serios

El juego serio (*serious game*) es un juego digital diseñado para un propósito específico, más que para la pura diversión. El adjetivo "serio" pretende referirse a productos utilizados por la defensa, la educación, la exploración científica, la defensa civil, etc.

A través de juegos en situaciones simuladas, es posible plantear actividades de aprendizaje más orientadas a la

educación primaria y secundaria. Al respecto, puede mencionarse el juego de simulación-interpretación en torno al cambio climático desarrollado por el equipo de Jesús de la Osa Tomás [17].

### A.5 Interfaces gestuales

Son herramientas para controlar un ordenador utilizando sólo el movimiento de nuestros cuerpos, principalmente la mano, sin el empleo de guantes u otro aditamento. Aunque presentan un interés importante para la industria de los videojuegos, en el ámbito educativo aún no se ha avanzado mucho.

### A.6 Analíticas de aprendizaje

Las denominadas herramientas analíticas de aprendizaje (*learning analytics*) refieren a la interpretación de un amplio rango de datos producidos y recogidos sobre los estudiantes, para orientar a docentes y gestores de la educación, sobre su progresión académica, para predecir actuaciones futuras e identificar elementos problemáticos.

De acuerdo con Ángel Hidalgo [18], “Es cierto que las tecnologías emergentes tendrán un impacto en la educación, pero siempre si las integramos con otros elementos: metodologías, conocimiento y personas. Cada elemento es un pilar que sustenta una plataforma donde se puede implantar la innovación educativa, la mejora de los procesos formativos, el avance hacia los paradigmas de aprendizaje, la personalización, la cooperación y la participación activa del alumnado en el propio proceso de aprendizaje.”

A continuación, se presentan resultados de investigaciones sobre el desarrollo y empleo de tecnologías para la enseñanza de la física en la educación presencial y a distancia, que muestran que las mismas constituyen recursos valiosos para promover aprendizajes.

## B. Desarrollo de recursos tecnológicos y su evaluación en la educación en física

Se describen a continuación, tecnologías empleadas en la educación en física y se presentan estudios sobre simulaciones computacionales, infografías, videos y laboratorios remotos.

### B.1 Simulaciones computacionales

Las simulaciones computacionales son programas informáticos que contienen un modelo del comportamiento de un sistema, aparato u organismo, que permiten la exploración y la visualización gráfica del mismo en entornos virtuales. En la medida que el usuario puede manipular variables, algunos de ellos son además interactivos. Esta tecnología posibilita explorar temas cuya experimentación no es posible directamente, así como acceder a manipular equipos muy costosos a través de simuladores de ellos.

Las simulaciones son los recursos de base tecnológica más empleados en la educación en física. Se destacan los

*applets* (*application-let*), diseñados empleando Flash o Java, para poder ser incrustados en una página web y ser utilizados directamente desde la misma, y los programas instalables en el ordenador.

Ejemplos de ambos son los *applets* para la enseñanza del electromagnetismo y la óptica analizados por Giacosa *et al.* [19] (ver Figura 3), los programas desarrollados por el Grupo Galileo por Hugo Kofman *et al.* [20] (ver Figura 4) y la integración de ambos recursos en actividades de aprendizaje que incluyen experimentos en entorno real y resolución de problemas de lápiz y papel [21].

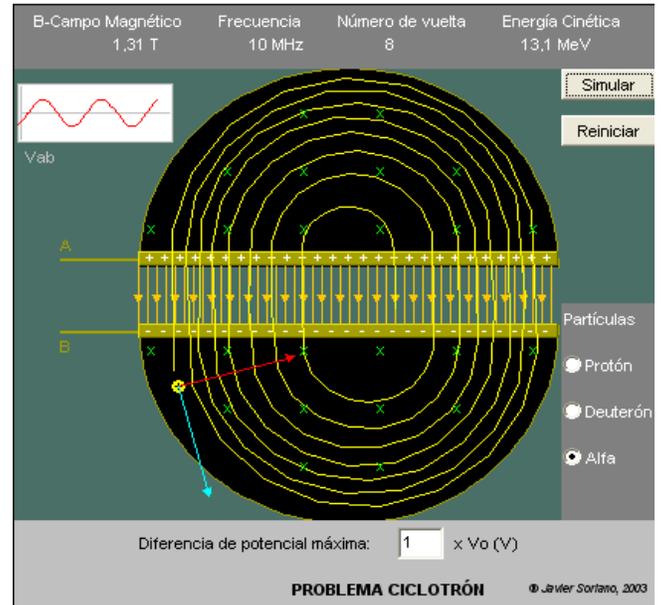


FIGURA 3. Applet de simulación de un ciclotrón (<http://cerezo.pntic.mec.es/~jgrima/aparatosmedida.htm>).

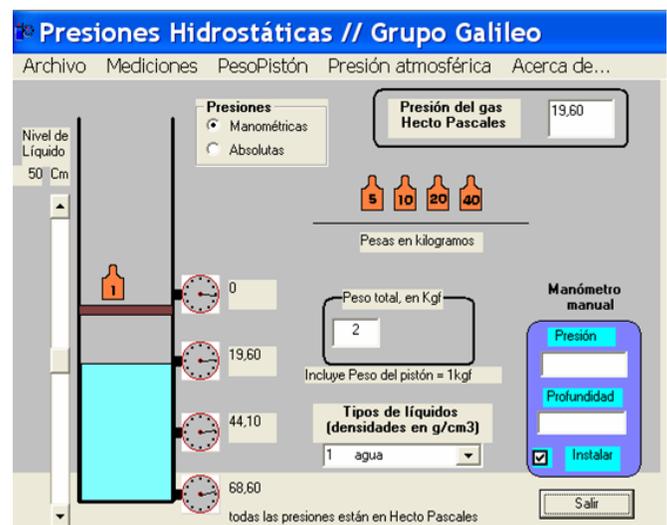


FIGURA 4. Programa de simulación de fluidos en reposo (<http://www.fiq.unl.edu.ar/galileo/software.htm>).

Concari, Sonia Beatriz

Las simulaciones computacionales, tanto en la enseñanza como en las aplicaciones prácticas de la ingeniería, son una herramienta valiosa con la cual se pueden validar/rechazar hipótesis de trabajo y tomar decisiones cuando prevalecen condiciones de incertidumbre.

## B.2 Infografías

La infografía es un esquema visual de diversos componentes: imágenes, gráficos y textos que presenta una síntesis de un tema complejo. A través de reducidos bloques de texto se resumen los aspectos esenciales del tema abordado y mediante abundantes ilustraciones se procura que la lectura sea atractiva, siendo la lectura de los

elementos no secuencial.

Con una infografía es posible transformar fenómenos complejos y dispositivos inaccesibles, entre otros, en "mensajes visibles", facilitando la comprensión de los mismos.

Se ha realizado experiencias educativas utilizando infografías como medio didáctico, en diversos ámbitos institucionales, con docentes y estudiantes de profesorado de la República Argentina, completando etapas de desarrollo, evaluación del recurso y uso didáctico del mismo [22].

En la Figura 5 se reproduce una infografía, de una serie destinada a la enseñanza de la física, cuya lectura puede iniciarse desde cualquier nodo de la misma.

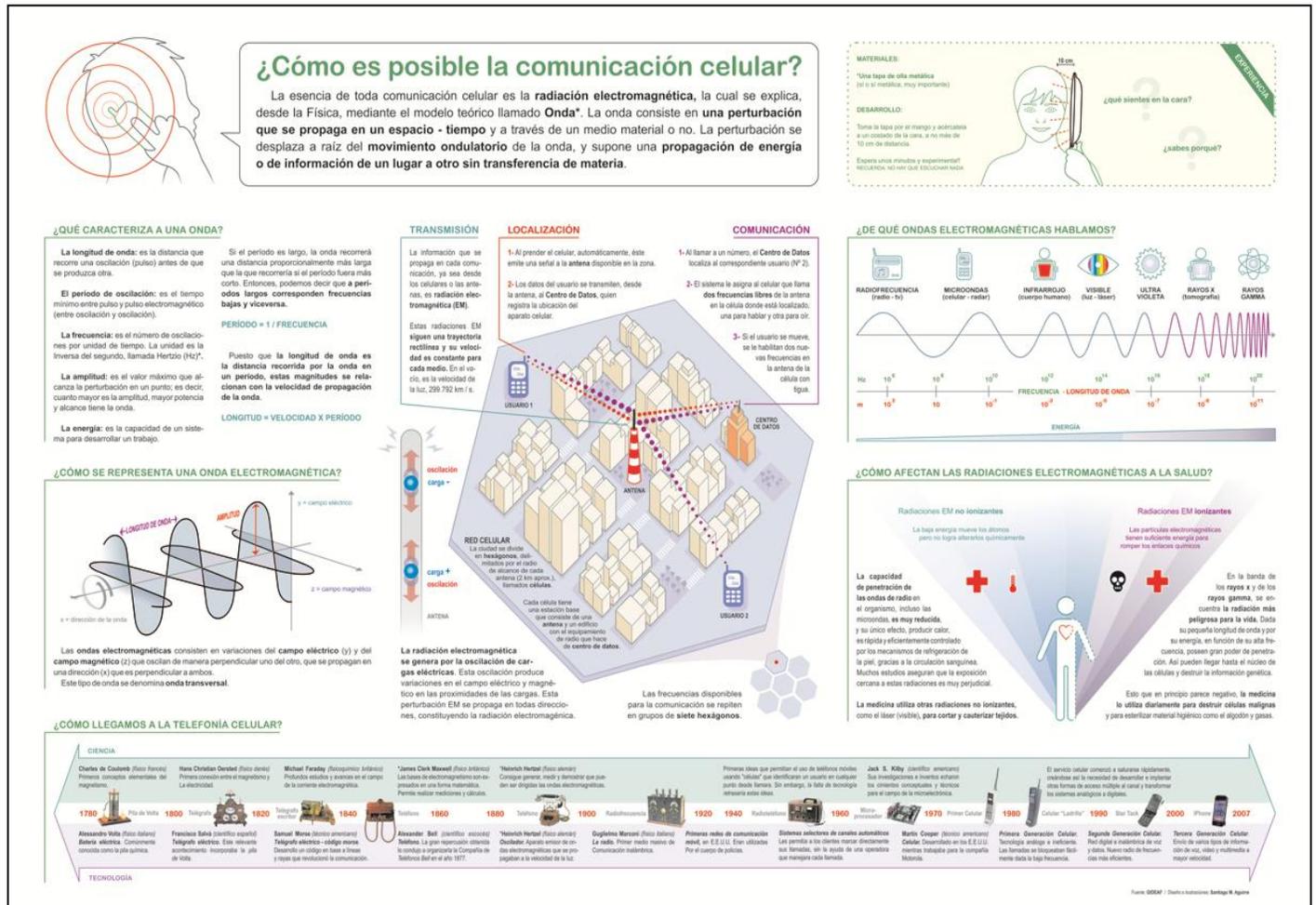


FIGURA 5: Infografía sobre la ondas electromagnéticas. Fuente: Aguirre y Concari [23].

## B. 3 Laboratorios remotos

Un laboratorio remoto (LR) es un conjunto de dispositivos físicos reales, situados en determinadas instituciones, dotados de un conjunto de instrumentos, sensores, motores, cámaras de video, etc., de manera que pueden ser *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 3, Sept. 2014*

manipulados a distancia a través de internet. Los LR posibilitan la experimentación sobre dispositivos reales sin necesidad de estar físicamente en un laboratorio. Futuretech [2] incluye a los sensores remotos como una de las diez tecnologías emergentes más prometedoras de 2013.

El número de LR ha tenido un importante crecimiento *http://www.lajpe.org*

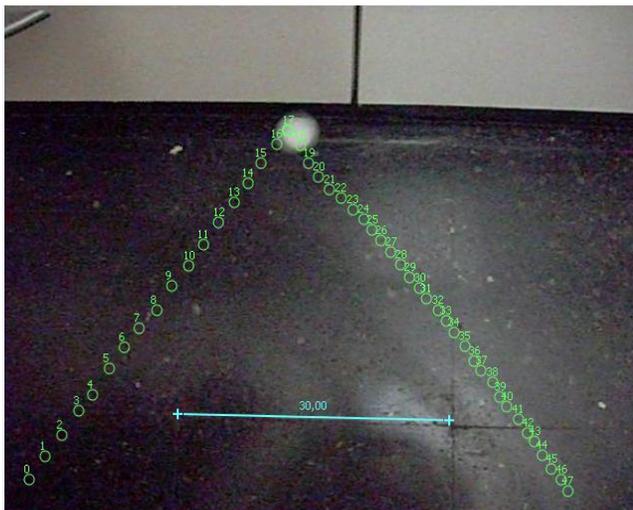
en los últimos años, como lo muestran Kofman y Concari, [24], en la Tabla 4, con mayor desarrollo en las áreas de física, electrónica y control. En la Figura 6 se muestra un experimento de mecánica desarrollado en el LR del Grupo Galileo (<http://www.fiq.unl.edu.ar/galileo/index.html>).

**TABLA IV.** Evolución de la cantidad de LR en el mundo [24].

Continente	2003	2007	2011
Europa	5	12	28
América	2	4	25
Oceanía (Australia)	-	1	8
Asia (Singapur)	-	1	1
Total	7	18	60



**FIGURA 6.** LR de mecánica observado en tiempo real [23].



**FIGURA 7.** Fotograma de una pelota de golf rodando sobre el piso procesada con un programa computacional [25].

## B.4 Videos y fotogramas

Cámaras digitales, videocámaras y teléfonos celulares pueden emplearse para registrar movimientos de diversos objetos y personas. Los videos se procesan posteriormente con programas computacionales de uso libre, y con ello se posibilita estudiar distintos sistemas dinámicos. El registro en video es especialmente adecuado para abordar fenómenos de corta duración, tales como choques, y movimientos reales a ser modelados, como se muestra en la Figura 7 [25].

## V. CONCLUSIONES

Empleando la analogía de Ángel Fidalgo Blanco [18], “mientras las tecnologías se comportan como una liebre, el mundo educativo se asemeja a una tortuga...” ¡Nunca alcanzaremos a las tecnologías! Pero, las tecnologías están aquí y podemos escoger y utilizar aquellas que nos son útiles para nuestros propósitos educativos.

La reflexión que se deriva de esta presentación es que ha habido en los últimos años un gran avance en el desarrollo de estos recursos, y su incorporación a la educación es cada vez más importante, aunque heterogéneo.

El gran desarrollo logrado ha estado estrechamente vinculado a los aspectos tecnológicos, pero resta aún avanzar en las cuestiones educativas: adoptar nuevos modelos educativos y encuadres pedagógicos, reformular estrategias de enseñanza, re-definiendo objetivos educativos, contenidos específicos, metodologías y tareas, con énfasis en el aprendizaje colaborativo, proactivo y basado en desafíos.

Hay que considerar nuevos modos de aprendizaje combinado, integrando el aprendizaje formal y el informal, ampliando los ambientes de aprendizaje más allá del aula y planteando experiencias de aprendizaje híbrido.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el marco de los proyectos: “Estrategias didácticas con integración de TIC para la enseñanza de la física en carreras de ingeniería” (UTN-25/MI01), “Desarrollo de estrategias con integración de nuevos recursos didácticos para la educación en física y capacitación docente para su uso y autogestión” (SECTEI-2010-111-11) y “Resolución de Problemas de Física vinculados a la práctica profesional de la Ingeniería” (UTN-25/M064).

## REFERENCIAS

- [1] Castells, M., *The Internet and Society*. Conferencia presentada en la University of Southern California. (2008). <http://www.youtube.com/watch?v=qrOABiFud0g>. Consultado el 14 de noviembre de 2012.
- [2] Futuretech, *Las diez tecnologías emergentes más* <http://www.lajpe.org>

*prometedoras de 2013*. <http://blogs.lainformacion.com/futuretech/2013/02/25/las-diez-tecnologias-emergentes-mas-prometedoras-de-2013/>. Consultado el 15 de mayo de 2013.

[3] Johnson, L., Smith, R., Willis, H., Levine, A. and Haywood, K., *The 2011 Horizon Report*. Austin, Texas: The New Media Consortium, <http://net.educause.edu/ir/library/pdf/hr2011.pdf>, consultado el 22 de octubre de 2012.

[4] Pozos Pérez, K. V., *Tecnologías emergentes, competencias digitales relevantes para el profesorado universitario en la sociedad del conocimiento*. Jornadas Universitarias de Tecnología Educativa JUTE11. Sevilla, España, <http://www.academia.edu/2041230>.

*/TECNOLOGIAS\_EMERGENTES\_COMPETENCIAS\_DIGITALES\_RELEVANTES\_PARA\_EL\_PROFESORADO\_UNIVERSITARIO\_EN\_LA\_SOCIEDAD\_DEL\_CONOCIMIENTO*, Consultado el 14 de noviembre de 2012.

[5] Marchisio, S., Plano, M., Ronco, J., Von Pamel, O., *Experiencia con uso de simulaciones en la enseñanza de la física de los dispositivos electrónicos*, Cognición, Año 1, 2, Enero 2005, [http://www.cognicion.net/index.php?option=com\\_phocadownload&view=category&download=2:revis](http://www.cognicion.net/index.php?option=com_phocadownload&view=category&download=2:revis), Consultado el 14 de mayo de 2013.

[6] Marchisio, S., *Tecnología, educación y nuevos "ambientes de aprendizajes"*. Una revisión del campo y derivaciones para la capacitación docente, *RUEDA* 5, 10-19 (2003).

[7] Litwin, E., *Prácticas con tecnologías*, Revista Praxis Educativa. Año 8, 8, 10-17 (2004).

[8] Johnson, L., Adams, S. and Cummins, M., *The NMC Horizon Report: 2012 Higher Education*, Edition. Austin, Texas: The New Media Consortium. (2012). <http://net.educause.edu/ir/library/pdf/hr2012.pdf>, consultado el 15 de mayo de 2013.

[9] Johnson, L., Adams Becker, S., Cummins, M., Estrada, V., Freeman, A. and Ludgate, H. *NMC Horizon Report: 2013 Higher Education Edition*. Austin, Texas: The New Media Consortium. (2013). consultado el 15 de mayo de 2013. <http://net.educause.edu/ir/library/pdf/hr2013.pdf>.

[10] INTEF. *Resumen Informe Horizon 2013*. Enseñanza Universitaria. Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF). Departamento de Proyectos Europeos. Mayo 2013. (2013).

[http://educalab.es/blogs/intef/wp-content/uploads/sites/4/2013/05/Informe\\_Horizon\\_2013\\_Universidad\\_INTEF\\_mayo\\_2013.pdf](http://educalab.es/blogs/intef/wp-content/uploads/sites/4/2013/05/Informe_Horizon_2013_Universidad_INTEF_mayo_2013.pdf). Consultado el 15 de mayo de 2013.

[11] INTEF. *Resumen Informe Horizon 2012*. Enseñanza Universitaria. Inst. Nac. de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF). Departamento de Proyectos Europeos. Marzo 2012. (2012), [http://recursostic.educacion.es/blogs/europa/media/blogs/europa/informes/Informe\\_Horizon\\_INTEF\\_Primeria\\_y\\_Secundaria\\_junio\\_2012.pdf](http://recursostic.educacion.es/blogs/europa/media/blogs/europa/informes/Informe_Horizon_INTEF_Primeria_y_Secundaria_junio_2012.pdf). Consultado el 15 de mayo de 2013.

[12] Gartner's *Hype Cycle for Emerging Technologies, 2012*. [www.gartner.com/hypecycles](http://www.gartner.com/hypecycles). Consultado el 12 de diciembre de 2012.

[13] Flavin, M., *Disruptive technologies in higher education. Research*, In: Learning Technology Supplement: ALT-C 2012 Conference Proceedings. (2012),

<http://www.researchinlearningtechnology.net/index.php/rlt/article/view/19184/html>. Consultado el 21 de enero de 2013.

[14] Ibáñez Etxeberria, A., Correa Gorospe, J. M., Asensio Brouard, M., *Mobile Learning: Aprendiendo historia con mi teléfono, mi GPS y mi PDA*. (2008). <http://www.uam.es/proyectosinv/idlla/docs/01-04.pdf>. Consultado el 20 de marzo de 2010.

[15] Hennessy, S., *The potential of portable technologies for supporting graphing investigations*, British Journal of Educational Technology 30, 57-60 (1999). [http://www.educ.cam.ac.uk/people/staff/hennessy/BJET\\_Lit\\_review.pdf](http://www.educ.cam.ac.uk/people/staff/hennessy/BJET_Lit_review.pdf).

[16] Castells, M., Fernández-Ardèvol, M., Linchuan Qiu, J., Sey, A., *Comunicación móvil y sociedad, una perspectiva global*. Ariel-Fundación Telefónica. (2007). [www.eumed.net/libros/2007c/312/](http://www.eumed.net/libros/2007c/312/). Consultado el 20 de marzo de 2010.

[17] De la Osa Tomás, J., Benedí Gracia, I., Eito Alardeen, P., Bourrut Lacouture, H., *Un juego de simulación-interpretación en torno al cambio climático*. III Jornadas de Educación Ambiental de la Comunidad Autónoma de Aragón. 24-26 de Marzo de 2006. Ciama, La Alfranca, Zaragoza. (2006). <http://www.uv.es/acuveg/material/7%20a%20Juego%20simulacion%20camb%20climat.pdf>. Consultado el 20 de marzo de 2010.

[18] Fidalgo Blanco, Á., *Las tecnologías emergentes un reto para el mundo educativo*. Conferencia de clausura. XVII Congr Int de Tecnologías para la Educación y el Conocimiento: Tecnologías Emergentes, Madrid, 3-5 Julio de 2012. <http://www.youtube.com/watch?v=QIQOPf2wsyc>, consultado el 15 de agosto de 2012.

[19] Giacosa, N., Giorgi, S., Concari, S., *Applets en la enseñanza del electromagnetismo y la óptica*. 3º Congreso Argentino de Ingeniería Industrial (COINI). Oberá, Misiones, 28 al 29 de octubre de 2009. [http://www.coini.com.ar/COINI%202009/contenidos/APPL\\_ETS\\_E...pdf](http://www.coini.com.ar/COINI%202009/contenidos/APPL_ETS_E...pdf). Consultado el 15 de agosto de 2012.

[20] Kofman, H. A., Concari, S., Cámara, C., *Software de simulación integrado a experimentos de laboratorio sobre fluidos*, *Revista de Enseñanza y Tecnología* 23, Mayo-Agosto 2002.

[21] Concari, S., Giorgi, S., Cámara, C. y Giacosa, N., *Didactic strategies using simulations for Physics teaching*. In: Current Developments in Technology-Assisted Education, Vol. III, (E-Learning Standards, España, 2006), pp. 2042-2046.

[22] Concari, S., Pérez Sottile, R., *Cámara digital y teléfono celular como recursos para el estudio cinemático de cuerpos en movimiento*. XVII Congreso Internacional Tecnologías para la Educación y el Conocimiento Tecnologías Emergentes, Madrid, 3 al 5 de Julio (2012).

[23] Aguirre, S.; Concari, S., *Infografías para la enseñanza de la física en la escuela media*. In: Communication, Arts, Science and Technology allied to build the society of knowledge. Proceedings of World Congress on Communication and Arts, San Pablo, Brasil, 18-21 noviembre 2007. Claudio da Rocha Brito & Melany M. Ciampi (Eds.), 251-255 (2007).

[24] Kofman, H. A., Concari, S. B., *Using remote labs for*

*Physics teaching*. In: Using Remote Labs in Education. J. García Zúbia and G. Alves (Eds.), University of Deusto Publications, 293-308 (2011). [http://www.weblab.deusto.es/web/weblab.content/using\\_remote\\_labs\\_in\\_education.pdf](http://www.weblab.deusto.es/web/weblab.content/using_remote_labs_in_education.pdf). Consultado el 15 de agosto de 2012.

*Tecnologías emergentes ¿cuáles usamos?*

[25] Concari, S., Pérez Sottile, R., *Cámara digital y teléfono celular como recursos para el estudio cinemático de cuerpos en movimiento*. XVII Congreso Internacional Tecnologías para la Educación y el Conocimiento Tecnologías Emergentes, Madrid, 3 al 5 de Julio (2012)

# Crenças de autoeficácia e a escolha da carreira de professor de Física



**Bruno dos Santos Simões<sup>1</sup>, José Francisco Custódio<sup>2</sup>, Mikael Frank Rezende Junior<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.*

<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.*

<sup>3</sup>*Instituto de Física e Química, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, Brasil.*

**E-mail:** simoes89@uol.com.br

(Recibido el 24 de Enero de 2014; aceptado el 27 de Agosto de 2014)

## Resumo

Neste trabalho buscamos identificar a importância das crenças de autoeficácia no processo de escolha da carreira de professor de física. Para tanto, investigamos vinte e seis licenciandos dos dois anos iniciais de graduação em duas universidades públicas brasileiras. Na análise das entrevistas buscamos elementos relativos às crenças de autoeficácia dos acadêmicos objetivando identificar excertos das falas que pudessem indicar a influência dessas crenças em suas escolhas profissionais. Concluímos que as crenças de autoeficácia foram relevantes no processo de escolha dos licenciandos e que se mostraram importantes também no surgimento do interesse pela carreira de professor de física.

**Palabras clave:** crenças de autoeficácia, professor de física, escolha da carreira.

## Abstract

This research we identify the importance of self-efficacy beliefs in the process of choosing a career teacher of physics. We therefore investigated twenty-six undergraduate of first two years of the degree in two brazilian public universities. In the analysis of the interviews sought information concerning the self-efficacy beliefs of academics aiming to identify grafts in their speech that could indicate the influence of these beliefs in their career choices. We conclude that self-efficacy beliefs were relevant in the choice of undergraduates and shown to be important also in the emergence of interest in physics teaching career.

**Keywords:** self-efficacy beliefs, physics professor, career choice.

**PACS:** 01.40.Fk, 01.85. +F, 01.90.+g

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUÇÃO

Um problema que a educação básica brasileira tem enfrentado e que tem sido, nos últimos anos, amplamente debatido pela comunidade de pesquisadores em ensino de física e ciências é a falta de professores de física [1]. Tal problemática está envolta em diversos contextos e cenários, e tem demandado frentes de trabalho de distintas naturezas, em particular, a investigação de aspectos de ordem afetiva/motivacional e como estes podem esclarecer possíveis motivos para a escolha pela carreira de professor de física [2, 3, 4, 5].

Nesse sentido, consideramos que explicar os elementos centrais da escolha da carreira de professor de Física abarca diferentes olhares e perspectivas teóricas. A literatura sobre comportamento vocacional e desenvolvimento profissional, em particular, tem abordado a questão da escolha da carreira segundo diversos conceitos, como motivação e interesse [6], atribuições de causalidade [7, 8, 9], perfis individuais de escolha de carreira [10] e autoeficácia [11]. Embora diversos pesquisadores venham buscando compreender os fatores por detrás das expectativas dos

alunos com relação à escolha de carreiras científicas ou relacionadas à ciência [12, 13], na educação científica o papel das crenças de autoeficácia no processo de escolha da carreira tem sido pouco investigado. Todavia, os poucos esforços realizados aparecem na literatura como evidência confiável do papel dessas crenças como potenciais orientadoras no processo de escolha [14].

Entendemos crenças como um dos componentes do conhecimento subjetivo implícito do indivíduo sobre fatos, pessoas, sobre si, disciplinas escolares, instituições etc. Tal conhecimento está baseado em experiências *a priori* vivenciadas pelos indivíduos [15], bem como é influenciado pelo contexto social em que este se insere [16]. Assim, certas crenças influenciam fortemente o interesse das pessoas por determinado objeto ou atividade e, se a esses objetos ou atividades são atribuídas experiências emocionais positivas e de interesse, a busca e a valorização destes torna-se natural.

Neste trabalho analisamos a influência e a importância das crenças de autoeficácia de licenciandos na escolha da carreira de professor de física. Para isso, entrevistamos alunos dos dois anos iniciais do curso de licenciatura em

física de duas instituições públicas de ensino superior no Brasil: a Universidade Federal de Santa Catarina (SC) e a Universidade Federal de Itajubá (MG).

## II. O CONCEITO DE AUTOEFICÁCIA

Em 1941, Miller e Dollard propuseram uma teoria de aprendizagem social e de imitação que rejeitou noções comportamentalistas de associativismo. Era uma teoria da aprendizagem que, no entanto, não levou em consideração a criação de respostas de novos processos de imitações retardada e não reforçadas. Em 1963, Bandura e Walters publicaram “*Social Learning and Personality Development*” ampliando as fronteiras da teoria da aprendizagem social com os princípios da aprendizagem por observação e reforço vicário, e adicionalmente, na década de 1970, Bandura formalizou a falta de um elemento nas teorias de aprendizagem predominantes na época, a motivação, o que o levou a ampliar sua teoria da aprendizagem social [17].

O conceito de autoeficácia foi definido por Albert Bandura por volta de 1977 em seu livro “*Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change*”, no qual o autor identificou que o fator autoconfiança era fundamental na construção de uma teoria social de aprendizagem. Bandura definiu autoeficácia como as crenças de alguém sobre sua capacidade de executar uma tarefa ou conjunto de tarefas com certo grau de performance [17, 18, 19, 20]. Por exemplo, quando um estudante diz: “sou capaz de resolver competentemente exercícios de física ou química”.

No que concerne às fontes das crenças, Bandura [21] delimita quatro principais fontes das crenças de autoeficácia: as **experiências pessoais**, as **experiências vicárias**, a **persuasão verbal** e a **excitação emocional**.

As experiências pessoais vividas pelos indivíduos são importantes, pois o sucesso em determinada tarefa aumenta o senso de eficácia sobre esta, do mesmo modo que o fracasso faz o senso de eficácia diminuir. As experiências vicárias ou sociais são aquelas em que o sujeito compara suas capacidades com as de outras pessoas; essa se apresenta como uma fonte menos confiável de eficácia, pois não partem de experiências pessoais e podem facilmente se modificar. A persuasão verbal ocorre por meio da intervenção e motivação de terceiros; são frágeis uma vez que não partem de experiências presenciadas. A excitação emocional está relacionada às reações emocionais dos sujeitos frente a uma situação; a alta excitação geralmente debilita o desempenho, já que os indivíduos são mais propensos a esperar o sucesso quando não estão sob situações de estresse elevado [21]. Por exemplo, quando um jogador de futebol, que geralmente se sente eficaz em desempenhar sua função, mas em um jogo decisivo fica sob pressão e suas crenças sobre sua capacidade são postas em cheque.

As crenças de autoeficácia fornecem, assim, a base para a motivação humana, o bem-estar e a realização pessoal; uma vez que, se as pessoas não acreditam que suas ações

podem produzir os resultados que anseiam, terão pouco incentivo para agir ou para perseverar estando em dificuldade. Bandura [18] afirma que, no que diz respeito ao papel da autoeficácia no funcionamento humano, nível de motivação, estados afetivos e ações são baseados mais no que os indivíduos acreditam do que naquilo que é de fato verdadeiro. Por essa razão, Pajares [17] argumenta que a forma com que as pessoas se comportam muitas vezes pode ser melhor predita pelas crenças que possuem sobre suas capacidades do que pelo que realmente são capazes de realizar. Essas percepções de autoeficácia ajudam a determinar o que os indivíduos fazem com o conhecimento e as habilidades que possuem, e nesse sentido, o senso de eficácia aumenta a realização humana e bem-estar pessoal de muitas maneiras.

Pessoas com alta autoeficácia em suas capacidades aproximam-se de determinadas tarefas como desafios a serem superados e não como ameaças a serem evitadas. Tal perspectiva fomenta um interesse intrínseco nas atividades. Em contraste, pessoas que duvidam das suas capacidades ou que apresentam baixa autoeficácia, privam-se de tarefas difíceis, pois as percebem como ameaças pessoais [19].

Relativamente ao desenvolvimento, Bandura [19] afirma que o senso de autoeficácia começa a ser desenvolvido pelos sujeitos ainda quando crianças e as primeiras crenças de autoeficácia surgem no contexto escolar mediante a avaliação de atividades específicas por parte dos professores ou dos colegas. Com o passar do tempo e com o desenvolvimento cognitivo, “*os julgamentos de eficácia parecem ocorrer mais em razão de resultados imediatos e aparentes do que em virtude de uma análise sistemática de resultados anteriores*” (p. 95, [22]), em que tais crenças produzem diversos efeitos por meio de quatro processos principais: cognitivo, motivacional, afetivo e processos de seleção [19].

Os processos cognitivos dizem respeito à avaliação situacional que os indivíduos fazem. Em atividades nas quais sua autoeficácia é elevada, a probabilidade de engajamento pessoal é maior em relação a atividades nas quais a autoeficácia é baixa. Os processos motivacionais estão relacionados à mobilização dos sujeitos para desempenhar atividades nas quais se julgam capazes de executar com êxito. Nesse sentido, o cognitivo mostra-se importante, pois, ao antecipar possíveis resultados de sucesso ou fracasso, as pessoas destinam-se a realizar ou não determinadas tarefas [19].

Os processos afetivos se relacionam com os sentimentos dos sujeitos mediante determinada tarefa, na qual as crenças sobre uma atividade podem gerar sentimentos de ansiedade e repúdio (autoeficácia baixa) ou de alegria e interesse (autoeficácia alta). Os processos de seleção, por sua vez, estão ligados a aspectos de escolhas das pessoas.

Outro ponto apontado por Bandura é a relação entre autoeficácia e o interesse em determinadas atividades. Bandura [19] afirma que é natural a opção por atividades em que o senso de eficácia é elevado. Dessa forma, as crenças de autoeficácia relacionadas a processos motivacionais podem influenciar as escolhas de carreira, visto que, quanto maior o nível de autoeficácia percebida,

mais os sujeitos tendem a desenvolver maior engajamento por determinados campos de atuação.

Em áreas como a psicologia profissional, o conceito de autoeficácia permeou discussões nos anos de 1980 e os trabalhos decorrentes dessa linha relacionam o desenvolvimento profissional com o interesse em geral e, mais especificamente, com o interesse vocacional [23]. Em geral, os estudos que relacionam autoeficácia e interesse vocacional se dividem basicamente em duas perspectivas. Uma que desenvolve inventários para medir a autoeficácia [24, 25, 26] e outra que prioriza aspectos teóricos sobre essa relação [23, 27]. Nas pesquisas educacionais, por sua vez, é cada vez mais presente o conceito de autoeficácia [6, 20, 23]. Nesse campo, pesquisas com essa abordagem dão ênfase a diversos aspectos, como: autoeficácia e motivação para aprender e senso de autoeficácia, dentre outros [20].

Neste estudo optamos por focar a relação entre autoeficácia e escolha da carreira, principalmente em relação ao desenvolvimento de interesse pela carreira de professor de física e, mais especificamente, em questões que ligam uma autoeficácia elevada ao desenvolvimento de interesses duradouros, pois entendemos que esses se complementam, já que uma autoeficácia elevada aumenta o interesse e o desempenho em tarefas [6, 23, 25].

Em relação a esse ponto, Lent, Brouwn e Hackett [27] afirmam que os indivíduos criam um interesse duradouro em tarefas nas quais se percebem como eficazes e podem antecipar resultados positivos. Tracey [26] comenta que, aumentando a autoeficácia, pode-se aumentar o interesse do indivíduo. Para Azzy e Polydoro [20] a autoeficácia influencia nas escolhas dos indivíduos e no tempo que estes dispõem para certas atividades. Por exemplo, um estudante que possui autoeficácia elevada em relação à disciplina física tende a desenvolver interesse maior por essa área e dedicar mais tempo em atividades a ela vinculadas. De maneira geral, a autoeficácia não julga o número de habilidades que se tem, mas o que se faz com elas [18].

Contudo, encarar a autoeficácia como algo intuitivo é um equívoco, como afirma Silvia [6], pois uma pessoa pode executar tarefas como, por exemplo, palestrar por horas, e ainda assim, pode não se sentir eficaz nessa atividade. Nessa perspectiva, o interesse não é simplesmente gostar ou valorizar algo, mas uma predisposição para realizar algo, por exemplo, pedalar vários quilômetros para ir ao trabalho, mesmo podendo usar outro tipo de transporte.

Outro olhar que podemos lançar sobre essa questão diz respeito à realização de tarefas. Segundo Bandura [18], as tarefas muito difíceis ou fáceis em demasia diminuem o interesse das pessoas por elas. Bandura sugere que as dificuldades sejam moderadas, o que faz aumentar a autoconfiança do indivíduo para resolver essas situações e, por consequência, aumenta sua autoeficácia. Ainda nessa perspectiva, Silvia [6] argumenta que atividades com dificuldade moderada proporcionavam um maior interesse aos indivíduos e mostrou que, além de o interesse ser maior, geralmente o desempenho em atividades moderadas também é maior.

#### *O papel da autoeficácia na escolha da carreira de professor de física*

A partir dessas ponderações é razoável aceitar que as pessoas desenvolvem interesses duradouros em atividades nas quais sua autoeficácia é alta, e que a autoeficácia interfere no interesse dos sujeitos, afetando também suas escolhas e expectativas de resultados futuros [6, 23]. Uma inferência que fazemos aqui é que, a partir de um interesse pré-existente, fruto de alguma atividade vivenciada na escola ou fora dela, pela ciência ou disciplina de física, estudantes podem optar por seguirem seus estudos nessa área, pois uma autoeficácia elevada em relação à física faz aumentar o interesse duradouro, estável, por ela.

Nessa linha, Restubog *et al.* [28] trazem também à tona uma discussão acerca da autoeficácia, envolvendo a escolha de carreira e permanência no curso de graduação de estudantes estadunidenses e canadenses. Os autores chamam a atenção ao fato que, dentre todos os fatores envolvidos em uma escolha de carreira (crer que pode desempenhar bem aquela atividade, gostar de determinada área, ter tido alguma experiência positiva, com aquela atividade, entre outros), é a autoeficácia que faz a ponte entre os motivos da escolha e a carreira em si.



**FIGURA 1.** Relação entre motivos para a escolha da carreira e a autoeficácia.

Tracey [29] investigou os interesses e as percepções de alunos do ensino fundamental. Sua principal conclusão é que o efeito da autoeficácia sobre o interesse e do interesse sobre a autoeficácia é recíproco, ou seja, não é possível dissociá-los. Entretanto, Silvia [6] afirma que ainda faltam informações para confirmar essa reciprocidade entre interesse e autoeficácia, além do mais, o tempo em que ocorre essa relação mútua ainda não está claro.

Com base na ideia que a autoeficácia está diretamente ligada ao desenvolvimento de interesses duradouros e atitudes positivas, realizamos um estudo exploratório, com abordagem qualitativa, sobre as relações entre autoeficácia e a escolha da carreira de professor de física de acadêmicos do Curso de Licenciatura em física. A pesquisa foi orientada pelas seguintes questões:

- (1) Qual a influência da autoeficácia em relação às atividades na disciplina de física no Ensino Médio na decisão de seguir a carreira de professor de física?
- (2) Qual a influência da autoeficácia em relação à docência na decisão de seguir a carreira de professor de física?

### III. METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada com 26 acadêmicos de dois cursos de Licenciatura em física da modalidade presencial, 15 da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e 11 da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). Os acadêmicos foram selecionados de acordo com a disponibilidade em participar da pesquisa, com a condição de serem dos quatro primeiros semestres dos cursos. As entrevistas foram realizadas nas dependências das universidades, em um local próximo às suas respectivas salas de aula, para que os acadêmicos se sentissem em um ambiente próximo ao seu cotidiano.

Sob sua caracterização metodológica, esta investigação assemelha-se ao que Yin [30] define como estudo de casos múltiplos, porém, não caracterizamos esta investigação como tal, pois diferentemente da classificação de Yin, não nos atemos às possíveis replicações, teórica e literal, que poderiam surgir no decorrer da pesquisa. Assim, nos aproximamos de estudos como o de Raved e Assaraf (2011), pois trabalhamos com vários casos de maneira simultânea e em locais diferentes (UFSC e UNIFEI); no entanto, com o mesmo objetivo.

Utilizamos entrevistas semiestruturadas, buscando elementos que apontassem a importância das crenças de autoeficácia na escolha da carreira de professor de física. As perguntas dirigidas aos graduandos foram:

- a) Você se considerava capaz de ser um bom professor? Por quê?
- b) Você se considerava um bom aluno em física?
- c) Você acredita que as suas capacidades em física influenciaram sua decisão?
- d) Você se considerava capaz de realizar com êxito as atividades nas aulas de física (resolução de problemas, atividades, provas e outros)? Qual a influência em sua decisão? Justifique sua resposta.

Com os dados obtidos foi realizada uma análise apontada sob dois aspectos do referencial teórico proposto: a autoeficácia em relação às atividades de física no ensino médio e a autoeficácia em relação às atividades docentes.

A partir dos casos analisados, os comparamos a fim de discutir suas congruências e discordâncias, trazendo extratos das falas dos estudantes para fundamentar nossas inferências.

### IV. RESULTADOS E ANÁLISES

Esta discussão basear-se-á na relação entre a crença de autoeficácia e a escolha da carreira de professor de física.

Para tanto, apresentaremos algumas falas que expressem a ideia-objeto da discussão. Dividimos esta seção em duas categorias, de acordo com as questões apresentadas, a fim de facilitar o entendimento dos pontos aqui levantados.

Todos os nomes apresentados aqui são fictícios.

#### A. Autoeficácia em relação às atividades de física no ensino médio

Dos 26 estudantes entrevistados, 21 deles demonstraram crenças de autoeficácia elevadas em relação às atividades de Física, principalmente com relação às atividades em sala de aula como provas, trabalhos, dentre outras.

*“Eu me considerava capaz pelo fato de quando eu ia em busca da resposta sempre conseguia chegar nela. Teve um dia, eu acho que eu fiquei até as três horas da manhã tentando achar uma resposta. É que era uma questão de um vestibular da UFRGS e eu não achei a resposta. No outro dia, acordei, procurei a resposta... Nós tínhamos cinco dias pra achar essa resposta e eu consegui achar no último dia e foi uma coisa muito incrível”* (Alice - UFSC).

Nesse exemplo, Alice justifica porque se julgava capaz de resolver com êxito as atividades na disciplina.

Aparentemente, essa situação incrementou sua autoeficácia e fortaleceu a relação da estudante com o conhecimento físico, proporcionando experiências positivas a ela, de forma a ampliar seu interesse nas aulas e na física.

Similarmente, Reginaldo relata que possuía autoeficácia elevada nas atividades em física, sempre teve bom desempenho e considerava a disciplina interessante.

*“[...] eu era um bom aluno por sempre ter tirado boas notas. Então, eu nunca tive dificuldades com matéria. [...] também pelo fato de não ter medo de Matemática, ter medo de Física quando chega numa parte um pouco mais complicada. Mas eu nunca tive essa dificuldade, sempre gostei, sempre fiz sem medo. Então isso influenciou minha escolha”* (Reginaldo - UNIFEI).

Reginaldo também atribui a seus professores seu bom desempenho em física, sendo este desempenho que o fazia se interessar pela disciplina. Notamos aqui a influência da autoeficácia em sua decisão. Adiante discutiremos que este licenciando buscava outro curso para seguir, porém, por não passar no vestibular, optou pela licenciatura em física, escolha na qual o fator autoeficácia foi importante.

Já Marcelo, licenciando da UNIFEI, comenta que seu bom desempenho em física durante seu Ensino Médio era consequência do “gosto” que tinha pela disciplina. Nesse caso, notamos a relação direta entre interesse e autoeficácia.

O licenciando coloca o interesse como fator principal da sua escolha, seguido de seu bom desempenho e da crença de que esse alto desempenho se manteria (autoeficácia).

Contrapondo-se a Marcelo, José argumenta que seu bom desempenho e sua crença de que teria esse desempenho (autoeficácia) orientaram sua escolha mais fortemente do que o interesse. José também afirma que seu desempenho na disciplina o motivou a optar pela carreira de professor de física:

*“[...] sempre tirei boas notas, era a disciplina que mais me identificava. Então resolvi seguir carreira. [...] quando você faz algo que gosta parece que o tempo passa mais rápido, você tem prazer em fazer. E isso colaborou para que eu fosse bom aluno”* (José - UNIFEI).

O graduando José se considerava capaz de realizar com êxito as atividades durante as aulas de física do ensino médio, pois gostava de lidar com objetos que estivessem ligados à física, o que denota que sua autoeficácia elevada e sua motivação pessoal pela disciplina foram determinantes na sua decisão de cursar a licenciatura em física. Essa análise está de acordo com a hipótese de Silvia [6], segundo a qual uma autoeficácia elevada aumenta o interesse por determinada tarefa.

O acadêmico Leonardo também declarou possuir autoeficácia elevada em relação às atividades que executava na disciplina de física durante o ensino médio:

*"[...] Física tem muita Matemática e interpretação e eu era bom nos dois [...] Se você tem aptidão em alguma coisa é normal procurar aquilo. Se tivesse melhores notas em biologia, eu poderia escolher medicina, mas como minhas melhores notas eram em exatas. Acho que cada um deve seguir naquilo em que é bom"* (Leonardo - UFSC).

Nessa fala observamos a importância da autoeficácia na escolha de Leonardo. Isso nos leva a considerar que não só neste caso, mas de uma forma predominante, uma crença de autoeficácia elevada em determinadas atividades pode favorecer o surgimento de interesse. A licencianda Paula também afirma que sempre teve mais aptidão para áreas exatas, particularmente Física, disciplina na qual obtinha boas notas. No extrato abaixo, Paula argumenta sobre sua autoeficácia e seus interesses:

*"[...] sempre tive mais facilidade com Física. Só que no terceiro ano que eu resolvi: vou fazer Física porque eu queria era ser professora. Na verdade, o que eu queria era ser professora. Aí eu disse: não, e a disciplina agora? Tem que ser uma de exatas e Matemática eu não gosto muito, então é Física"* (Paula - UFSC).

Nesse trecho observamos que a autoeficácia elevada da estudante foi o diferencial para sua escolha pela graduação em licenciatura em Física, aliada ao desejo de ser professora, pois acreditava na sua aptidão para a área.

Sobre esse ponto Bandura [18] expõe que indivíduos com autoeficácia elevada em determinadas atividades tendem a interessar-se mais por elas, pois se sentem positivamente confiantes e competentes para executá-las. Esse fator pode ser observado, por exemplo, nas falas de Paula, Leonardo e Fernanda. Suas crenças de que eram capazes de executar tarefas relacionadas à física favoreceu o aumento do interesse desses alunos quando no ensino médio pela graduação em física.

Fernanda também destacou uma autoeficácia elevada. A estudante argumenta que tinha dificuldades, porém, sempre buscava alguma forma de solucionar esse problema:

*"Não sei. Claro que eu tinha dificuldades, até como eu tenho hoje, mas eu tinha dificuldade... Por exemplo, história era uma matéria que eu não gostava, tinha dificuldade em história e não ia atrás. Mas se eu tinha alguma dificuldade em Física, nossa! Eu ia atrás até eu entender e também sempre procurava entender mais do que o que o professor passava na sala. Então, sei lá, acho que eu era esforçada"* (Fernanda - UFSC).

*O papel da autoeficácia na escolha da carreira de professor de física*

A argumentação de que era uma aluna esforçada e, em outra fala, de que conseguia resolver com êxito as atividades propostas, nos leva a perceber que a autoeficácia elevada da estudante teve influência em sua escolha, ratificada ainda em outra fala:

*"Se eu não corresse atrás assim, e não entendesse, e não tivesse maneira, de jeito nenhum, acho que ia sofrer muito fazendo uma graduação assim. ¿Se eu já não entendesse o básico, como eu iria entender algo mais complexo que isso, sabe? Eu acho que seria muito sofrimento fazer isso. Se, por exemplo, ¿eu escolhesse fazer História, sabe? Eu não gosto, nunca fui atrás também. Imagine se eu fizesse uma faculdade de história! Seria mais complicado ainda. Então, acho que por eu ter um pouco mais de facilidade em física no ensino médio; e ir atrás; e, conseqüentemente, tirar notas boas... Enfim, acho que isso me influenciou na escolha"* (Fernanda - UFSC).

Entretanto, outros entrevistados fizeram um contraponto a essa discussão, como por exemplo Kamila, que apesar de ter afirmado que sempre recebia boas notas em física, sinalizou baixa autoeficácia em relação às atividades da disciplina de física. Ela assegura que não se considerava uma boa aluna, pois nunca teve habilidade com matemática.

Apesar das boas notas conseguidas na disciplina, estas não a fizeram desenvolver uma crença de autoeficácia elevada em física. Situação semelhante é a de Renata, que comenta que não era boa aluna e que considerava suficiente atingir a nota necessária para a aprovação na disciplina.

De forma semelhante, ainda em relação à resolução de atividades em sala, como provas, trabalhos, entre outras, Hamilton argumenta que sempre se considerou capaz de realizar essas atividades, ainda que com certa dificuldade.

O estudante considerava-se um aluno mediano por não ter bom desempenho na disciplina de física, embora fosse, ao lado de matemática, a disciplina de que mais gostava. Por esse aspecto, o estudante demonstra uma baixa autoeficácia em relação à disciplina de física.

Outro exemplo de baixa autoeficácia é o de Edson. O acadêmico se julgava um bom aluno na maioria das disciplinas escolares, mas em física e matemática considera que tinha mais dificuldades. Optou por seguir na física, pois acreditava que seria um desafio pessoal:

*"[...] vamos ver no que dá, né. Vamos tentar fortalecer essa parte. Já que é minha fraqueza, ¿que tal eu trabalhar em cima disso para me formar em alguma coisa nessa área? Porque realmente a área da matemática e da física era que eu mais tinha dificuldade"* (Edson - UNIFEI).

De modo geral, o estudante demonstra uma baixa autoeficácia com relação às atividades em física durante seu ensino médio. Nesse caso, é possível observar que o fator acaso e um desafio pessoal foram mais preponderantes do que a autoeficácia.

Nos casos desses estudantes, foi possível observar que as crenças de autoeficácia nas atividades de física não foram fator predominante em suas decisões; no entanto, mostraram-se presentes e importantes. Também observamos que suas crenças em relação a outros aspectos

eram elevadas e significativas, como veremos na próxima subcategoria.

Da análise realizada foi possível observar que a autoeficácia em relação às atividades da disciplina de física durante o ensino médio foram decisivas para escolha de vinte e um (21) licenciandos – o que representa 84% do total de entrevistados. Tracey [26] mostrou que, no processo de escolha de uma carreira, o interesse se sobrepõe à autoeficácia, afirmando que a relação mútua entre os dois conceitos é fator determinante. Ao que parece, nossas evidências concordam com as conclusões de Tracey, pois, assim como houve licenciandos que afirmaram que sua crença em bom desempenho aumentava seu interesse em física, outros se diziam interessados *a priori* e que isso os levava a estudar mais e a acreditar em resultados satisfatórios durante suas atividades.

## B. Autoeficácia em relação à docência

Nesta categoria discutiremos pontos referentes às crenças dos graduandos sobre suas capacidades de atuarem eficazmente como professores de física. Destacamos aqui que 20 dos entrevistados relataram que acreditavam que poderiam ser bons professores de física, e que esse fator também foi motivo para optarem pelo curso. No entanto, cabe ressaltar que a autoeficácia elevada não foi característica geral.

Renata, por exemplo, além de afirmar baixa autoeficácia nas atividades de física no ensino médio, também afirma uma baixa crença em suas capacidades como futura professora. Por se comparar aos professores que teve durante seu período escolar, ela acredita que nunca será tão boa professora quanto eles. Na sua fala podemos verificar essa condição:

*“[...] como criei uma imagem perfeita do professor, fico pensando que é impossível chegar lá, chegar a esse nível. Posso até tentar, mas eu nunca vou me sentir uma professora. Nunca vou conseguir me comparar com os professores que eu tive”* (Renata – UFSC).

Renata ainda compara sua capacidade enquanto professora com a imagem que possui de seus antigos professores. Essa comparação com outrem para desenvolver um autoconceito ou uma crença de autoeficácia é esperada, uma vez que a comparação é uma das formas de desenvolvermos julgamentos sobre nossas capacidades [21, 31].

Outro caso interessante é o de Hamilton. Mesmo declarando ser um aluno mediano, demonstrando uma baixa autoeficácia enquanto estudante do ensino médio, o graduando declarou ter uma elevada autoeficácia em relação à atividade docente. Hamilton considerava-se capaz de ser um bom professor, pois seria capaz de lecionar de maneira clara e objetiva os conteúdos de física.

Assim como Hamilton, Kamila afirmou ter baixa autoeficácia em relação às atividades estudantis em física, porém, declarou que se considerava capaz de ser uma boa professora. Entretanto, ressalta: *“boa professora, mas não de física!”*. No trecho abaixo esses termos ficam mais claros:

*“Eu acho que eu tenho a habilidade de ensinar, acho que tenho jeito com as pessoas, ter um tato. Porque não basta tu saberes o conteúdo para conseguir ensinar, tem que conseguir atingir a pessoa. Acho que tenho capacidade pra isso, agora saber física para ensinar pra outra pessoa é outra coisa, o problema é saber física”* (Kamila – UFSC).

Um caso analisado e que merece atenção especial foi o de Alice, pois a graduanda declarou baixa autoeficácia em relação a ser uma futura professora até pouco antes de ingressar no curso. Em seu atual emprego, a estudante desenvolve treinamento de pessoal e isso colaborou para que ela reduzisse o que considera como sua maior dificuldade em ser professora: sua timidez. No trecho a seguir Alice argumenta um pouco a esse respeito:

*“[...] agora eu aprendi, estou aprendendo muita coisa. Então tudo que eu faço no meu trabalho me ensinou que posso mesmo ser. Me ajudou. Eu já queria licenciatura, então agora eu tenho certeza de que eu quero”* (Alice – UFSC).

Percebe-se que Alice, mesmo com o intuito de seguir uma carreira na licenciatura, não se julgava capaz de ser boa professora, aspecto que se modificou com suas atividades de licencianda.

Outro caso importante foi do acadêmico Andrade. Sua autoeficácia elevada em relação à atividade docente foi expressa na seguinte fala:

*“Porque acho que eu tenho o dom, além de gostar, de fazer isso que eu estou fazendo e estar fazendo o curso que estou fazendo. Eu acho que tenho o dom. Eu nasci com esse dom de ensinar e poder ajudar de alguma forma, mesmo sendo difícil”* (Andrade – UFSC).

Contextualizando o excerto acima, cabe ressaltar que o licenciando ministrava aulas particulares para colegas na escola em que estudou e essas colaboraram para que firmasse essa posição. A busca pela licenciatura surgiu dessa crença de que ele nasceu com o “dom de ensinar”.

Já Edson afirma que acreditava que pudesse ser um bom professor e que gostava de ensinar e de ajudar seus colegas na escola. Porém, destaca que não queria ser professor, pois entendia que um professor estuda demais. Dessa forma, notamos que, no caso desse estudante, a autoeficácia em ser professor era elevada, contudo ele não almejava essa profissão. Vale lembrar que o graduando evidenciou baixa autoeficácia nas atividades de física, contrapondo-se à sua crença de eficácia em lecionar. Assim, o desafio de graduar-se em um curso de física foi preponderante em sua escolha, e somando-se a isso, é provável que sua autoeficácia em ser professor tenha colaborado com a escolha particular pela licenciatura.

Sonia, por outro lado, considerava-se capaz de ser boa professora, pois sempre foi curiosa e interessada por assuntos ligados à física. A licencianda entende que, ao apresentar aspectos interessantes do conhecimento físico, motivaria mais seus alunos. Por acreditar em um ensino dessa maneira, Sonia declara que acreditava ser capaz de se tornar uma boa professora de Física.

*“Sabe, eu acho que as pessoas precisam de conhecimento, algumas buscam, outras precisam meio*

que um empurrão para ter curiosidade. Eu, como professora, quero buscar fazer isso, sabe, instigar a curiosidade no aluno” (Sonia – UFSC).

A graduanda resume ainda o motivo pelo qual escolheu a licenciatura:

“Eu tenho interesse em ensinar, eu tento fazer isso até em casa, sabe, com minha irmã. Ela está no ensino médio. Eu gosto de ensinar, gosto de instigar a curiosidade nas pessoas; por isso que eu escolhi fazer licenciatura” (Sonia – UFSC).

Outro aspecto ressaltado pela acadêmica é que ministrava aulas particulares para seus colegas:

“Primeiro, no ensino fundamental, eu dava aula de reforço de matemática para meus colegas duas vezes por semana. Eu lia, ajudava eles. É bem legal, gostava bastante também. E eles até falaram que ajudou. Na verdade, as aulas de reforço começaram porque algumas notas estavam muito baixas e meus colegas pediram pra eu ajudar. Então o pessoal do colégio reservou uma sala pra gente, então nós íamos duas vezes por semana lá estudar, assim, e todos eles passaram” (Sonia – UFSC).

Já Simoni comenta que não houve um motivo específico para ela ter escolhido ser professora de física, mas uma sucessão de fatores que a levaram a escolher o curso. Mas algo que a estudante destaca é o fato de considerar a profissão de professor importante e enxergar nos seus professores uma figura que ela gostaria de ser algum dia.

Nesse caso, a busca de Simoni foi por poder ser um dia uma professora tão boa quanto os professores que ela considerava assim.

Outro acadêmico que demonstrou autoeficácia elevada na atividade docente foi Rafael, ao fazer a seguinte afirmação: “alguns amigos me falaram que eu devia ser professor, eles falavam que eu ensinava bem que se eu fosse professor eu iria conseguir”. Notamos que o graduando acreditava possuir autoeficácia elevada, nutrida a partir das dicas de seus amigos, o que Bandura [21] caracteriza como desenvolvimento de autoeficácia a partir de persuasão verbal.

Em relação à autoeficácia elevada em atividades docentes, Lorena afirmou que:

“[...] sempre gostei muito disso, de poder passar para os outros aquilo que eu sei. Ver que as pessoas estão entendendo o que estou falando, que estão gostando daquilo. [...] então sempre me achei capaz de ser professora, eu sempre gostei bastante” (Lorena – UFSC).

A entrevistada ainda expressa como essa crença potencializou seu interesse pela licenciatura.

“[...] acho que essa é uma coisa que eu sei fazer, é uma coisa que sempre gostei de fazer, sempre gostei de ver os resultados. Tanto que se eu não fosse fazer física eu faria biologia licenciatura” (Lorena – UFSC).

Levando em consideração o que Silvia [6] afirma em relação ao desenvolvimento do interesse e às crenças de autoeficácia, argumentamos que as crenças de autoeficácia desses estudantes potencializaram o surgimento do interesse duradouro pela docência em física ou

O papel da autoeficácia na escolha da carreira de professor de física simplesmente pela docência, como no caso de Kamila. O surgimento de interesses duradouros ocorre por meio de uma autoeficácia elevada e, no caso dos entrevistados, observamos claramente esse ponto, mesmo em Hamilton, que afirmou não se considerar um bom aluno, já que, em outra fala, declarou que se considerava capaz em realizar as tarefas propostas, o que nos leva a crer que ele possuía, ao menos em algumas tarefas, autoeficácia elevada e isso pode ter sido um dos fatores responsáveis pelo surgimento do seu interesse pela área de física.

Sobre a autoeficácia em relação à docência, nossa análise evidenciou que vinte (20) licenciandos, 80% dos entrevistados, declararam alta crença de eficácia quando questionados se acreditavam que pudessem ser bons professores. Novamente, as crenças de eficácia desenvolvidas geravam interesse, aproximando-os da carreira de professor. Nossos resultados convergem com os propostos por Restubog *et al.* [28], que sugere que os indivíduos irão buscar carreiras em atividades nas quais se sintam confiantes e capazes de executar o trabalho. Nesse caso, como os licenciandos se sentiam capazes de serem bons professores, isso pode tê-los encaminhado a optarem pela docência.

## V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento de atitudes em relação à carreira envolve uma complexa dinâmica psicológica em que fatores cognitivos, motivacionais e afetivos interagem de forma que o resultado final dessa interação seja a escolha por uma carreira por parte dos indivíduos [32]. Nessa perspectiva, abordamos o construto motivacional autoeficácia e sua influência na escolha pelo curso de licenciatura em física de acadêmicos de duas universidades federais.

A análise precedente mostrou que a motivação dos acadêmicos investigados para escolha da carreira de professor de física esteve fortemente ligada ao julgamento de autoeficácia sobre as atividades realizadas na disciplina de física no ensino médio e pela autoeficácia em relação à docência. Os resultados empíricos apresentados indicam a necessidade de considerar que no ensino formal os educadores devem tomar como um objetivo de ensino melhorar a qualidade do julgamento de autoeficácia em física e em relação à docência de seus alunos. Acreditamos que assim seria dada grande contribuição para solução dos problemas da falta de interesse pelas disciplinas científicas e baixa procura por cursos da área científica, em particular da Licenciatura em física.

Mas como contruir crenças de autoeficácia elevadas nos alunos? Azzy e Polydoro [20] sugerem que os professores devem propor atividades desafiadoras, porém passíveis de serem realizadas, nas quais o progresso do aluno é constantemente monitorado e os feedbacks dados são centrados no progresso e não nas deficiências. Isto porque as tarefas excessivamente difíceis acabam gerando sentimento de incompetência e fracasso, reduzindo a

motivação para realizá-las. Nesse sentido, é necessário criar uma cultura do êxito e não do fracasso nas aulas de física.

Acreditamos que outra forma de promoção da autoeficácia consiste em ajustar a intervenção didática a cada passo do processo de aprendizagem. A atividade construtiva dos alunos é diversa; portanto, um único método de ensino, utilizado à exaustão, será incapaz de suprir as necessidades de todos os alunos ao mesmo tempo, ou de certo aluno em todos os momentos. Um aluno que não se sente eficaz em realizar uma tarefa de resolução de problemas pode se sentir eficaz em preparar um texto sobre o conteúdo aprendido na aula. Como a autoeficácia não é global, mudanças simples na estratégia de ensino podem gerar melhorias significativas na qualidade motivacional do aluno. Ignorar esse fato é um dos grandes equívocos do ensino tradicional.

Com relação à melhoria do julgamento de autoeficácia sobre a docência parece viável que os alunos tenham oportunidade de realizar discussões em grupos, nas quais possam expor aos colegas seus próprios pontos de vista, como também a realização de atividades de apresentação para classe. Todavia, consideramos que as experiências vicárias são as fontes mais poderosas na construção da autoeficácia em relação à docência. Concordamos com Osborne, Simon e Collins [33] que “a mais importante mudança que pode ser feita para melhorar a qualidade da educação científica poderia ser o recrutamento e retenção de hábeis e entusiásticos professores de ciências” (p. 1069).

Nossos resultados apontam ainda que a autoeficácia fortalece o interesse pela física. Na educação científica, interesse tem sido associado à relação interpessoal entre aluno e professor, à diversificação dos métodos de ensino, e especialmente, à relevância e autenticidade dos tópicos sendo estudados [11, 34]. A literatura mostra que os estudantes são mais interessados em aspectos da física que eles percebem como sendo relevantes para suas vidas e menos interessados em tópicos que eles percebem como sendo de pouca relevância pessoal. Acreditamos que aliar estratégias de experiência da emoção interesse com experiência pessoal de eficácia podem contribuir para geração de interesse duradouro pela física, e eventualmente levar à escolha da carreira de professor de física.

Por fim, afirmamos a necessidade de se persistir em investigações nessa linha de pesquisa a fim de compreender melhor a importância da autoeficácia na escolha da carreira de professor de física. O número de trabalhos que abordam essa temática é escasso, sendo ainda um campo árido, porém, com possibilidade de ser muito fértil.

## REFERÊNCIAS

- [1] Angotti, J. A. P., *Desafios para a formação presencial e a distância do físico educador*, Revista Brasileira de Ensino de Física **28**, 143-150 (2006).
- [2] Quadros, A. L. De, Carvalho, E.; Coelho, F. S.; Salviano, L.; Gomes, M. F. P. A.; Mendonça, P. C.;

Barbosa, R. K., *Os professores que tivemos e a formação da nossa identidade como docentes: um encontro com nossa memória*, Revista Ensaio **7**, 1-8 (2005).

[3] Dalri, J., Mattos, C. R., *Aspectos afetivos-cognitivos na aprendizagem e suas influências na escolha da profissão de professor de Física: um exemplo*, XI Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, Curitiba, (2008).

[4] Custódio, J. F., Pietrocola, M., De Souza Cruz, F. F. S., *Experiências emocionais de estudantes de graduação como motivação para se tornarem professores de Física*, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **30**, 25-57 (2013).

[5] Simões, B. S., *Por que tornar-se professor de física?* Dissertação, Mestrado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, (2013).

[6] Silvia, P. J., *Exploring the psychology of interest*, (Oxford University Press, New York, 2006).

[7] Perry, J. C., Liu, X., Griffin, G. C., *The career locus of control scale for adolescents: further evidence of validity in the United States*, Journal of Career Development **38**, 167-185 (2011).

[8] Millar, R., Shevlin, M., *The development and factor structure of a career locus of control scale for use with school pupils*, Journal of Career Development **33**, 224-249 (2007).

[9] Luzzo, D. A., Smith, A. J., *Development and initial validation of the assessment of attributions for career decision-making*, Journal of Vocational Behavior **52**, 224-245 (1998).

[10] Silva, J. M. T., *Career decision profile (cdp) – versão portuguesa: estudo metrológico*, In: Actas do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. Braga: Universidade do Minho (2009).

[11] Raved, L., Assaraf, O. B. Z., *Attitudes towards science learning among 10th-grade students: A qualitative look*, International Journal of Science Education **33**, 1219-1243 (2011).

[12] Parka, H., Khanb, S.; Petrinab, S., *ICT in Science Education: A quasiexperimental study of achievement, attitudes toward science, and career aspirations of Korean middle school students*, International Journal of Science Education **31**, 993-1012 (2009).

[13] Kjaernsli, M.; Lie, S., *Students' preference for science careers: international comparisons based on PISA 2006*, International Journal of Science Education **33**, 121-144, (2011).

[14] Simões, B. S., Custodio, J. F., Rezende Junior, M. F., Trindade, E. C. A., *Autoeficácia e interesses pela profissão de professor de física*, In: XX Simpósio Nacional de Ensino de Física (2013).

[15] Pozo, J. I., *La adquisición de conocimiento científico como um proceso de cambio representacional*. Investigaciones em Ensino de Ciências **7**, 245-270 (2002).

[16] Gómez-Chacón, I. M., *Matemática Emocional: os afetos na aprendizagem Matemática*, (Artmed, Porto Alegre, 2003).

[17] Pajares, F., *Overview of social cognitive theory and of self-efficacy*, (2002).

<<http://www.emory.edu/EDUCATION/mfp/eff.html>>

Acesso em: Junho 24, 2012.

[18] Bandura, A., *Self-efficacy in changing societies*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[19] Bandura, A., *Self-efficacy*. In: V. S. Ramachandran (Ed.), *Encyclopedia of human behavior* **4**, 71-81, New York: Academic Press. (Reprinted in H. Friedman [Ed.], *Encyclopedia of mental health*, (Academic Press, San Diego, 1998).

[20] Azzy, R. G., Polydoro, S. A. J., *O papel da autoeficácia e autorregulação no processo motivacional*. In: Boruchovitch, E., Bzuneck, J. A., Guimaraes, S. E. R. (Org), *Motivação para aprender: aplicações no contexto educativo*, (Vozes, Petrópolis, 2010).

[21] Bandura, A., *Self-efficacy: Toward a Unifying Theory of Behavioral Change*, *Psychological Review* **84**, 191-215 (1977).

[22] Costa, E.; Boruchovitch, E., *A auto-eficácia e a Motivação em aprender: considerações para o desempenho escolar dos alunos*. In: Azzy, R. G., Polydoro, S. A. J. *Auto-eficácia em diferentes contextos*, (Alínea, Campinas, 2006).

[23] Silvia, P. J., *Self-efficacy and interest: Experimental studies of optimal incompetence*, *Journal of Vocational Behavior* **62**, 237-249 (2001).

[24] Abele, A. E., Spurk, D., *The longitudinal impact of self-efficacy and career goals on objective and subjective career success*, *Journal of Vocational Behavior* **74**, 53-62 (2009).

[25] Jin, L., Watkins, D., Yuen, M., *Personality, career decision self-efficacy and commitment to the career choices process among Chinese graduate students*, *Journal of Vocational Behavior* **74**, 47-52 (2009).

*O papel da autoeficácia na escolha da carreira de professor de física*

[26] Tracey, T. J.G., *Relation of interest and self-efficacy occupational congruence and career choice certainty*, *Journal of Vocational Behavior* **76**, 441-447 (2010).

[27] Lent, R. W., Brouwn, S. D., Hackett, G., *Toward a unifying social cognitive theory of career and academic interest, choice, and performance*, *Journal of Vocational Behavior* **45**, 79-122 (1994).

[28] Restubog, S. L. D., Florentino, A. R., Garcia, P. R. J. M., *The mediating roles of career self-efficacy and career decidedness in the relationship between contextual support and persistence*, *Journal of Vocational Behavior* **77**, 186-195 (2010).

[29] Tracey, T. J. G., *Development of Interests and Competency Beliefs: A 1-Year Longitudinal Study of Fifth-to Eighth-Grade Students Using the ICA-R and Structural Equation Modeling*, *Journal of Counseling Psychology* **49**, 148-163 (2002).

[30] Yin, R. K., *Estudo de caso planejamento e métodos*, (Bookman, Porto Alegre, 2004).

[31] Rodrigues, A., Assmar, E. M. L., Jablonski, B., *Psicologia Social*, (Vozes, Petrópolis, 2010).

[32] Janeiro, I. N., *Motivational dynamics in the development of career attitudes among adolescents*, *Journal of Vocational Behavior* **76**, 170-177 (2010).

[33] Osborne, J., Simon, S., Collins, S., *Attitudes towards science: a review of the literature and its implications*, *International Journal of Science Education* **25**, 1049-1079 (2003).

[34] Osborne, J., Collins, S., *Pupils' views of the role and value of the science curriculum: a focus-group study*, *International Journal of Science Education* **23**, 441-467 (2001).

# Génesis y evolución de la enseñanza de la física en el México colonial



Marco A. Moreno Corral<sup>1</sup>, M. Estela de Lara Andrade

Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Campus Ensenada. Baja California, México.

E-mail: mam@astroten.unam.mx

(Recibido el 19 de Marzo de 2014, aceptado el 30 de Agosto de 2014)

## Resumen

Analizando información y documentos diversos del periodo colonial mexicano, se presenta información que muestra el largo proceso que transcurrió para que la enseñanza de la física surgida de la Revolución Científica, finalmente arraigara en México. Se muestra que el primer texto escrito y publicado sobre física en el continente americano, vio la luz en la capital novohispana en el siglo XVI. A través de la identificación de los libros de esta disciplina que fueron llegando a la Nueva España, se comenta qué y cómo estudiaron los novohispanos esta ciencia, así como el sitio donde finalmente se institucionalizó la enseñanza de la física, tanto en su aspecto teórico como en el experimental.

**Palabras clave:** Física en el México colonial. Historia de la Física. Enseñanza de la Física.

## Abstract

Analyzing various documents from the Mexican colonial period, information that shows the long process that went into physics teaching, that emerged from Scientific Revolution and finally took root in Mexico, is presented. It is shown that the first text written and published about physics in the Americas was printed in the capital of New Spain in the sixteenth century. Through the identification of the books in this discipline coming to New Spain, it is discussed why and how the new Spaniards studied this science, as well as the place where physics education finally was institutionalized, in both its theoretical and experimental aspects.

**Keywords:** Physics in colonial Mexico. History of Physics. Teaching Physics.

**PACS:** 01.30.Os, 01.44.Fk, 01.65.+g

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Al ocurrir la implantación de la cultura occidental en la naciente sociedad novohispana del siglo XVI, las órdenes religiosas que se asentaron en las tierras recientemente conquistadas, realizaron importantes esfuerzos por introducir los programas de estudio que se seguían en Europa desde siglos antes. Además de conceptos religiosos, los frailes enseñaron los fundamentos de las “artes liberales” de acuerdo a los métodos educativos surgidos en las escuelas catedralicias medievales y que posteriormente pasaron a las universidades. En la Nueva España, las diversas congregaciones religiosas crearon los colegios de estudios mayores asociados a sus conventos. Ahí se preparaba a los frailes para su actividad misional y como parte de su formación, se introdujo el estudio de las materias del Trivium que fueron la gramática, la retórica y la dialéctica, así como las del Cuadrivium conformado por la aritmética, la geometría, la astronomía y la música. Estos dos conjuntos de disciplinas, que ahora podrían identificarse como de los campos de las Humanidades y del de las Ciencias, tenían interconexiones entre ellas, por lo que frecuentemente su enseñanza se hacía de manera indiferenciada; así por ejemplo, cuando como parte del

Trivium se trataba la filosofía, se incluían estudios de “filosofía natural” siguiendo el esquema aristotélico.

## II. EL PRINCIPIO

En el año de 1540, fray Alonso de la Veracruz inició la enseñanza filosófica en la Casa de Estudios Mayores adjunta al convento que fundó en Tiripetío, Michoacán, a través del curso de *Artes* que ahí impartió [1]. Fue en él, donde dictó las primeras lecciones formales de física de todo el continente americano. Debe tenerse presente que en aquellas fechas y todavía por cerca de dos siglos más, esta disciplina se entendió en el sentido que le dio Aristóteles de estudio de la naturaleza. Es adecuado recordar, que la palabra *Physis*; φύσις en griego, significa naturaleza y que desde la época de Tales de Mileto, los filósofos griegos la usaron para referirse al estudio de los fenómenos del mundo natural. También es importante resaltar que desde que el Estagirita concibió sus explicaciones sobre los fenómenos naturales y los plasmó en el texto llamado precisamente *Física*, lo hizo en forma meramente especulativa, fundamentada en la lógica, pero sin considerar para nada la

parte experimental. Esta interpretación prevaleció por casi dos milenios y sirvió lo mismo para explicar la estructura del cosmos, que el movimiento de los cuerpos o su naturaleza; así como la de diversos fenómenos naturales, e incluso aspectos del comportamiento humano.

Debido a la experiencia que fray Alonso tuvo entre 1532 y 1535 como profesor de filosofía en la Universidad de Salamanca, se hallaba calificado para la docencia, por lo que a Tiripetío llegó con el cargo de *Scholasticus* o *Magíster*. Sus cursos en esta población fueron similares a los de la institución peninsular. En la parte correspondiente al Trivium se ocupó de la dialéctica y en particular de la lógica aristotélica, mientras que del Cuadrivium trató los *ocho libros de Física*, el *De Caelo*; el *De Generatione et corruptiōne*, los *Meteorológicos* y el *De Anima*, todos textos escritos por Aristóteles, en los que ese filósofo transmitió su visión del mundo. Como Lector de Artes y Teología, de la Veracruz impartió el curso inicial entre 1540 y 1543, para luego comenzar otro en el trienio de 1543-1546. Siguiendo las normas educativas españolas, los estudiantes de aquellos cursos fueron frailes y españoles seglares, aunque también incluyó a nobles indígenas. Sin duda la capacidad docente de Alonso de la Veracruz, hicieron de ellos algo importante en la Nueva España, tal y como muestra una pintura anónima que ha sobrevivido hasta el presente [2], que deja ver a este personaje impartiendo cátedra rodeado de alumnos.

### III. PRIMER TEXTO UNIVERSITARIO DE FÍSICA DEL CONTINENTE AMERICANO

En 1557 fray Alonso publicó en la Ciudad de México la *Physica speculatio* [3]<sup>1</sup>, obra escrita en latín destinada a los estudiantes de la Real Universidad de México, con la que buscaba facilitarles la comprensión del texto aristotélico sobre física.<sup>2</sup> En ella, a través de preguntas y respuestas sobre diversos temas tratados por el Estagirita relativos a la naturaleza, de la Veracruz planteó todo un curso universitario de esa disciplina, que habría de tener cierta vigencia en el mundo hispánico, pues durante el siglo XVI alcanzó cuatro ediciones; la príncipe en la Nueva España y tres más en España, donde fue usada en los cursos de la prestigiada Universidad de Salamanca [4]. Entre el contenido de esta obra se hallan las especulaciones en torno al movimiento, así como las relativas al lugar, el tiempo, el vacío, la materia y la forma, que en conjunto forman parte importante del texto. Además nuestro autor se ocupó de explicar y comentar el *Del Caelo* aristotélico, para así introducir a los alumnos en el estudio de la estructura del cosmos. Como seguramente consideró insuficiente ese libro para tratar el tema, incluyó como apéndice la obra de

<sup>1</sup> Existe una versión facsimilar moderna completa, publicada por la Universidad Nacional Autónoma de México en 2012.

<sup>2</sup> También de esta obra, la misma universidad ha publicado recientemente una edición completa con traducción al español. Se trata de la *Física* de Aristóteles. Traducción y notas de Ute Schmidt Ozmančík. Bibliotheca Scriptorvm Graecorvm et Romanorvm Mexicana. UNAM. México, 2001.

*Génesis y evolución de la enseñanza de la física en el México colonial* astronomía geocéntrica escrita en el siglo XIII por el astrónomo italiano Campano de Novara, que agregó como *Tractatus de Sphaera* [5], con lo que logró en su libro conjuntar temas astronómicos, físicos e incluso algunos de aritmética y geometría.

### IV. CONTINÚA LA ENSEÑANZA DE LA FILOSOFÍA NATURAL

Desde aquellas primeras enseñanzas de Alonso de la Veracruz, cuya continuidad se dio en los conventos agustinos aún después de 1553 en que este personaje pasó a formar parte del primer cuerpo docente de la Real Universidad de México, por mucho tiempo se habló en la Nueva España de Filosofía Natural para referirse a los estudios que tenían que ver con el movimiento de los cuerpos, las propiedades de la materia, la estructura del cosmos, fenómenos ópticos, magnéticos o meteorológicos, por lo que no es extraño que fuera en el terreno filosófico donde se discutía sobre esos y otros temas relacionados con la naturaleza. Tanto en aquella universidad, como en los colegios regentados por las distintas órdenes religiosas, ese fue el tipo de enseñanza que sobre física se dio en el virreinato novohispano. Por ejemplo, cuando los jesuitas abrieron en 1575 la cátedra de filosofía en el colegio Máximo de San Pedro y San Pablo en la capital mexicana, en ella incluyeron las lecciones tradicionales de física, pues el profesor “se hizo cargo de introducir en la especulación a los talentos colegiales” [6]. Ante la necesidad de libros adecuados a los estudios que ahí se impartían, aquellos religiosos hicieron que el impresor Antonio Ricardo produjera varias obras europeas, entre las que se encontraba un texto de astronomía geocéntrica. En ese mismo año, el catálogo de jesuitas llegados a la capital novohispana consigna a fray Alonso Guillen, que se había especializado en estudios filosóficos, pero además dicho documento le señala como profesión la de Físico, aunque no da mayor detalle sobre ello.

Poco tiempo después, Diego García de Palacio publicó en 1583 en la capital novohispana los *Diálogos militares* y en 1587 la *Instrucción náutica*, obras de tipo técnico escritas para ser usadas por gente sin educación académica formal. Entre las diversas materias que en ellas trató, son de interés para este trabajo sus explicaciones de los círculos notables de la bóveda celeste y de cómo usarlos para determinar el tiempo, la posición geográfica del observador y las mareas. Lo hizo presuponiendo un cosmos geocéntrico, pero sin discutir nada sobre él. En los *Diálogos* hay todo un capítulo sobre artillería, que además de explicar la acción de la pólvora en términos del intercambio de las cualidades de sus tres principales constituyentes; el azufre, el salitre y el carbón, incluye una larga discusión sobre balística que sigue las ideas de su tiempo, pero donde agregó una componente importante sobre la observación del fenómeno y explicó la trayectoria seguida por los proyectiles disparados por las armas de fuego; dijo que “es de notar, que la bala tiene cierto término y camino, según la

Marco A. Moreno-Corral, M. Estela de Lara A.

fuerza que le dan para que salga, y este viaje es señalado con una línea ...”, redondeó aquel párrafo más adelante y escribió que “... acaba la furia y comienza a declinar la bala”. En ese capítulo también demostró con diversos argumentos geométricos y físicos, que el máximo alcance de un proyectil se obtiene cuando la pieza que lo dispara forma un ángulo de 45° respecto del horizonte y aunque esas ideas no fueron originales de García de Palacio, muestran que a la Nueva España estaban llegando algunos conceptos que entonces surgían en balística.

La visión aristotélica de la naturaleza permeó en las escuelas superiores del virreinato novohispano y al finalizar el siglo XVI, lo que de física se estudiaba, era precisamente en los textos de Aristóteles o en los de sus comentaristas. Aquí es pertinente señalar que entre los muchos libros que llegaron a la Nueva España en aquel siglo, además de las obras del Estagirita, hemos identificado aquellos que son relevantes para el tema, como el de Domingo de Soto *Super octo libros physicorum Aristotelis comentaria*; de Francisco Valles el *De iis quae scripta sunt physice in libris sacris*; el ya mencionado *Tractatus de Sphaera* de Campano de Novara, así como el más conocido *Sphaera mundi* de Joannes de Sacrobosco. Igualmente se ha identificado un texto que en aquella época fue muy influyente en el mundo hispánico por lo que tocaba a la física aristotélica escrito por Francisco Toledo, titulado *Comentaria una cum quaestionibus in octo libros Aristotelis de Physica auscultatione*. También llegó el *Commentarij in quatuor libros de Caelo Aristotelis* de Tomás de Aquino. Además, se han identificado el *Elementorum Geometricorum* de Euclides, las *Theoricae novae planetarum* de Georg Peurbach, el *Della fisica* de Leonardo Fiorovanti, los textos de óptica *La Perspectiva* de Alhazen; la *Perspectiva communis* de John Pecham y la *Opticae Libri Decem* de Vitelo, así como el *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de Nicolás Copérnico, textos todos ellos que por el número o las diferentes ediciones que llegaron a la Nueva España, indican que no fueron adquisiciones casuales, sino explícitamente solicitados a Europa para ser usados en los cursos novohispanos [7].

En 1606 Enrico Martínez [8] publicó en la Ciudad de México el libro *Repertorio de los Tiempos e Historia de la Nueva España*, que en el tratado primero, se ocupó de la estructura del cosmos geocéntrico, aunque hizo una discusión interesante donde recurre a la experimentación para mostrar que el Sol es mayor que la Tierra. En cuanto a la estructura de la materia, en el tratado segundo de este libro Martínez siguió a los aristotélicos y discutió la teoría de los cuatro elementos: fuego, aire, agua y tierra, así como la de los graves, que “explicaba” la caída de los cuerpos. Como parte de este libro también incluyó un “Canon de eclipses lunares y solares”, calculados por él para la posición de la Nueva España, determinando los que ocurrirían en el periodo de 1606-1620 [9].

La física aristotélica siguió siendo discutida en los colegios novohispanos y en la Real y Pontificia Universidad de México durante todo el siglo XVII, pero en 1637 se abrió en esta última institución una cátedra que en ocasiones, dependiendo fundamentalmente de quién fuera

el profesor, sirvió para discutir algunos de los cambios que entonces ocurrían en el estudio de la naturaleza; especialmente en aquellos países europeos fuera de la esfera de influencia de España. Se trató de la cátedra de Astrología<sup>3</sup> y Matemáticas, que fray Diego Rodríguez comenzó a impartir desde aquel año. Algunos autores [10] han querido ver en ella el inicio de la enseñanza de conceptos nuevos de física y matemáticas en la Nueva España. Ello es parcialmente cierto ya que en efecto se sabe por los escritos que se han conservado de Rodríguez, que fue un personaje que estaba enterado de lo que sucedía en el campo científico europeo, particularmente en astronomía y matemáticas, sin embargo aunque sabía del heliocentrismo, su trabajo astronómico lo realizó siguiendo las ideas geocéntrico-heliocéntricas de Tycho Brahe, que fue un autor en el que los religiosos vieron salvarse la ortodoxia bíblica.

Por los conocimientos que tuvo, probados por los documentos que de él sobreviven, se debe considerar a fray Diego como un hombre de transición entre las viejas ideas sobre la naturaleza y la visión moderna de la física, lo que sin duda le confiere un lugar importante en el desarrollo que esta disciplina ha tenido en México. En torno a él se formó un pequeño grupo de pensadores que de una forma u otra podrían ser considerados como heterodoxos, sin embargo ello ocurrió en una época en que las medidas punitivas del Tribunal de la Inquisición se recrudecieron en nuestro país, por lo que mantuvieron un bajo perfil y es muy difícil hacer afirmaciones sobre lo que en verdad supieron sobre la nueva ciencia. Uno de ellos fue Melchor Pérez de Soto, quien en 1655 se desempeñaba como “obrero mayor” de la Catedral de México, que en esa época estaba en construcción. Este personaje fue procesado por poseer libros prohibidos y se le internó en los calabozos de la Inquisición donde murió [11]. El inventario de los libros que le fueron confiscados existe y muestra que tenía más de 1600 volúmenes [12], lo que sin duda era notable para aquella época. Entre esos libros hemos podido identificar diversos ejemplares relacionados con el tema aquí tratado. Como algunos se encuentran repetidos y el precio de los libros era muy alto entonces, se ha pensado que la biblioteca de Pérez de Soto debió ser la del grupo de heterodoxos surgido alrededor de Rodríguez, y que el obrero, por su gusto por los libros y su posición como constructor de la catedral capitalina, los guardaba en su casa donde los inquisidores los encontraron. Entre la extensa variedad de obras de aquella biblioteca, hay un número importante de textos que pueden considerarse técnicos y científicos [7], y aunque la mayoría en aquel momento eran obsoletos pues estaban enfocados en la visión aristotélica, hubo textos de transición como la *Nova Scientia* de Tartaglia, las *Speculationum Mathematicarum et Fisicarum* de Giovanni Batista Benedetti, o las *Novae coelestium orbium Teórica congruente cum observatoionibus Nicoloi Copernici* de Antonio Magino,

<sup>3</sup> En esa época todavía no había ocurrido la separación definitiva entre el saber astronómico y las ideas astrológicas, así que con frecuencia se usaba la palabra astrología para referirse a lo que ahora entendemos como astronomía.

que estaban incorporando la nueva visión de la naturaleza que entonces surgía en Europa. Además de esos y otros textos del mismo tipo, en aquella biblioteca había libros científicos indiscutiblemente importantes para el desarrollo de la física como el ya mencionado *De Revolutionibus* de Copérnico, el *De Magnete* de William Gilbert o el *Epitome Astronomiae Copernicae* de Kepler.

Podría pensarse que aquellos libros fueron atesorados por un bibliófilo, sin ninguna otra utilidad, pero hay prueba de que no fue así. Pérez de Soto fue una persona que no sabía latín, lengua en la que estaban escritos muchos de esos libros, pero el mismo inventario inquisitorial proporciona información que muestra que sí los leía. Entre los textos se encuentran listados algunos manuscritos que sin duda fueron traducciones hechas para él. Ese es el caso del *De radiis visus el lucis in vitrus perspectivis et iride tractatus* de Marco Antonio de Dominis, que fue un libro de óptica que un estudiante contratado por don Melchor tradujo y quedó manuscrito bajo el título de *Tratado de los rayos de la vista y de la luz y de los vidrios transparentes con que vemos*.

A la muerte de fray Diego Rodríguez ocurrida en 1668, la cátedra de Astronomía y Matemáticas pasó a varios personajes, que por lo que de ellos se conoce, se ocuparon solamente del saber ortodoxo en ese campo, enseñando la forma de establecer los “días decretorios” a partir de las posiciones de los astros, que eran aquellos en los que según los preceptos galénicos, debían aplicarse remedios médicos como las sangrías y las purgas. Eso fue así, porque la cátedra fue creada a petición expresa de los estudiantes de medicina, y formaba parte de la facultad de esa especialidad en la Real y Pontificia Universidad de México.

## V. ALGUNOS CAMBIOS

En 1672 Carlos de Sigüenza y Góngora ganó aquella cátedra, que gracias a él volvió a utilizarse para explicar a los estudiantes temas astronómicos y matemáticos. No se conoce el programa que siguió en sus exposiciones que abarcaron un periodo de veintiún años, pero sí se sabe que uno de los textos que utilizó durante todo ese tiempo, fue el *Sphaera mundi* de Joahannes de Sacrobosco; libro medieval de astronomía geocéntrica. Sigüenza utilizó el comentario escrito por el jesuita alemán Christopher Clavius, conocido como *De Sphaera*, en el que ya se menciona en forma breve el heliocentrismo de Copérnico. Otros textos con enfoques diferentes a los de la filosofía natural que utilizó don Carlos, aunque no necesariamente en aquella cátedra, fueron la *Astronomia instaurata* y la *Nova Stella* de Tycho Brahe; la *Istoria e dimostración intorno alle Machie Solari* de Galileo Galilei; la *Esfera común y terráquea* de José de Zaragoza, donde ya se estudia a la Tierra desde lo que podría ser una perspectiva geofísica; los *Principia philosophiae* de René Descartes en los que ese autor expuso sus teorías físicas; el *Epitome Astronomiae Copernicae* y las *Tabulae Rudolphinae* de Kepler, obras de gran importancia en el cambio de paradigma cósmico, así como

*Génesis y evolución de la enseñanza de la física en el México colonial* la *Physica* de Honoré Fabry que contiene discusiones acerca del concepto de ímpetu, sobre el movimiento local y referente al de la Tierra.

A finales de 1680 y principios de 1681 fue visible un brillante cometa que incluso Newton estudió y le sirvió para escribir sobre las trayectorias cometarias en los *Principia*. Con motivo de ese suceso, Sigüenza publicó en la Ciudad de México el *Manifiesto filosófico contra los cometas mantenidos despojados del imperio que tenían sobre los tímidos*, en el que mostraba que esos cuerpos celestes no presagiaban calamidades. Esta obra fue atacada por diferentes defensores de la ortodoxia aristotélica, entre los que se hallaba el jesuita Eusebio Francisco Kino, quien lo observó en Europa mientras esperaba pasar al Nuevo Mundo. La polémica que se suscitó entre esos dos personajes es bien conocida [13], así que la obviaremos, pero sí se mencionará que como resultado de ella, Sigüenza publicó en 1690 la *Libra Astronómica y Filosófica*,<sup>4</sup> en la que se ocupó ampliamente de aquel cometa, incluyendo sus observaciones telescópicas de él, para desmentir las ideas astrológicas en torno a esos objetos, por lo que ese texto significó un punto de inflexión para el desarrollo de la ciencia en el México colonial. Este es el único trabajo de ciencias exactas que de este autor ha llegado hasta el presente. Al leerlo puede juzgarse la astronomía, la física y las matemáticas que manejó y posiblemente enseñó este personaje [14].

En la *Libra* Sigüenza y Góngora expresó su concepto sobre la gravedad.<sup>5</sup> Al discutir en torno al posible origen de los cometas, habló de ella, pero lo hizo en términos puramente aristotélicos, pues dijo que la gravedad es una “connatural apetencia” que los cuerpos tienen de conservar el todo del que son parte. Como ejemplo clarificador para el lector, señaló que “si se llevare algo de nuestro globo terráqueo al globo de la Luna, no había de quedarse allí sino volverse a nosotros, así cualquier cosa que sacasen de la Luna o de otra cualquiera estrella, había de gravitar y caer en el todo de que era parte”, sin embargo, en otra sección de la misma obra, se adhiere a la novedosa interpretación de Galileo sobre las manchas solares, considerando que eran fenómenos naturales presentes en la superficie del Sol. Es una lástima que otros escritos sobre ciencias exactas de este personaje se hayan perdido, pues ello impide juzgar objetivamente el verdadero nivel de modernidad científica de Sigüenza y Góngora, sin embargo hay referencias de otros autores que indican que tuvo interés en el estudio de las propiedades magnéticas y de que realizó algunos experimentos de óptica.

Es interesante notar que al margen de los cuestionamientos filosóficos e ideológicos ocurridos en la Nueva España, al finalizar la décimo séptima centuria arribaron a ella algunas ideas novedosas en física, pero lo hicieron a través de libros técnicos, que muy probablemente por ese carácter no fueron considerados peligrosos por los guardianes de la ortodoxia. En las librerías de la capital novohispana estaban a la venta textos como el *Mechanicorum libri octo* de Paolo Casati, el *Telescopium*:

<sup>4</sup> La UNAM ha publicado una edición moderna.

<sup>5</sup> *Libra Astronómica y Filosófica*, apartado 88.

Marco A. Moreno-Corral, M. Estela de Lara A.

*sive ars perficiendi novum illud Galilaei virorum instrumentum* escrito por Girolamo Sirturo, o el *De beghinselen des Waterwichts* de Simon Stevin [7], pero también se encontraban obras clásicas como *De magnitudinibus et distantis solis et lunae* de Aristarco de Samos, la *Mechanici: liber de mechanis bellicis* de Herón de Alejandría, o compilaciones como la que contenía textos como la *Archimedis Opera*; el *Apolloni Pergai Conicorum*; Y el *Theodosii Sphaerica*, obras que fueron redescubiertas por los europeos de los siglos XVI y XVII y que sirvieron para reintroducir entre ellos parte de la mecánica, la hidráulica, la óptica desarrollada por los griegos.

## V. EL SIGLO DE LA RAZÓN

Durante el primer tramo del siglo XVIII continuó privando la visión aristotélica de la naturaleza entre los estudiosos novohispanos. Al fundarse el colegio de la Santísima Trinidad en la ciudad de Guanajuato, los jesuitas, que siempre fueron considerados una orden de avanzada en lo que toca a la ciencia, impartieron ahí la cátedra de Artes, que se cursaba en tres años y era dictada en latín. Los novicios y laicos que a ella asistían, estudiaban lógica, metafísica y física, de acuerdo a los libros de Aristóteles [15], pero ya entonces hubo intentos de modernización por parte de algunos pocos personajes, sobre todo en lo tocante a fenómenos astronómicos [16]. Como parte de esa transición, deben mencionarse los cursos que entre 1762 y 1765 impartió el jesuita Francisco Xavier Clavijero en Morelia y en Guadalajara sobre filosofía, que incluyeron lecciones de física no aristotélica. Del contenido de aquellos cursos se ha perdido la parte correspondiente a la física general, que sería donde fundamentó esta disciplina y solamente se ha conservado el manuscrito de la *Physica particularis* [17], que fue donde se ocupó de los sistemas del mundo, favoreciendo el heliocéntrico copernicano, pero todavía lo consideró como un modelo y no como una realidad física, ya que las prohibiciones de la Iglesia lo obligaban a seguir la ortodoxia [18].

En la segunda mitad de aquella centuria el fenómeno cultural de la Ilustración se vivió en México, gracias en parte a la política de cambio impuesta por el monarca español Carlos III. A partir de entonces se puede hablar ya de enseñanza de la física no aristotélica en nuestro país, pero debe quedar claro que no se hizo en forma generalizada, sino que se debió a los esfuerzos de unos cuantos individuos. Uno de ellos fue Joaquín Velázquez de León, criollo novohispano ligado a familias de mineros, que se interesó seriamente por la astronomía, la geografía, las matemáticas, la cartografía, la minería y la metalurgia, así como por la enseñanza de esas ciencias. Sabemos por Humboldt [19] que a temprana edad, cayeron en sus manos las obras de Newton y Bacon, que aprovechó para tener una visión moderna de la ciencia y la filosofía. Uno de sus biógrafos [20] escribió citando a contemporáneos de Velázquez de León que “a más del estudio de la Jurisprudencia que era su principal profesión como

Abogado de la Real Audiencia, se ocupaba, sin embarazarse, en los de la Química y Metalurgia, en el de Física experimental, Historia Natural y Ciencias Matemáticas”. En 1765 ganó la cátedra de Astronomía y Matemáticas de la Real y Pontificia Universidad de México, que comenzó a transformar. Desgraciadamente no pudo concluir ese proceso, pues recibió diferentes encomiendas del gobierno virreinal y tuvo que alejarse de la docencia, sin embargo hubo un aspecto de la enseñanza de la física en el que sí trascendió; nos referimos al papel que jugó para la creación del Real Seminario de Minería de la Ciudad de México. Gracias a su preparación y experiencia, logró además del nombramiento de primer director, elaborar los programas de enseñanza de esa institución, en los que la física, la química y las matemáticas, entendidas como ahora se hace, tuvieron cabida permanente.

Otro personaje notable por lo que aquí se trata, fue el sacerdote Juan Benito Díaz de Gamarra y Dávalos, quien a principios de la década de 1770 era rector del Colegio de la Congregación del Oratorio, situado en San Miguel Allende, Guanajuato. En 1774 publicó para el uso de sus alumnos el texto *Elementa recentioris philosophiae* formado por dos volúmenes; el primero dedicado al estudio de la filosofía, mientras que el segundo lo enfocó a estudiar la “física tanto general como particular”. En otro trabajo hemos analizado esta parte del libro de Gamarra [21], por lo que ahora solamente resumiremos su contenido: Elementos de la Física. Prolegómenos; Acerca de la Naturaleza y acerca de los principios de los cuerpos; Acerca del movimiento; Electrología<sup>6</sup>; Acerca de las cualidades de los cuerpos; De la composición del mundo elemental y los cuerpos terrestres, de los meteoros y de las plantas. Debe agregarse que en Acerca de la Naturaleza hizo una presentación donde además de descartar ideas antiguas, discutió “el sistema newtoniano” y explícitamente enseñó que la “idea principal del sistema newtoniano es la fuerza de atracción”. Es importante hacer notar, que la física que Gamarra explicó a sus discípulos, no fue solamente teórica, sino que por primera vez hallamos en su obra la certeza de que hacía experimentos para los alumnos. En efecto al final de ella agregó varias páginas con ilustraciones de instrumentos utilizados para probar lo que discutía en el texto. Es notable ver los aparatos ahí ilustrados, sobre todo en la figura V, donde se representó cargando eléctricamente una “botella de Leiden” con ayuda de una máquina electrostática de dimensiones considerables. Se sabe además, gracias a la tesis que uno de sus alumnos presentó en la Real y Pontificia Universidad de México, titulada *Scholae philosophiae* [22], que Gamarra estaba en verdad interesado en los experimentos sobre electricidad, pues tenía su propia teoría eléctrica [23].

El médico Ignacio Bartolache fue otro de aquellos novohispanos que se interesó en la nueva física. En 1772 comenzó la publicación de un periódico científico en la capital novohispana que llevó por título *Mercurio volante con noticias importantes y curiosas sobre varios asuntos de Física y Medicina* [24]. En el segundo número se ocupó de

<sup>6</sup> Este era el nombre que entonces se daba a los estudios sobre la electricidad.

la verdadera idea de la buena Física, explicando a los lectores lo que en realidad era esta disciplina científica, que diferenció de lo que enseñaban en los cursos de filosofía de la época. En el tercer número escribió una *noticia y descripción de los instrumentos más necesarios y manuales que sirven a la buena física*, donde describió con amplitud los principios y el funcionamiento del termómetro, mientras que en el número siguiente trató lo relativo al barómetro. Al describir esos aparatos mostró que conocía bien la literatura especializada de su tiempo, pues citó a varios autores y obras, sobre todo de origen francés, que se habían ocupado de esos temas. Es importante hacer notar que al hablar de esos aparatos, Bartolache explícitamente indicó que “el año pasado de 67 expliqué y demostré todo lo perteneciente a la construcción del termómetro y barómetro a muchos jóvenes que frecuentaban el aula de matemáticas en la Real Universidad”. En efecto, Bartolache sustituyó a Velázquez de León cuando tuvo que viajar por motivos oficiales, y de acuerdo con él, buscó también modernizar la enseñanza que se daba en la cátedra de Astronomía y Matemáticas, sin embargo hubo oposición a ese proceso y ambos personajes terminaron alejándose de la Universidad, lo que sin duda fue un revés para la enseñanza de la física.

Un personaje singular en la cultura novohispana del último tercio del siglo XVIII fue Antonio Alzate y Ramírez, quien a través de sus publicaciones *Asuntos varios sobre ciencias y arte* (1772-1773); *Observaciones sobre la física, historia natural y artes útiles* (1787-1788) y las *Gacetas de Literatura de México* (1790-1797), hizo llegar al público información sobre diferentes temas científicos, entre los que se hallan varios de física. En sus escritos arremetió frecuentemente contra la astrología y la física aristotélica e insistió con sus lectores de que había que ocuparse de la “buena física”. En su afán por desmitificar los fenómenos naturales, publicó extensos artículos en los que se ocupó de diversos campos de estudio de la física, como el que tituló *Observaciones físicas sobre el terremoto acaecido el cuatro de abril del presente año*, donde tocó temas de geología y geofísica, mostrando un amplio conocimiento de los autores e ideas más modernas de su época, como las de Buffon y su *Théorie de la Terre*. Fue notable el énfasis que Alzate puso siempre en el aspecto experimental de física, por lo que trató las aplicaciones que ésta tenía cotidianamente, como el funcionamiento de diferentes máquinas, comentando su utilidad. Ese fue el caso del “barreno inglés” usado en labores de minería, de un “trillador de algodón”, de una pulidora mecánica de acero, o la descripción que hizo de su invento del “flotador” u obturador hidráulico [25].

El 14 de noviembre de 1789 desde diversas partes del virreinato de la Nueva España se pudo ver una aurora boreal, incluso desde la Ciudad de México. Fenómeno tan inusual motivó la publicación de varios documentos donde sus autores trataron de explicar qué eran esos fenómenos. Uno de ellos fue Antonio de León y Gama, quien ya para aquella fecha era bien conocido entre los novohispanos como astrónomo y matemático. Aunque este personaje no ejerció la docencia, a través de sus escritos contribuyó al proceso de renovación científica que entonces ocurría en nuestro país. En la *Disertación física sobre la materia y*

*Génesis y evolución de la enseñanza de la física en el México colonial formación de las auroras boreales* [26], León y Gama discutió un tema que entonces estaba en la frontera del conocimiento, pues no existía explicación física sobre lo que ocasionaba esos fenómenos, aunque existían diferentes hipótesis apoyadas en lo que entonces se sabía de electricidad atmosférica. En su discusión, nuestro autor, que nunca salió de la capital novohispana y sus alrededores, mostró conocer bien la literatura científica sobre el tema, así lo vemos citando a Mussembroek, Franklin, Cassini y a Mairán, autor de un tratado sobre las auroras. En su análisis estimó la altura en la atmósfera a la que ocurrió aquel suceso y discutió la coloración de ese fenómeno, para lo que citó conceptos ópticos newtonianos y habló de los gases y la densidad atmosférica. La explicación de León y Gama, a pesar de todos sus intentos por considerar los diferentes aspectos físicos que podrían estar involucrados en la formación de las auroras, fue tan buena o tan mala como cualquier otra producida en aquella época, en que nada se sabía sobre la verdadera naturaleza de esos fenómenos, pero sirve para mostrar el grado de comprensión de la física alcanzado por algunos novohispanos al término del siglo XVIII. Antes de concluir esta sección, debe mencionarse igualmente el esfuerzo hecho por Joseph Dimas Rangel, quien también elaboró una teoría sobre las causas de las auroras, solo que él lo hizo usando las propiedades inflamables del hidrógeno [27].

Seguramente buena parte de los conocimientos científicos de éstos y otros novohispanos, los obtuvieron del estudio directo de obras europeas que llegaban a nuestro territorio. Tanto Bartolache como León y Gama poseyeron bibliotecas [28 y 29] en las que además de textos ortodoxos, se hallaban libros de ciencia moderna como las obras de los Bernoulli, los *Principia* y la *Opticks* de Newton, las *Leçons de Physique expérimentale* y los *Recherches sur les causes particulières des phénomènes électriques* de Nollet, el *Traite d'Optique* de Lacaille, las obras de Boyle, el *Traité de Physique expérimentale et mathématique* de Biot, la *Description et usage d'un cabinet de physique expérimentale* y las *Leçons élémentaires d'Astronomie géométrique et Physique* de Sigaud de la Fond, así como los *Elémens de la Philosophie de Neuton* de Voltaire además de otros, entre los que también había buen número de textos modernos de matemáticas y química.

## VI. LOS CURSOS LIBRES

Al ver la sólida preparación que estos personajes tuvieron en ciencias exactas, surge la pregunta ¿dónde estudiaron? Se sabe que aunque la Real y Pontificia Universidad de México contó desde 1637 con la cátedra de Astronomía y Matemáticas, la mayoría de las veces estuvo a cargo de personajes que seguían inmersos en las ideas emanadas de la filosofía aristotélica, así que no fue ahí. Lo que sí se sabe, es que al mediar la décimo octava centuria, además de las bien surtidas bibliotecas conventuales, había en la Nueva España otras de carácter privado como la de Bartolache o la de León y Gama, en las que se encontraban modernos e

Marco A. Moreno-Corral, M. Estela de Lara A.

importantes textos de ciencia. Como ya se dijo, Humboldt informa que Velázquez de León las estudió en forma autodidacta, pero sabemos más; que siendo estudiante en el Colegio de Todos Santos de la capital novohispana, fundó ahí una “academia de matemáticas”, donde los jóvenes interesados en las ciencias físicas, pudieron aprovechar extracurricularmente sus conocimientos. Por su parte Alzate mencionó que “... me dediqué por genial inclinación a las ciencias naturales, auxiliado sólo de mi aplicación y manejo de los libros, careciendo absolutamente de la instrucción o ayuda de maestros. Logradas con mi continuada lectura y constancia, algunas ideas, tuve que fabricar por mí mismo los más instrumentos necesarios para el uso de la física experimental, y práctica de la física matemática” [30]. Otra noticia sobre cómo se enseñó la física, se encuentra en un manuscrito que el marqués de Villafonte Moncada escribió en la capital novohispana en 1791 [31], “para instrucción de su hijo”. Ese documento titulado *Exposición de los elementos de Newton* fue publicado recientemente, lo que ha permitido ver que se trató de un verdadero curso elemental de física newtoniana, que incluyó aspectos de la mecánica y de la óptica del físico inglés [32].

## VII. BOSQUEJOS DE CAMBIO

El 3 de noviembre de 1792 inició sus labores académicas la Real y Literaria Universidad de Guadalajara [33], que fue la segunda establecida con ese carácter en territorio de la Nueva España. El proceso que dio lugar a esta institución fue de muchos años y en él participó un crecido número de interesados. En ella se buscó establecer las cátedras tradicionales que entonces existían en las universidades españolas, aunque hubo quien pidió que se enseñara Filosofía Experimental y también “Aritmética, Matemáticas, Astrología, Historia, Cirugía y otras”. La actividad de esa universidad quedó regulada por sus Constituciones. En ellas hay algunas menciones a la física, que muestran que al menos en el papel, se pensó que ahí se enseñara en su faceta moderna, pues se menciona esta disciplina entre las que deberían ofrecerse cuando se tuvieran fondos para ello. Es de interés hacer notar que para la enseñanza de la física se señalaba explícitamente el texto de “Jacquier”, que no era otro que las *Intitutions philosophiae* publicadas en 1757 por Francois Jacquier, obra en seis volúmenes que analiza la mecánica, la electricidad, el calor, la luz, los fluidos y la elasticidad entre otros temas. Aquella posible cátedra se ubicó en la Facultad de Medicina y se señaló que todos los cursantes asistirían a los actos de “Física experimental”.

## VIII. LA INSTITUCIONALIZACIÓN

Una institución de aquella época de la que sí se tiene mucha información comprobable es el Real Seminario de Minería [34], cuya creación fue promovida por el gremio de

mineros de la Nueva España, particularmente por Velázquez de León, quien a través de las *Representaciones* que elaboró desde 1774, fijó el tipo de estudios que ahí se harían. Ante la carencia de gente preparada en el terreno de la explotación minera, escribió que “No hay más remedio que el de crearlos; y para ello es preciso erigir un Seminario Metálico, que podría formarse de un Director, hombre sabio en las Matemáticas y en la Física Experimental, Química y Metalurgia, y profundamente instruido en la Minería práctica de la Nueva España: de cuatro Maestros, el primero que enseñase en dos años, y en nuestro idioma español, la Aritmética, la Geometría y la Trigonometría y el Álgebra lo suficiente para su aplicación a las referidas. El segundo, en el mismo tiempo y lenguaje, deberá enseñar la Mecánica de maquinarias, la Hidrostática e Hidráulica, la Aerometría y la Pirotecnia en la parte aplicable a la minería. El tercero, un Curso Elemental de Química Teórica y Práctica y el cuarto la Mineralogía y Metalurgia” [35]. Ese personaje fue nombrado su primer director, pero murió antes de que el Colegio iniciara sus labores en 1792.

Aún antes de que comenzaran los cursos, Fausto de Elhuyar nombrado director tras la muerte de Velázquez de León, se preocupó porque en el Colegio fuera una realidad el estudio experimental de las ciencias, por lo que en febrero de 1790 ordenó desde la capital novohispana, la compra de aparatos modernos para formar el “elaboratorio de Física”, por lo que proporcionó una lista muy completa de instrumentos a los proveedores europeos, tomada del texto *Description et usage d'un cabinet de physique experimentale* de Sigaud de la Fond [36]. De igual manera solicitó los libros de física que consideró necesarios para formar la biblioteca del Colegio, entre los que pueden citarse además de la obra anterior, las *Leçons de physique experimentale* de Nollet, el *Cours de physique* de Musschenbroek, el *Cours de physique experimentale* de Desaguliers, *Les entretiens physiques* de Regnault, los *Eléments de physique mathématique* de Gravesande, entre otros [37]<sup>7</sup>. Ante la falta de un texto adecuado a lo que de física se enseñaba en esa institución, se comisionó al profesor Francisco Antonio Bataller para que lo escribiera. Tras varios años produjo los *Principios de Física Matemática y Experimental*, obra que quedó manuscrita y así ha llegado hasta el presente. Este primer texto mexicano exclusivamente de física, está formado por cinco volúmenes, de los que uno está perdido [38]. Los otros son: Propiedades Generales de los Cuerpos; De la mecánica de los sólidos; De la hidrostática; De la óptica.

El avance de los estudiantes del Colegio de Minería se medía mediante exámenes realizados ante personas interesadas incluso ajenas a la institución. En la obra citada de Ramírez puede leerse en la parte correspondiente a 1802 que en “Octubre 21 el Profesor D. Salvador Sein, presenta el Acto Público de Cálculo Diferencial e Integral y Física, que sustentan los alumnos Juan José Rodríguez y Manuel de la Llera”. Dos años después encontramos que en “Octubre 16 sustentan el Acto de Física, presentado por D. Salvador Sein, los alumnos Lorenzo Obregón y Juan María

<sup>7</sup> Algunos de estos textos todavía se pueden encontrar en la Antigua biblioteca del Palacio de Minería de la Ciudad de México.

Muñoz". Diferentes estudios y autores han mostrado que fue en el Real Seminario de Minería de la Ciudad de México, donde al finalizar el periodo colonial comenzó la enseñanza formal y regular de la física en nuestro país. Sin duda fue ahí donde los jóvenes novohispanos finalmente entraron en contacto directo con la ciencia surgida de la Revolución Científica, razón por la que el Dr. José Joaquín Izquierdo, pionero de los estudios del desarrollo de la ciencia mexicana, llamó acertadamente a esa institución la *Primera casa de las ciencias en México* [39].

## VIII. COMENTARIOS

Desde la lejana fecha de 1540 en que fray Alonso de la Veracruz comenzó a explicar el mundo físico de acuerdo a la visión aristotélica, hasta la puesta en marcha del Real Seminario de Minería en 1792, pasaron 252 años, periodo en el que como se ha mostrado aquí, siempre hubo en nuestro país enseñanza de la física; primeramente con la antigua concepción heredada de los griegos, para, tras un largo y muchas veces complicado proceso evolutivo, llegar en el último tercio del siglo XVIII a la etapa de enseñanza de la visión emanada de la Revolución Científica.

Debe recordarse que fue precisamente durante buena parte de ese periodo, que la física cambió para llegar a ser la ciencia experimental que ahora es, así que el desarrollo que tuvo en el México colonial, si bien fue limitado por la circunstancia de estar este país en la periferia del desarrollo cultural, fue paralelo a lo que pasó en Europa.

Una mirada rápida a los textos de física presentes en bibliotecas como la de Bartolache, Gamarra o León y Gama, dejan ver que un número importante de ellos trataba explícitamente de los aspectos experimentales de esta disciplina, lo que sin duda significó un cambio hacia la modernidad en el proceso de enseñanza de la física en nuestro país.

Por otra parte, trabajos como el de Gamarra sobre las causas de la electricidad o los de León y Gama y Dimas Rangel relativos al origen de las auroras boreales, muestran que en la Nueva España hubo personajes que usando los conocimientos científicos de su época, trataron de construir teorías racionales sobre los fenómenos físicos. Este incipiente proceso de investigación, se vio truncado con los cambios y hechos violentos ocurridos cuando México logró independizarse, sin embargo muestran lo que entonces comenzaban a lograr nuestros científicos. El ejemplo más claro de esos logros, fue el descubrimiento hecho en 1801 por Andrés Manuel del Río del *Eritronio*, identificado y aislado por él en los laboratorios del Colegio de Minería [40], elemento químico que fue el primero descubierto en el continente americano.

En este trabajo se ha mostrado que conforme el siglo XVIII se fue acercando a su fin, surgieron en México personajes que pugnaron por modernizar la enseñanza e introducir como parte de ella, las disciplinas científicas que entonces se desarrollaban en Europa. La resistencia al cambio fue mucha y en considerables ocasiones sus representantes

*Génesis y evolución de la enseñanza de la física en el México colonial* lograron imponerse y retardar el proceso de asimilación de los nuevos paradigmas científicos, lo que debe servir de lección, pues aunque a otra escala, actualmente en México ocurren hechos similares.

## REFERENCIAS

- [1] Cerda Farías, I. *El siglo XVI en el pueblo de Tiripetío*, (Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, 2000).
- [2] En custodia en el Templo de San Agustín de la ciudad de Morelia, Michoacán.
- [3] *PHYSICA SPECULATIO Aedita per R. P. F. Alphonsvm a Vera Cruce, Avgustinianæ familiæ Prouintialem, atrium & sacrae Theologiæ Doctorem atque cathedræ primæ in Academia Mexicana in noua Hispania moderatorrem. Accesit compendium Spheræ Campani ad complementum Tractatus de coelo*. Excudebat Mexici Ioannes Paulus Brissensis. Anno Dominicæ incarnationis 1557.
- [4] Heredia Correa, R., *Fray Alonso de la Vera Cruz breve semblanza biobibliográfica*. En *Del Cielo*. Fray Alonso de la Vera Cruz. María de la Paz Ramos Lara (coordinadora). (Ciencia y Tecnología en la Historia de México. CIICH. UNAM. México, 2012).
- [5] Moreno Corral, M. A., *La física speculatio, el primer libro de física escrito y publicado en el continente americano*, Revista Mexicana de Física E **50**, 74-80 (2004).
- [6] Churruca Peláez, A. *Primeras fundaciones jesuitas en Nueva España 1572-1580*. Biblioteca Porrúa No. 75. México, 1980.
- [7] Moreno Corral, M. A. *Implantación de la ciencia europea en el México colonial. Siglos XVI y XVII*. Ensenada, Baja California, 2004.
- [8] Moreno Corral, M. A., Chavarría-K, C, Appenzeller, I. "Enrico Martínez. Ein Astronom aus Hamburg in Neuspanien. Sterne und Weltraum **42**, 44-46 (2003).
- [9] Moreno Corral, M. A., *La Astronomía en el México del siglo XVII*, Ciencias **54**, 552-59 (1999).
- [10] Trabulse, E., *El círculo roto*, Lecturas Mexicanas/54. (Fondo de Cultura Económica, México, 1984).
- [11] Romero de Terreros y Vinet, M., *Un bibliófilo en el Santo Oficio*, (Librería de Pedro Robredo, México, 1920).
- [12] Jiménez Rueda, J., Catálogo de los libros que se le hallaron a Melchor Pérez de Soto, vecino de esta ciudad, y obrero mayor de la Santa Iglesia Catedral de ella, Documentos para la Historia de la Cultura en México. Archivo General de la Nación, (UNAM, México, 1947).
- [13] Trabulse, E., *Ciencia Mexicana*. Textos dispersos ediciones, (México, 1993).
- [14] Moreno Corral, M. A., Berrón Mena, T., Sigüenza y Góngora: un científico de transición, *Quipu Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología* **13**, 161-176 (2000).
- [15] López Sarrelague, D., *Los orígenes de la Universidad de Guanajuato*, (UNAM, México, 1963).

Marco A. Moreno-Corral, M. Estela de Lara A.

- [16] Medina, J. M., *Destierro de temores y sustos, vanamente aprehendidos en el eclipse quasi total futuro, del año de 1752*, (Puebla, 1751).
- [17] Navarro, B., *Introducción General. Francisco Xavier Clavijero*, (UMSNH, Morelia, 1995).
- [18] Moreno Corral, M. A., *Copérnico y el heliocentrismo en México*, (CICSUG. Guanajuato, 2004).
- [19] Humboldt, A., *Ensayo Político sobre el Reino de la Nueva España*. Sepan cuantos Núm. 39, (Editorial Porrúa. México, 2002).
- [20] Ramírez, S., *Joaquín Velázquez de León. Andrés Manuel del Río*, (SEFI. UNAM. México, 1983).
- [21] Moreno Corral, M. A., *Los Elemento de Filosofía Moderna*, Boletín de la Sociedad Mexicana de Física **27-1**, 60-61 (2013).
- [22] Fernández del Rincón, J. I., *Lecciones de Filosofía*, (UNAM. México, 1994).
- [23] Moreno Corral, M. A., Un texto mexicano de física del siglo XVIII, Revista Mexicana de Física E **52**, 104-110 (2006).
- [24] Bartolache, J. I., *Mercurio volante*. Biblioteca del estudiante universitario, (UNAM. México, 1979).
- [25] Sánchez Flores, R., Inventiones hidráulicas de Antonio Alzate". En: *Historia de la Tecnología e Invención en México*, (Fomento Cultural Banamex A. C. México, 1980).
- [26] León y Gama, A., *Disertación física sobre la materia y formación de las auroras boreales*, (Felipe de Zúñiga y Ontiveros, México, 1790).
- [27] Moreno Corral, M. A, López Molina, M. G., Experimental Chemistry in Mexico at the end of the XVIII Century. Comments on the *Discurso físico sobre la formación de las Auroras Boreales* by José F. Dimas Rangel, Bol. Soc. Quím. Mex. **2**, 63-66 (2008).
- [28] Moreno, R., La biblioteca de Antonio de León y Gama. En *Ensayos de bibliografía mexicana*, (UNAM. México, 1989).
- [29] Sánchez Flores, R., José Ignacio Bartolache. El sabio humanista a través de sus bienes, sus libros e instrumentos de trabajo, Boletín del Archivo General de la Nación, Tomo XIII, 1972-1976.
- [30] Alzate, J. A., *Memoria y ensayos*. Edición e introducción Roberto Moreno. Biblioteca del estudiante universitario/103, (UNAM. México, 1985).
- [31] Villafonte Moncada, P., *Exposición de los elementos de Newton*. Estudio Preliminar y Notas María Eugenia Ponce Alcocer, (Universidad Iberoamericana, México, 2006).
- [32] Moreno Corral, M. A., *La Exposición de los Elementos de Newton*, Boletín de la Sociedad Mexicana de Física **25-3**, 201-202 (2011).
- [33]. Razo Zaragoza, J. L., *Crónica de la Real y Literaria Universidad de Guadalajara y sus primitivas constituciones*, (UdeG e INAH, Guadalajara, 1963).
- [34] Díaz y de Ovando, C., *Los veneros de la ciencia mexicana*. Tres tomos, (Facultad de Ingeniería. UNAM. México, 1998).
- [35] Ramírez, S., *Datos para la historia del Colegio de Minería*, (SEFI. UNAM. México, 1982).
- [36] Moreno Corral, M. A., de Lara Andrade, M. E., Escamilla G. F. M., *El primer laboratorio de física en México*, Boletín de la Sociedad Mexicana de Física **18-1**, 27-33 (2004).
- [37] Ramos Lara, M. P., *Difusión e institucionalización de la mecánica newtoniana en México en el siglo XVIII*, (BUAP. México, 1994).
- [38] Moreno, R., *Catálogo de los manuscritos científicos de la Biblioteca Nacional*, Boletín de Investigaciones Bibliográficas, (UNAM. México, 1969).
- [39] Izquierdo, J. J., *La primera casa de las ciencias en México*, (Ediciones Ciencia. México, 1958).
- [40] Sandoval Vallarta, M., El descubrimiento del Vanadio, *Manuel Sandoval Vallarta. Obra científica*, (UNAM. Instituto Nacional de Energía Nuclear. México, 1978).

# La persistencia de los deferentes y los epiciclos a lo largo de la historia de la astronomía



**José Antonio Peralta y Porfirio Reyes López**

*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional, Miguel Othón de Mendizabal s/n, Edificio 9 U. P. Adolfo López Mateos, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07738 México D. F.*

**E-mail:** peralta@esfm.ipn.mx

(Recibido el 25 de Marzo de 2014, aceptado el 28 de Agosto de 2014)

## Resumen

**Resumen:** Se hace un breve repaso histórico de las diferentes formas como los astrónomos han intentado reproducir el movimiento de los planetas comenzando con los antiguos griegos y terminando con la deducción científica de estas trayectorias por Newton. Se muestra que el uso de los epiciclos y deferentes para describir el movimiento de los planetas en función del tiempo, que se creía un recurso obsoleto luego del modelo tan simple de Kepler que asignaba a los planetas trayectorias elípticas con el Sol en uno de sus focos, reaparece cuando a partir de las leyes de la mecánica y la teoría de la gravitación de Newton se intenta describir la posición de los planetas en función del tiempo y no en función del espacio como lo hizo Kepler. También se muestra que a partir de un modelo de computadora de la superposición de deferentes y epiciclos este modelo es equivalente al uso de una serie de Fourier.

**Palabras clave:** Planetas, Tolomeo, serie de Fourier.

## Abstract

A brief historical review of the different forms how the astronomers have tried to reproduce the movement of the planets, starting with the ancient Greeks and ending with the Newton's scientific deduction of these trajectories. It shows the use of epicycles and deferents to describe the motion of the planets in terms of time, obsolete resource after Kepler simple model, that relied the planets on an elliptical path with the Sun at one focus, reappeared since the mechanic's laws and the Newton's gravitation theory, trying to describe the position of the planets in terms of time and not on a space as Kepler did. It also shows that since a computer model of overlapping deferents and epicycles, is equivalent to using a Fourier series.

**Keywords:** Planets, Ptolemy, Fourier series.

**PACS:** 01.65.+g, 01.70.+w, 01.75.+m

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Si hoy fuésemos capaces de pasarnos toda una noche observando a las estrellas, veríamos que éstas se desplazan lentamente al unísono girando en círculos concéntricos alrededor de la Estrella Polar, pero que en noches sucesivas su posición a la misma hora con respecto a un punto de referencia fijo sobre la Tierra, va cambiando hasta que al cabo de un año vuelven a su misma posición. Los antiguos griegos - luego de superar la etapa de representación mítica de los fenómenos naturales en la cual se hacían intervenir seres sobrenaturales para explicarlos - propusieron en principio un modelo muy simple del Universo en el cual la Tierra estaba en el centro y en la parte más externa las estrellas fijas sobre dos esferas, una esfera que gira con un período de 24 horas alrededor de este centro, y otra que gira una vez al año. Este modelo tan sencillo se vio cuestionado por la consideración del movimiento del Sol y de la Luna así como de los 5 planetas que se conocían entonces (Marte, Mercurio, Júpiter, Venus y Saturno), los

cuales eran astros que no tenían una posición fija con respecto al marco de las estrellas, sino que cada determinado tiempo, luego de mantenerse moviendo hacia el este, retrocedían para luego proseguir su camino original; Mercurio lo hacía cada 116 días, Venus cada 584, Marte cada 780, Júpiter cada 399 y Saturno cada 378 días. Esta llamada "retrogradación" tenía las siguientes características: 1) durante ella los planetas aumentaban de brillo, 2) estos astros de comportamiento singular estaban situados en una banda (la banda del Zodiaco) alrededor de la Eclíptica que era la trayectoria que seguía el Sol a lo largo de un año, y 3) su retrogradación podía ocurrir cuando estaban en oposición con el Sol o cuando estaban en conjunción [1].

## II. LA PREGUNTA DE PLATON

Tal como ocurre con toda anomalía, este raro comportamiento rompió el paradigma tan sencillo que

previamente se había elaborado sobre el modelo del Universo, y entre los muchos aspectos trascendentes de la obra de Platón, hay que adjudicarle que supo formular con precisión una pregunta en cuya respuesta trabajaron arduamente durante siglos y siglos algunas de las mentes más brillantes dedicadas al estudio de los astros: *¿Cuáles son los movimientos circulares uniformes cuya superposición reproduce el movimiento observado de los planetas?* [1].

En cierto modo que se recurriera a los movimientos circulares para explicar los movimientos planetarios es natural, dado el carácter divino que se le atribuía al círculo, por otra parte, la pregunta en sí, en caso de que los observadores de los cielos aceptaran responderla, restringía el campo de las respuestas ya que había que lanzarse a la búsqueda específica de las diferentes combinaciones de movimientos circulares uniformes que reprodujeran el movimiento de las estrellas y los planetas, y no divagar con otro tipo de combinaciones. Tan precisa es la pregunta que se ha dicho que tal pregunta conforma lo que hoy se llamaría un auténtico programa de investigación [2]. La pregunta y sus respuestas nos hace reflexionar una vez más cuán importante papel juega en el desarrollo de la ciencia “la pregunta”, en efecto, cualquier investigador sabe que el papel de una investigación o de una serie de observaciones, como es el caso analizado, no es solo descubrir nuevos conocimientos, sino también generar nuevas preguntas, y que mientras estas sean más precisas y densas en significado más incitarán a futuras investigaciones. Es así como se mantiene la dinámica del pensamiento, mediante una interminable cadena de preguntas y respuestas, la respuesta da por terminada una etapa, la pregunta nos lanza hacia adelante.

### III. LAS RESPUESTAS

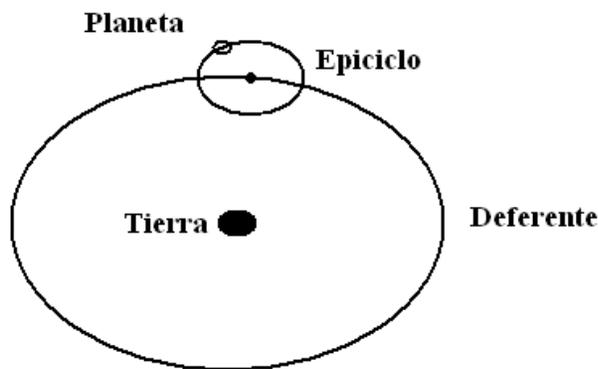
#### A. Eudoxo y Calipo

Eudoxo y Calipo [3] fueron los primeros astrónomos griegos que para responder a la pregunta de Platón propusieron un modelo matemático, este consistía en una combinación de esferas concéntricas que rotaban a diferentes velocidades angulares y con respecto a diferentes ejes, de manera que cada eje pivotara sobre la esfera inmediatamente superior. Este modelo reproducía la retrogradación de los planetas, pero tenía un defecto esencial: al moverse los planetas sobre esferas concéntricas con respecto a la Tierra no había forma de explicar sus cambios de brillo ya que siempre, por definición, se mantenían a la misma distancia de su centro. Pese a ello, Aristóteles retomó este modelo, lo refinó y su modelo estuvo compuesto por 56 esferas.

#### B. El modelo de Tolomeo

Fue posteriormente en Alejandría en donde se ensayaron otro tipo de superposiciones, recordemos que en este lugar *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 3, Sept. 2014*

trabajaron los más grandes astrónomos de la antigüedad, tales como Aristarco, quien propuso al Sol como centro del Universo, y a Hiparco quien elaboró un mapa del cielo en donde estaban clasificadas más de 1000 estrellas, con su posición angular y clasificadas de acuerdo a su brillo aparente [4]. Fue en Alejandría en donde se dio la respuesta más aceptada por la posteridad a la pregunta de Platón por Tolomeo en su libro del *Almagesto*; esta propuesta constaba básicamente de un círculo principal llamado deferente y de un conjunto de círculos secundarios llamados epiciclos: el primer epiciclo tenía un centro que se movía sobre el perímetro del deferente, el segundo epiciclo un centro que se movía sobre el primero, y así sucesivamente, tal como se observa en la figura 1.



**FIGURA 1.** Superposición de un deferente y un epiciclo para representar el movimiento de un planeta.

Debido a que su modelo inicial de movimientos circulares no reproducía con suficiente exactitud la evolución temporal de las posiciones de los planetas hubo que introducir nuevos artificios, y el modelo final de Tolomeo quedó conformado de la siguiente manera: el deferente era un círculo pero su centro no coincidía con la Tierra sino que rotaba sobre otro círculo cuyo centro estaba a cierta distancia de la Tierra, por otra parte introdujo el ecuante, un punto desde el cual el movimiento de los centros de los epiciclos se movían con velocidad uniforme. Este refinamiento en realidad era equivalente a agregar un epiciclo más y a sumar un término constante, así, el modelo finalmente se compuso con 84 círculos [1].

Los astrónomos árabes durante la Edad Media, como por ejemplo Abu Abdullah Al-Battani, famosos astrónomo y matemático quien nació en 858 d.C. [4], retomaron las bases de este modelo, pero le hicieron algunas modificaciones de detalle, con todo, el modelo tolemaico fue el que fue aceptado en general hasta antes de la aparición del nuevo modelo propuesto por Copérnico.

#### C. El modelo de Copérnico

Como es sabido, el modelo de Copérnico sacó a la Tierra del centro del sistema planetario y puso en su lugar al Sol, este modelo explicaba cualitativamente el comportamiento

de los planetas ya que los hacía retrogradar, durante este retroceso, dado que la distancia relativa entre la Tierra y los demás planetas cambiaba a lo largo del tiempo, producía un aumento del brillo cuando esta distancia era mínima, su cercanía de la Eclíptica se explicaba porque todos los planetas se movían aproximadamente en un mismo plano, y la oposición o conjunción de las retrogradaciones se explicaba porque unos planetas eran internos con respecto a la órbita de la Tierra y otros externos. Esto en el plano cualitativo, pero en el plano cuantitativo se presentaban serias divergencias y esto empujó a Copérnico para lograr un acuerdo entre su modelo y los datos empíricos a recurrir una vez más al uso de los epiciclos para conformarse finalmente con 36 círculos [1]; así pues el modelo de Copérnico era en esencia semejante al de Tolomeo, excepto que colocaba en su centro no a la Tierra sino al Sol.

#### D. Kepler y Newton

Kepler, luego de un arduo trabajo de manipulaciones numéricas con los datos legados por Tycho Brahe [5], vino aparentemente a hacer a un lado toda la sofisticación de los antiguos modelo al proponer sus 3 famosas leyes:

1. Todos los planetas se desplazan en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
2. El radio vector que une a cada planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempo iguales.
3. El cuadrado de su período orbital es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita elíptica.

Es decir, una simple órbita elíptica sustituía el complicado modelo de superposición de deferentes y epiciclos.

Posteriormente el trabajo de Newton, a partir de su teoría de la gravitación universal y de sus leyes de la mecánica, dio una explicación científica a este hecho, si aceptamos, de acuerdo a Aristóteles, que una explicación científica se alcanza *cuando un hecho particular puede ser deducido a partir de primeros principios*. En efecto, que la fuerza gravitatoria de atracción decayera según la inversa de la distancia entra las masas, así como las leyes de la mecánica permitieron a Newton deducir que las trayectorias de los planetas deberían ser elípticas.

#### IV. REPRESENTACIÓN ESPACIAL Y REPRESENTACIÓN TEMPORAL... EL REGRESO DE TOLOMEO

A partir de las propuestas de Kepler, el recurso a los deferentes y a los epiciclos era pues un recurso obsoleto que había quedado en el pasado, hay que apuntar, sin embargo, que la representación de Kepler del movimiento de los planetas era una *representación espacial*, mientras que las representaciones tanto de Copérnico como de Tolomeo describían la posición de los planetas *en función del tiempo*. ¿Qué ocurre si a partir de las leyes de Newton y su teoría de la gravitación universal intentamos reproducir la posición de los planetas en función del tiempo?

Por de pronto partimos de una constatación: el movimiento elíptico de los planetas representado sobre un plano cartesiano es periódico con respecto a las coordenadas  $X$  y  $Y$ , por tanto la función que describe este comportamiento periódico puede ser desplegada en una serie de Fourier,

$$X(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega_0 t, \quad (1)$$

$$Y(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{senn}\omega_0 t, \quad (2)$$

esto considerando que las proyecciones sobre los ejes  $X$  y  $Y$  solo incluyen en el primer caso a la función coseno, y en el segundo a la función seno.

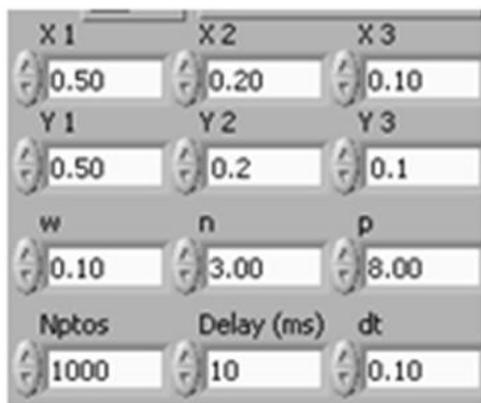
En esta serie la frecuencia angular  $\omega_0$  es igual a  $2\pi/T_p$ , con  $T_p$  el tiempo correspondiente al año de cada planeta. Cuando en un trabajo anterior [6] hemos desplegado los valores de  $X(t)$  y de  $Y(t)$  con técnicas numéricas utilizando el algoritmo de Verlet, aplicando luego un análisis de Fourier sobre estas series de tiempo para obtener los valores de los coeficientes  $B_n$  y  $C_n$ , hemos encontrado que son aproximadamente iguales, y por tanto la serie representa ¡una superposición de movimientos circulares uniformes, es decir de deferentes y epiciclos! En efecto, para la mayoría de planetas tal como se puede ver en la tabla I, los valores coinciden al nivel de las centésimas, en algunos hasta las milésimas, aunque Neptuno es la excepción.

**TABLA I.** Amplitudes de las componentes armónicas de  $X(t)$  y  $Y(t)$  en unidades astronómicas.

Planeta	$B_1$ (uA)	$B_2$ (uA)	$B_3$ (uA)
	$C_1$ (uA)	$C_2$ (uA)	$C_3$ (uA)
Mercuro	0.380 0.375	0.0385 0.0380	0.0058 0.0056
Venus	0.7212 0.7214	0.0025 0.0026	
Tierra	0.9972 0.9972	0.0083 0.0083	
Marte	1.5140 1.5114	0.0705 0.0707	0.0050 0.0053
Júpiter	5.1915 5.1935	0.1281 0.1297	0.0053 0.0065
Saturno	9.5092 9.5042	0.2624 0.2665	0.0107 0.0113
Urano	19.1122 19.0996	0.4472 0.4454	
Neptuno	30.000 29.9952	0.1250 0.1213	

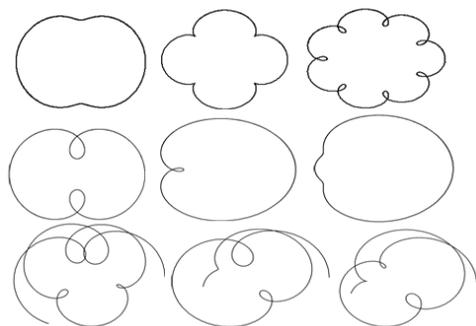
#### V. UN MODELO COMPUTARIZADO DEL SISTEMA DE TOLOMEO

Volvamos a analizar la antigua propuesta de Tolomeo en una versión en la cual hemos excluido al ecuante para devolver a los desplazamientos el carácter de movimiento circular uniforme, pero hagámoslo con los recursos actuales de la computación, para ello hemos diseñado un programa que contiene un deferente y 2 epiciclos y cuyos parámetros variables se muestran en la figura 2. En esta figura los valores de  $X$  y de  $Y$  representan los radios del deferente y de los 2 epiciclos, mientras que  $\omega$  la frecuencia angular del deferente y  $n$  y  $p$  los factores que multiplican a esta frecuencia, y que pueden ser enteros o fraccionarios. El programa nos permite observar las curvas resultantes de esta composición conforme se van generando. Los resultados muestran que hay toda una variedad de comportamientos posibles y que no es sencillo reproducir un comportamiento particular aún con el auxilio de una computadora.



**FIGURA 2.** Parámetros variables en el programa para dar diferentes valores a los radios de los deferentes y epiciclos así como a sus frecuencias angulares.

Mostramos en la figura 3 algunos de los resultados obtenidos,



**FIGURA 3.** Diferentes trayectorias variando los radios y las frecuencias angulares del deferente y los epiciclos.

Ahora bien, un resultado interesante es que para que las trayectorias sean cerradas en un solo ciclo, es decir, para que el movimiento sea periódico, las frecuencias angulares de los epiciclos deben ser múltiplos de la frecuencia

angular del deferente, si esto no es así no se cumple esta periodicidad.

En razón de estos resultados podemos decir que si la forma como Tolomeo logró reproducir el movimiento de los planetas fue superponiendo movimientos circulares uniformes, forma que traducida al lenguaje de las matemáticas actuales es

$$X(t) = X_1 \cos \omega t + X_2 \cos n\omega t + X_3 \cos p\omega t, \quad (1)$$

$$Y(t) = Y_1 \sin \omega t + Y_2 \sin n\omega t + Y_3 \sin p\omega t, \quad (2)$$

dato que para que el movimiento sea periódico en un ciclo se requiere que  $n$  y  $p$  sean enteros, las ecuaciones 1 y 2 representan una serie de Fourier;

## VI. CONCLUSIONES

Este breve repaso histórico de las formas como lo astrónomos han tratado de describir el comportamiento de los planetas con respecto al tiempo o con respecto al espacio, nos ha mostrado que hay una rara continuidad de fondo en estas representaciones. En efecto, con las trayectorias elípticas propuestas por Kepler se creyó que los complicados modelos hechos a base de una gran cantidad de movimientos circulares uniformes, propuestos no solo por Tolomeo sino aún por el mismo Copérnico, eran antiguallas, formas de representación obsoletas, sin embargo no es así, y cuando los movimientos de los planetas se hacen en función del tiempo inesperadamente los deferentes y epiciclos tienden a reaparecer aún dentro de la Física Clásica. Por otra parte adelantándose por muchos siglos al descubrimiento de las herramientas matemáticas de la época moderna, aunque sin su grado de generalización, los antiguos griegos ya hicieron tal vez – como lo sugiere nuestro modelo- uso de la serie de Fourier, hecho que nos confirma una vez más en que con ellos nace verdaderamente la ciencia moderna. En forma paradójica, el posterior desarrollo histórico daría marcha atrás a estos avances, y cuando el Imperio Romano comenzó su declinación hasta desembocar en la Edad Media, el fanatismo religioso reviviría los míticos modelos burdos del pasado.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la COFAA el apoyo dado para la realización de este trabajo.

## REFERENCIAS

[1] Kuhn, T. S., *La Revolución Copernicana* (Ed. Planeta-Agostini, No. 45, España, 1993).  
 [2] Taton, R., *Historia general de las ciencias* (Ediciones Orbis, S.A., España, 1988).

- [3] Crombie, A.C., *Historia de la Ciencia: de San Agustín a Galileo*, (Alianza Editorial, 5ª Edición, España 1985).  
[4] Abetti, G., *Historia de la Astronomía* (Breviarios del Fondo de Cultura Económica, No. 18, México, 1966).  
[5] Koestler, A., *Kepler* (SALVAT Editores, S.A., Barcelona, 1985).

- [6] Peralta, J. A., Calles, A., Yépez, E., *El análisis de Fourier de la trayectorias planetarias y el modelo copernicano del sistema solar*, *Revista Mexicana de Física* **49**, 283-289 (2003).

# Fundamentación y desarrollo de un hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería



<sup>1</sup>*Departamento de Física, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría CUJAE, Ciudad de la Habana, Cuba.*

<sup>2</sup>*Grupo de Óptica e Sistemas Amorfos, Departamento de Física Geral, Instituto de Física da Universidade de São Paulo - USP, SP, Brasil.*

**E-mail:** eduardocs@electronica.cujae.edu.cu, serra@electronica.cujae.edu.cu

(Recibido el 6 de Abril de 2014, aceptado el 25 de Agosto de 2014)

## Resumen

El trabajo muestra la fundamentación pedagógica desde una concepción didáctica desarrolladora y la construcción y desarrollo de un hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería. El análisis de las tendencias actuales de la enseñanza de la ingeniería en Cuba sirve de base a la fundamentación pedagógica, así como las principales insuficiencias reportadas en la enseñanza aprendizaje de la física universitaria. Se muestra el diseño y construcción de esta herramienta didáctica, sus potencialidades y primeras experiencias de su utilización en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, como una contribución para lograr incrementar la comprensión de las leyes y conceptos estudiados, la motivación y al desarrollo de un aprendizaje significativo de esta disciplina.

**Palabras clave:** Física, hiperentorno, enseñanza-aprendizaje, ingeniería.

## Abstract

The work shows the pedagogical basis from a developer didactic conception and the construction and development of a hyper environment for teaching and learning physics in engineering careers. Pedagogical foundation is based on the analysis of current trends in engineering education in Cuba, as well as main shortcomings reported in the learning of university physics. Design and construction of this teaching tool, potentialities and first experiences of their use at the Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría are shown as a contribution to achieving increasing understanding of the laws and concepts studied, motivation and development of a learning significance of this discipline.

**Keywords:** Physics, hyperenvironment, teaching-learning, engineering.

**PACS:** 01.40.gb, 01.40.Fk, 0155+b

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La comunidad científica que se ocupa de los problemas relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física ha dedicado muchos esfuerzos en los últimos años al perfeccionamiento del mismo motivada en primera instancia, por las demandas de renovación que el impetuoso desarrollo científico-técnico le impone en la actualidad a la enseñanza de las ciencias.

En los últimos 10 años ha existido una verdadera explosión en la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en los entornos educativos, buscando que esta utilización sea parte del proceso de enseñanza-aprendizaje y que el uso de entornos y metodologías facilitadoras del aprendizaje permitan al alumno aprender y convertir las informaciones en conocimientos.

Como consecuencia del desarrollo alcanzado por el software educativo en Cuba, se llegó a la concepción de un

modelo pedagógico denominado hiperentorno educativo, el cual está compuesto por diversos módulos integrados que permite su empleo en diferentes momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje de una asignatura con una única interfaz, donde se incluyen varias de las modalidades de software educativos que se presentaban de forma aislada.

Se han desarrollado diferentes variantes de hiperentornos de aprendizaje fundamentalmente para la enseñanza de las ciencias médicas y las matemáticas [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], pero no se han encontrado reportes para la enseñanza de la física universitaria.

En este contexto, el desarrollo de nuevas propuestas didácticas para la utilización de hiperentornos para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería, adquiere una gran importancia como contribución para lograr incrementar la comprensión de las leyes y conceptos estudiados, la motivación y al desarrollo de un aprendizaje significativo de esta disciplina.

Uno de los elementos importantes tenidos en cuenta

para la fundamentación y desarrollo de un hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería es el análisis de las tendencias actuales de la enseñanza de la ingeniería en Cuba que se pueden caracterizar a través de los siguientes rasgos [10, 11, 12]:

1. Lograr una formación más sólida y un conocimiento más profundo de las ciencias básicas y los fundamentos de las ciencias de ingeniería.
  - Base para la comprensión de los cambios tecnológicos que depara la vida profesional.
  - Capacidad de autoorientación.
  - Gestión tecnológica.
2. Formar un profesional más integral, versátil y flexible cuya virtud fundamental sea su capacidad de autopreparación y adaptación.
  - Desarrollo de la capacidad de comunicación oral y escrita.
  - Dominio de lenguas extranjeras.
  - Capacidad de manejo y procesamiento de la información científico – técnica.
  - Capacidad de dirección.
3. Formar un profesional en estrecha vinculación con la industria, con las habilidades profesionales básicas.
  - Aprendizaje activo e independiente.
  - Pensamiento divergente.
  - Pensamiento lógico bien estructurado.
  - Capacidad creativa.
  - Vínculo con la industria.
  - Interacción con la comunidad.
4. Fortalecer la formación socio humanística de este profesional.
  - Formación especializada.
  - Formación de valores.
  - Formación ecológica y de preservación del medio ambiente.
  - Identidad cultural.
5. Fortalecer la formación económica y la capacidad para desarrollar una gestión empresarial efectiva y eficiente.
6. Potenciar la preparación del futuro profesional en el campo de la informática y la telemática.

Estos rasgos caracterizan las tendencias en la formación de los profesionales de la ingeniería en la actualidad. Y la física, como el resto de las disciplinas que conforman las diversas carreras de ingeniería, debe jugar el rol que le corresponde en la consecución de los objetivos de la formación de estos futuros profesionales que se derivan de dichas tendencias. Las mismas demandan de manera explícita o implícita la necesidad de producir transformaciones radicales en el proceso de enseñanza-aprendizaje, que estimulen: el desarrollo del aprendizaje independiente de los estudiantes por encima de la transmisión de conocimientos por parte del docente, el pensamiento lógico y divergente, la creatividad, y en general de los modos de pensar y actuar de este futuro profesional.

En varias tesis doctorales y ponencias presentadas en importantes congresos internacionales [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] se han detectado y reportado a nivel internacional,

insuficiencias en la enseñanza aprendizaje de la física, entre las que se destacan:

- La disciplina física, no revela de manera sistemática las relaciones entre teoría y práctica.
- Falta de motivación por la disciplina física en las carreras de ingeniería, y poco desarrollo de una actitud investigadora, creativa, crítica, autónoma e independiente.
- Limitada utilización de las tecnologías de la información y las comunicaciones en las clases presenciales.
- La utilización de experimentos demostrativos en conferencias, clases prácticas y seminarios es muy limitada.
- La estructura metodológica tradicional de las clases no satisface las necesidades para el despliegue de los núcleos teóricos de la disciplina.
- Dificultades en los estudiantes para la comprensión de las leyes y conceptos fundamentales.
- Muy bajos resultados de promoción.

En el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría se han desarrollado recientemente nuevas propuestas didácticas para el diseño y la utilización de modernos medios de enseñanza y sistemas de experimentos en las diferentes formas de enseñanza aprendizaje de la disciplina física, como contribución para lograr eliminar estas deficiencias e incrementar la comprensión de las leyes y conceptos estudiados, la motivación y el desarrollo de habilidades prácticas y de observación en la enseñanza aprendizaje de esta disciplina [20, 21, 22]. En esta misma dirección, se presenta la fundamentación, el diseño y la construcción de un hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería.

## A. Fundamentación pedagógica de la propuesta

Para fundamentar didácticamente el desarrollo de esta propuesta, es esencial asumir una posición dentro del marco de la didáctica general. En este caso, se asume como base del desarrollo de un hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería, una concepción didáctica desarrolladora que se ha ido conformando y sistematizando en los últimos 15 años, a la luz de diferentes investigaciones pedagógicas realizadas, enriquecida con la práctica docente en Cuba y que se sustenta en lo mejor de las tradiciones pedagógicas nacionales e internacionales.

La didáctica desarrolladora opera con las categorías enseñanza desarrolladora y aprendizaje desarrollador. Sus bases teórico epistemológicas han sido aportadas por la escuela histórico cultural, cuyo máximo representante fue Lev Vigotsky.

Castellanos, D. *et al.* en 2001 [23], consideraron que la enseñanza desarrolladora:

Es el proceso sistémico de transmisión de la cultura en la institución escolar en función del encargo social, que se organiza a partir de los niveles de desarrollo actual y potencial de los estudiantes, y conduce al tránsito continuo

hacia niveles superiores de desarrollo, con la finalidad de formar una personalidad integral y autodeterminada, capaz de transformarse y transformar su realidad en un contexto histórico concreto, siendo lo esencial, la autodeterminación, según la cual el sujeto deviene agente de su propio desarrollo. El aprendizaje desarrollador es aquel que garantiza en el individuo la apropiación activa y creadora de la cultura, propiciando el desarrollo de su auto-perfeccionamiento constante, de su autonomía y autodeterminación, en íntima conexión con los necesarios procesos de socialización, compromiso y responsabilidad social.

Por otra parte, el colectivo de autores cubanos de 1998 [24], mencionan que: "La educación desarrolladora promueve y potencia aprendizajes desarrolladores". También que la comprensión del aprendizaje en el contexto pedagógico puede expresarse como:

Un proceso en el cual el educando, bajo la dirección directa e indirecta del maestro, en una situación especialmente estructurada para formarlo individual y socialmente, desarrolla capacidades, hábitos y habilidades que le permiten apropiarse de la cultura y de los medios para conocerla y enriquecerla. En el proceso de esa apropiación se van formando también los sentimientos, intereses, motivos de conducta, valores, es decir, se desarrollan simultáneamente todas las esferas de la personalidad [24].

Un proceso de enseñanza aprendizaje desarrollador debe ser aquel que constituya un sistema donde la enseñanza, aprendizaje y subsistemas se basen en una educación desarrolladora, lo que implica una comunicación y una actividad intencionales, cuyo accionar didáctico genera estrategias de aprendizajes para el desarrollo de una personalidad integral y autodeterminada del educando, dentro de los marcos de la escuela como institución transmisora de la cultura.

Las consideraciones generales de la didáctica desarrolladora o integradora fueron definidas de la siguiente forma por Zilberstein J.; Portela, R. y McPherson, M., en 1999 [25].

- Centra su atención en el docente y en el alumno, por lo que su objeto de estudio lo constituye el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Considera la dirección científica por parte del maestro de la actividad cognoscitiva práctica y valorativa de los alumnos, teniendo en cuenta el nivel de desarrollo alcanzado por estos y sus potencialidades para lograrlo.
- Asume que mediante procesos de socialización y comunicación se propicie la independencia cognoscitiva y la apropiación del contenido de enseñanza (conocimientos, habilidades y valores).
- Forma un pensamiento reflexivo y creativo que permita al alumno "llegar a la esencia", establecer nexos y relaciones, así como aplicar el contenido a la práctica social, de modo tal que solucione problemáticas no sólo del ámbito escolar, sino también familiar y de la sociedad en general.

- Propicia la valoración personal de lo estudiado, de modo que el contenido adquiera sentido para el alumno y este interiorice su significado.
- Estimula el desarrollo de estrategias que permiten regular los modos de pensar y actuar que contribuyan a la formación de acciones de orientación, planificación, valoración y control.

De acuerdo a lo analizado anteriormente, podemos precisar los elementos fundamentales de la concepción didáctica desarrolladora, que son base de nuestra propuesta:

- Aprendizaje a partir de la búsqueda del conocimiento, utilizando en la clase métodos y procedimientos que estimulen el pensamiento reflexivo, llegar a la esencia y que vinculen el contenido con la vida: se debe dirigir la actividad de búsqueda hacia la observación y descripción, la solución y/o planteamiento de problemas de la vida cotidiana, la realización y/o planteamiento de experimentos, el planteamiento de suposiciones o hipótesis, la elaboración de preguntas, el establecimiento de diferencias y semejanzas, la clasificación y la ejemplificación, entre otras.
- Dadas las características del contenido de enseñanza de las ciencias, se deberá estimular la búsqueda activa por parte de los alumnos y motivarlos a "aprender construyendo ciencia", a investigar, a proponer soluciones alternativas y a estar "insatisfechos" constantemente con lo que aprenden.
- La observación y descripción, la solución y/o planteamiento de problemas de la vida cotidiana, la realización y/o planteamiento de experimentos, pueden contribuir a que el estudiante plantee suposiciones, reflexione, establezca nexos y relaciones, busque las causas, lo cual se refuerza y garantiza en buena medida con la elaboración de preguntas acerca de lo que estudia.
- Fortalecimiento de la observación y descripción en el proceso de búsqueda del conocimiento como premisas del pensamiento científico. La observación y la descripción en la asignatura deben partir de la actividad práctica del estudiante, pero vinculadas a su actividad cognoscitiva y a la actividad valorativa; es decir, que se le estimule a "actuar", a la vez, que se apropie de los conocimientos y valores y que sea capaz de vincular la teoría con la práctica.
- Se deberá promover que la observación se convierta en una actividad consciente que permita pasar de la sensorpercepción, a la abstracción y finalmente a lo concreto pensado, de modo tal que el alumno pueda "apreciar" lo interno, los nexos, las relaciones, y "operar" con el conocimiento de la esencia.
- Promover la unidad dialéctica entre la actividad colectiva y la individual en la que ambas se complementen, estimulando la socialización y la comunicación en un "clima favorable al aprendizaje". La interacción grupal favorece que el alumno se apropie del contenido de enseñanza siendo protagonista de su propio aprendizaje. Sin desconocer que cada estudiante debe actuar con independencia, sin dejar de reconocer el

papel determinante de la "dirección adecuada" del docente en cada tipo de actividad.

- El intercambio de información, las reflexiones grupales y la interacción entre sus miembros favorecen a su vez el pensamiento de cada estudiante, permitiéndoles confrontar ideas, completarlas, variarlas e incluso llegar a nuevos planteamientos. Es decir, el trabajo del grupo contribuye al desarrollo de cada uno de sus integrantes.
- Tener en cuenta los momentos de la dirección de la actividad cognoscitiva: la motivación, la orientación, la ejecución y el control, las diferentes actividades que se realicen deben partir de la motivación de los alumnos y lograr crear en ellos motivos por la actividad de aprendizaje.
- Durante la ejecución de la actividad debe prevalecer el trabajo de los alumnos, bajo la dirección del profesor que propicie la independencia cognoscitiva necesaria.

Para la materialización del diseño didáctico del hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería que se propone, sirvió de base el modelo planteado por Del Toro en 2006 [26], donde se precisa que el diseño didáctico es: "el proceso sistémico de modelación de las situaciones de enseñanza-aprendizaje que se desarrollarán con el hiperentorno a partir de sus dimensiones semántica, sintáctica y práctica, y de sus interrelaciones".

Entendiendo estas dimensiones de la siguiente forma:

**Dimensión semántica.-** Relacionada con el proceso de selección y organización de los contenidos de estudio que portará el hiperentorno a partir de los problemas y los objetivos que se plantean resolver y alcanzar. También se relaciona con los métodos que dinamizarán su enseñanza y aprendizaje, la evaluación que se hará del proceso; así como las formas de organización que en éste se manifiestan.

**Dimensión sintáctica.-** Relacionada con la estructura hipermedial que se necesita construir, así como los recursos mediáticos que se utilizarán para presentar los contenidos que portará el hiperentorno, y propiciar la interactividad de los sujetos con los mismos y entre ellos.

**Dimensión práctica.-** Relacionada con los modos de actuación de los sujetos de enseñanza-aprendizaje (profesor, estudiante, grupo) en sus relaciones: interacción y cooperación, durante la utilización didáctica del hiperentorno.

## **II. IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA**

La formación de un ingeniero pasa inevitablemente por el aprendizaje de la física, pues está en la base de cualquiera de las ingenierías.

En nuestro país (que no es una excepción), los estudiantes universitarios presentan muchas dificultades con el aprendizaje de esta importante ciencia. Dificultades que presentan no solo con el aprendizaje de la Física, sino también de las Matemáticas.

Esto provoca muchas veces que no puedan avanzar en los estudios universitarios y determina definitivamente su abandono.

Ocurre además que no dominan correctamente un grupo de habilidades relacionadas con acciones de tipo intelectual tales como: la observación, la descripción, la determinación de las cualidades (generales, particulares y esenciales), la comparación, la definición, la explicación, y otras que son esenciales para el desarrollo del pensamiento lógico.

Es necesario dominar otro grupo de habilidades relacionadas con el trabajo durante el proceso docente-educativo, dentro de las cuales se pueden mencionar: la percepción y comprensión del material objeto de estudio, resumir información, preparar informes y ponencias, elaborar tablas y gráficos, entre otras.

Otro hecho es, que tienen muy poca información acerca de los logros de la física y su incidencia en el desarrollo tecnológico. La imagen que tienen los estudiantes de la física es la de una ciencia que es muy difícil de aprender. Al saber tan poco de ella, y de los hombres y mujeres que han contribuido con su desarrollo, no se ven motivados por conocer de esta fascinante ciencia.

En general se divulga muy poco la ciencia en nuestro país. Las publicaciones escritas son escasas y en la prensa escrita aparece muy poco sobre este tema. Sumemos además que nuestros estudiantes leen muy poco la prensa.

Otro asunto no menos importante es que muchas clases se siguen desarrollando básicamente por el método tradicional, en las cuales las actividades que realizan los estudiantes son muy pocas. Debe recordarse que el proceso de asimilación de cualquier conocimiento es un proceso activo. Si el alumno no hace nada por hacer suyo el conocimiento, cualquier cosa que haga el profesor no surtirá ningún efecto. La asimilación de cualquier contenido exige que los alumnos realicen un sistema de acciones, un sistema de actividades determinadas.

En nuestra práctica docente en la enseñanza superior encontramos que, los estudiantes no se preparan adecuadamente para las actividades que se realizan en las clases prácticas, y es el profesor quien desarrolla en un porcentaje muy elevado, las actividades programadas y, conocen-con antelación. La efectividad de estas clases es muy poca, pues los estudiantes solo reciben información, participando muy poco en su elaboración.

Con el objetivo de ir cambiando esta situación, nos propusimos introducir en el desarrollo de la asignatura física II para la carrera de Ingeniería hidráulica el uso de las TIC para la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina.

La herramienta empleada para ello, es un hiperentorno con una interfaz gráfica tipo multimedia que permite el trabajo con imágenes, gráficos, textos, hipertextos, vínculos y demás recursos audiovisuales.

El objetivo es suministrar una serie de recursos que le permita al estudiante alcanzar una preparación adecuada, y que puedan asimilar el contenido de la asignatura adecuadamente y que puedan resolver las tareas que se le proponen para las clases, ya sean en conferencias, clases prácticas o laboratorios y que por tanto pueda desarrollarse de manera eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Nuestro modelo pedagógico se orienta hacia el autoaprendizaje, ya que todo el material montado en la plataforma debe constituirse en un recurso de mucha utilidad para el trabajo independiente de los estudiantes.

La herramienta en su diseño contiene una serie de módulos (temario, glosario, mediateca, complementos, ejercicios entre otros), que responden muy bien al modelo que proponemos utilizar. En ella está montada toda la asignatura física II, por lo que aquí podemos encontrar desarrolladas cada una de las conferencias del curso en las que se precisan los contenidos a enseñar y los objetivos a alcanzar.

Aparece además todo el plan de clases prácticas, con los objetivos bien precisos en cada caso, orientaciones para la preparación para la clase práctica y las actividades prácticas a desarrollar. En cada una de las clases prácticas, se realiza una actividad de comprobación de esta preparación.

Las actividades propuestas son desarrolladas por los estudiantes, reunidos en pequeños grupos. La actividad es dirigida y controlada por el profesor.

Durante el desarrollo de la actividad práctica, los estudiantes pueden emplear computadoras personales.

También se utiliza un proyector de video para suministrar la información que se necesita en cada caso para todos los estudiantes en general, y, sobre todo para los que no disponen de computadoras.

A continuación presentamos la estructura de la herramienta desarrollada con sus diferentes módulos y las posibilidades que nos brindan desde el punto de vista didáctico.



FIGURA 1. Pantalla de inicio desde donde se pueden acceder los distintos módulos de la herramienta.

Sigue la pantalla del índice de contenido. Aparecen las diferentes clases de conferencia y las clases prácticas que se derivan de cada una de ellas. Están incluidos también algunos autoexámenes para el autocontrol de los estudiantes, la planificación de los trabajos de laboratorios, y las guías para su realización, que pueden acceder a través de hipervínculos.

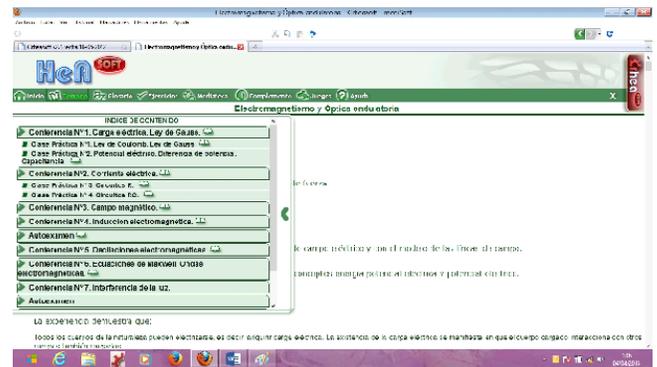


FIGURA 2. Pantalla del índice de contenido.

Sigue la pantalla que muestra cómo están desarrolladas las conferencias en las cuales existen palabras que representan hipervínculos con páginas de contenido, animaciones, videos, imágenes, entre otros-medios.

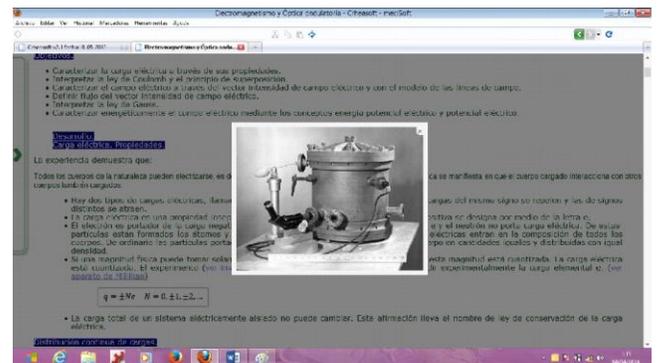


FIGURA 3. Pantalla sobre el diseño de las conferencias.

A continuación se muestra el diseño de una clase práctica.

Se puede apreciar las orientaciones precisas para la autopreparación. A través de diferentes hipervínculos se puede acceder a imágenes, textos que muestran ejercicios, problemas resueltos y conceptos.

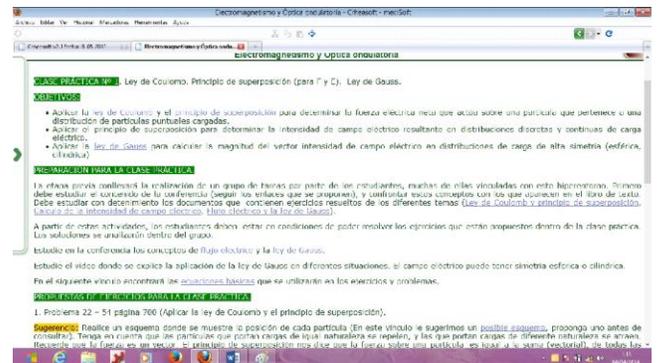


FIGURA 4. Pantalla del diseño de las clases prácticas.

Lo relacionado con el módulo de ejercicios se muestra a continuación. La herramienta permite el diseño de

ejercicios de selección simple y selección múltiple, ejercicios de verdadero y falso, enlazar la respuesta correcta y otros. Se pueden emplear como comprobación al inicio de una clase práctica, para fijar un concepto dentro de una conferencia y en la autopreparación de los estudiantes.

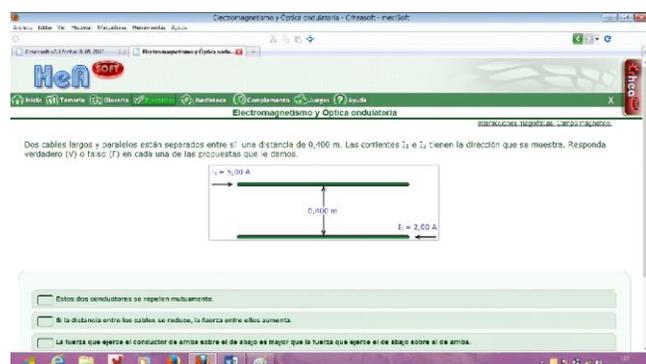


FIGURA 5. Pantalla del módulo de ejercicios.

En el módulo mediateca se archivan las animaciones, imágenes o videos que pueden ser empleados en el desarrollo de las conferencias, para elaborar un concepto, como retroalimentación o en el diseño de ejercicios, entre otros. Observe que se incluye una pequeña explicación del contenido de la media.

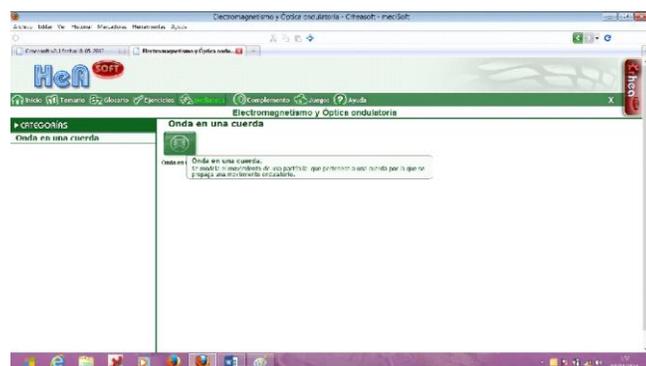


FIGURA 6. Pantalla del módulo de mediateca.

En el módulo complementos se puede incluir una variada bibliografía además del libro básico de la asignatura.

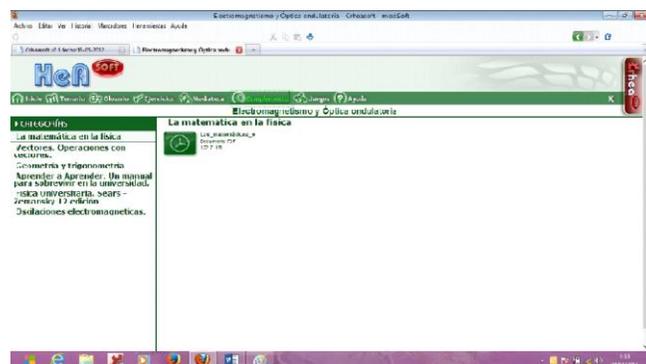


FIGURA 7. Pantalla del módulo complementos.

Otra de las posibilidades que brinda la herramienta es la de acceder a diferentes videos mediante vínculos que aparecen dentro del desarrollo de una conferencia, una clase práctica, un ejercicio, etc. Este recurso es de vital importancia, pues en ocasiones no existen las condiciones materiales para la realización de una demostración en la conferencia y podemos sustituirlo por un video.



FIGURA 8. Pantalla que muestra la posibilidad de acceso a videos.

### III. CONCLUSIONES

Se ha presentado la fundamentación pedagógica, el diseño y la construcción de un hiperentorno para la enseñanza-aprendizaje de la física en carreras de ingeniería, sus potencialidades y primeras experiencias de su utilización en el Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, como una contribución para lograr incrementar la comprensión de las leyes y conceptos estudiados, la motivación y al desarrollo de un aprendizaje significativo de esta disciplina.

### REFERENCIAS

[1] Coloma, O. *et al.*, *Hiperentorno de aprendizaje "Eureka": un software educativo para la enseñanza de la Matemática*, Memorias del Evento Internacional Pedagogía, La Habana, Cuba, (2007).

[2] Mariño, D., Portilla, Y., Coloma, O., Rugvany Rodríguez, R., Rodríguez, A., *SADHEA-WEB: Una alternativa para el desarrollo de software educativo para la Web, desde las propias microuiversidades*, Memorias del Congreso Internacional, Congreso Internacional Universidad, La Habana, Cuba, (2008).

[3] Ramos, L., Domínguez, J., Gavilondo, X., Fresno, C., *¿Software educativo, hipermedia o entorno educativo?* Rev. Acimed. **18**, 4 (2008).

[4] Hernández, R., González, J., Ávila, V., Estrada, M., Ruíz, A., Gómez, F., Alfonso, P., *Hiperentorno para el entrenamiento de la herramienta SADHEA-WEB en la Universidad Médica Cubana*, Memorias del Congreso internacional Informática, La Habana, Cuba, (2009).

- [5] Sosa, R., Fernández C., Hechevarría, Y., Gómez, J., Naranjo, S., Guevara E., *Introducción del hiperentorno de Virología Médica en el programa de la asignatura Agentes Biológicos*, Rev. Méd. Electrón. **32**, 2 (2010), <http://www.revmatanzas.sld.cu/revista%20medica/ano%202010/vol2%202010/tema1.htm>, Consultado el 23 de marzo de 2014.
- [6] Vidal, M., Gómez, F., Ruiz, A., *Hiperentornos educativos*, Educ Med Super. **25**, 1 (2011).
- [7] Ruiz, A., González, J. Gómez, F., *Adecuación de la plataforma SADHEA-WEB a la enseñanza médica superior. Estrategia del proyecto Galenomedía*, Revista Cubana de Informática Médica **3**, 1 (2011).
- [8] Torres, J., Briggs, M., González, O., Sánchez, I., Suárez, L., *Hiperentorno de aprendizaje para el tema muestreo y estimación de la asignatura informática médica II*, Revista Cubana de Informática Médica **4**, 2 (2012).
- [9] Ruiz, A., Fernández, A., López, J., Gómez, F., *Hiperentorno educativo para el aprendizaje de la protección eléctrica en equipos biomédicos*, Educ. Med. Super. **27**, 1 (2013).
- [10] Falcón, H., *Una concepción de profesionalización desde la disciplina Física General en Ciencias Técnicas*, Tesis Doctoral, Cuba, (2002).
- [11] Castañeda, E., *Caracterización general del problema del diseño curricular de carreras universitarias a las puertas del tercer milenio desde una óptica latinoamericana*, Conferencia inaugural del curso de diseño curricular de la Universidad de verano, ISPJAE, Cuba, (2007).
- [12] Castañeda, E., *El modelo del profesional y la enseñanza de la ingeniería del siglo XXI*, Ponencia al XVIII Congreso Panamericano Educación y Ejercicio Profesional de la Ingeniería, Lima, Perú, (2008).
- [13] García, A., *Física General Aplicada: novedosa concepción para la enseñanza de la física en ciencias técnicas*, Tesis doctoral, Cuba, (1997).
- [14] Horrutinier, P., *El perfeccionamiento del sistema de conocimientos en la Disciplina Física para estudiantes de Ingeniería*, Tesis doctoral, Cuba, (1998).
- [15] Ferrat, Á., *La resolución de problemas de física. Un estudio para propiciar su aprendizaje mediante el uso de estrategias de solución*, Tesis doctoral, Cuba, (1999).
- [16] Patiño, A., *Una concepción de modernización para la disciplina física general en ciencias técnicas*, Tesis doctoral, Cuba, (2000).
- [17] Serra, R., *La utilización del holograma como medio de enseñanza y de educación social en Cuba a través del vínculo investigación–docencia–extensión universitaria*, Tesis doctoral, Cuba, (2004).
- [18] Alejo, J., *Una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje en contextos de la disciplina física general en las carreras de ingeniería*, Tesis doctoral, Cuba, (2006).
- [19] Lemus, J., *Sistema de experimentos docentes con la utilización de un puntero de diodo láser, para la enseñanza aprendizaje de la óptica en carreras de ingeniería*, Tesis doctoral, Cuba, (2013).
- [20] Serra, R., Vega, G., Ferrat, A., Lunazzi, J., y Magalhães, D., *El holograma y su utilización como un medio de enseñanza de la física en ingeniería*, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 1401 (2009).
- [21] Serra, R., Moreno, A., Magalhães, D., Muramatsu M., Lemus, J., *Haciendo hologramas en la escuela y en la casa*, Revista Brasileira de Ensino de Física **32**, 3502 (2010).
- [22] Serra, R., I. Alfonso, I., Herrera, R., Souza, D., Muramatsu, M., Soga, D., Zottola, D., *Contribución de la física al desarrollo de habilidades investigativas en estudiantes de ingeniería*, Revista Brasileira de Ensino de Física **35**, 4502 (2013).
- [23] Castellanos, D. et al., *Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador*, La Habana, Cuba, ISPEJV, (2001).
- [24] Colectivo de autores, Grupo Pedagogía del ICCP., *Marco conceptual para la elaboración de una Teoría Pedagógica* (Paper), p. 40, (1998).
- [25] Zilberstein, J., Portela, R. y McPherson, M., *Didáctica integradora de las ciencias vs didáctica tradicional. experiencia cubana*, (Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (IPLAC), La Habana, 1999).
- [26] Del Toro, M., *Modelo de diseño didáctico de hiperentornos de enseñanza–aprendizaje desde una concepción desarrolladora*, Tesis doctoral, Cuba, (2006).

# Biophotonics and Optofluidics Technology – Technical Analysis and Qualitative Review of the Novel Applications\*



**Kamal Nain Chopra**

*Applied Physics Department, Maharaja Agrasen Institute of Technology,  
Rohini, GGSIP University, New Delhi - 110086, India.*

**E-mail:** kchopra 2003@gmail.com

(Received 31 March 2014, accepted 16 August 2014)

## Abstract

The subject of Biophotonics and Optofluidics has recently gained importance among the researchers working in modern optics. This paper presents the detailed technical analysis of the instruments based on the phenomena related with these interesting topics, besides discussing some important breakthroughs in the subject like – Uses in the Medical Field, and the Novel Energy generation Devices. The Mathematical Analysis of the Optical traps, and the image enhancement technique useful in in biophotonics and optofluidics has been discussed. Some of the recent novel investigations from the applications point of view, have also been qualitatively reviewed.

**Keywords:** Biophotonics, Optofluidics, Microfluidic Flow-Scanning Optical Tomography, Optofluidic Switch, Microfluidic Cytometry, Optofluidic Sensors, Subpixel Resolving Optofluidic Microscope.

## Resumen

El tema de Biofotónica y Optofluidos recientemente han ganado importancia entre los investigadores que trabajan en la óptica moderna. Este artículo presenta un análisis técnico de los instrumentos basados en fenómenos relacionados con estos temas interesantes, además de discutir algunos avances importantes en el tema como - Uso en el campo de la medicina, y los dispositivos de generación de nuevas energías. Se ha discutido el análisis matemático de las trampas ópticas y la técnica útil de mejora de imagen en Biofotónica y optofluidos. También han sido revisadas cualitativamente desde el punto de vista de la aplicación, algunas de las recientes investigaciones.

**Palabras clave:** Biofotónica, Optofluidos, Tomografía óptica de digitalización de microfluidos, Switch optofluídico, citometría de microfluidos, Sensores optofluídicos, Resolución de microscopio de subpixel optofluídico.

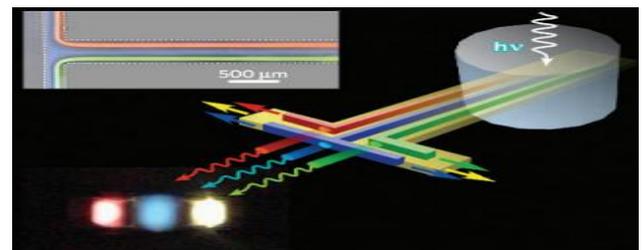
**PACS:** 87.85.Ox, 87.85.dh, 42.79.Bh

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCTION

Topics of Biophotonics and Optofluidics include among others the biomedical optics, laser medical diagnostics optical biopsy, and therapeutics. The optofluidics is mainly concerned with the bioanalytics and other photonic applications, biosensing and other related applications, including spectroscopic optical diagnostics like - diffuse optical imaging, steady-state and time-resolved fluorescence techniques. Fainman *et al.* [1] have written a detailed book on this subject because of the importance of the various related topics. In fact, Optofluidics [2, 3] refers to a research and technology area based on combining the advantages of microfluidics and optics, and has various applications including the displays, biosensors, lab-on-chip devices, lenses, molecular imaging tools and energy. Important sub topics of Optofluidics are: Waveguide and fiber optofluidics, Fluid and dynamics, Optical lab-on-a-chip and Flow measurement. In the same way, the Nano-biophotonics has subtopics like Bio-nanotechnologies, Plasmonics, Modelling of nanoscale structures, and

Nanoparticles. Optofluidics: Fusion of Optics and Microfluidics. The Schematic of the Optofluidics Technology has been illustrated in the following figure:



**FIGURE 1.** Schematic of the Optofluidics Technology (based on combining the advantages of microfluidics and optics), Figure courtesy Biophotonics Review.

<http://biophotonicsreview.blogspot.in/2012/07/optofluidics-fusion-of-optics-and.html>

Optofluidics is a technology area which combines the advantages of microfluidics, which is a multidisciplinary

field combining engineering, physics, chemistry, biochemistry, nanotechnology, and biotechnology, with practical applications in designing of systems based on handling small volumes of fluids. This technology is used in the development of DNA chips, lab-on-a-chip technology, micro-propulsion, and micro-thermal technologies, and deals with the behavior, precise control and manipulation of fluids, which are geometrically constrained to a small, typically sub-millimeter scale. The systems in this technology have various characteristics like - small volumes (nL, pL, fL), small size, low energy consumption, and the effects of the micro domain. The subject of Biophotonics is mainly related with the topics - DNA chips, similar to a DNA microarray, in which a multitude of different capture agents, mostly monoclonal antibodies, are deposited on a chip surface; for determining the presence and/or amount of proteins in biological samples, e.g., blood. The technology is also used to study the Microbial behavior, because the ability to create precise and carefully controlled chemo attractant gradients, qualifies it as the ideal tool to study the motility, the ability to evolve and develop resistance to antibiotics in small populations of microorganisms, and in a short period of time. Another useful topic of this technology's applications is - Evolutionary biology, based on combining microfluidics with landscape ecology and nanofluidics, by which a nano/micro fabricated fluidic landscape can be constructed by building local patches of bacterial habitat and connecting them by dispersal corridors, thereby studying the evolutionary ecology of the bacterial systems in the synthetic ecosystems, and thus resulting in using biophysics to get useful idea about the evolutionary biology. Another interesting topic of the application of this fast evolving technology is - Cellular biophysics, based on rectifying the motion of individual swimming bacteria, and using microfluidic structures to extract the mechanical motion from a population of motile bacterial cells.

Biophotonics deals with the study of the biological materials and is based on its relations and associations with various forms of radiant energy, including light (especially from lasers). The understanding of biophotonics is helping to create new medical tools e/g. medical imaging, and vitriol diagnostics. Its applications are so important, that huge developments are taking place in this technology. Its various applications in medical field are: (i) Development of the optical characterisation of diseases, by analyzing healthy and diseased samples, and also enabling the effect of the treatment in improving the diseases; (ii) Viewing and detecting the infectious diseases like - HIV (Human Immunodeficiency Virus) transmission; and (iii) Development of devices to diagnose and treat cancer related diseases, by using optical imaging and spectroscopy. Some of the Light Sources used in Biophotonics are: includes: Lasers and gas lasers, Fiber Lasers, Ultra-fast Lasers, Solid State Lasers, ps Lasers, Diode Lasers, Ultrachrome Lasers, Argon Ion Lasers, and Krypton Ion Lasers.

The applications of this evolving technology are in widely different areas like - bio-photonic fluorescence materials and techniques; optical coherence tomography; advanced biological endoscopy and microscopy; molecular

imaging, photochemistry and photobiology; multi- and hyperspectral imaging; laser tissue interactions; laser surgery; optics in biotechnology; minimally invasive optical diagnostics; image reconstruction and processing; optical-system engineering for medicine; optical and photonic biosensors; photodynamic therapy; photoacoustic techniques; pathogen detection; optical tweezing and manipulation in biological or medical applications; optogenetics; lab-on-chip devices; on-chip imaging techniques; microfluidically tunable or reconfigurable optical and photonic systems; photonic crystals; optofluidic assembly and lithographic techniques; on-chip light and laser sources. This range of applications of the technology is drawing the interest of many researchers in this field.

## II MASTHEMATICAL ANALYSIS

Some very important studies in biophotonics are based on Optical traps, which have become an important tool in the biological sciences because of their ability to manipulate microscopic particles. The various forms of optical traps, single-beam, two-beam, and levitating, have been used to manipulate objects such as viruses and bacteria, cells, chromosomes and DNA. Optical traps are formed because of the fact that each photon of light possesses momentum. The linear momentum flux of a photon is given by  $p = \hbar\omega/c$ , where  $\hbar$  is the reduced Planck's constant,  $\omega$  is the angular frequency of the light, and  $c$  is the speed of light. The total momentum flux of a laser beam with power  $P$  is  $p_z = P/c$ . Torques are applied by using light's angular momentum. Birefringent materials have a crystalline structure, and therefore, an anisotropic refractive index, which results in two different orthogonal indices of refraction and a polarization dependent phase delay, which is dependent on the wavelength of the light (wavenumber,  $k_r$ ), the ordinary and extraordinary indices of refraction,  $n_o$  and  $n_e$ , and the thickness of the birefringent particle,  $d$ ; and is obviously given by:

$$\Gamma = k_r d (n_o - n_e). \quad (1)$$

A laser beam passing through a birefringent material of constant thickness experiences a torque due to the spin angular momentum, which is shown to be given by:

$$\tau = -\frac{\varepsilon}{2\omega} E_0^2 \sin \Gamma \cos 2\phi \sin 2\theta + \frac{\varepsilon}{2\omega} E_0^2 \{1 - \cos \Gamma\} \sin 2\phi, \quad (2)$$

Where  $\varepsilon$  is the permittivity,  $E_0$  is the electric field amplitude,  $\phi$  is the ellipticity of the light, and  $\theta$  is the angle between the fast axis of the quarter wave plate and the optic axis of the birefringent particle, with the assumption that the birefringent particles are of the uniform thickness. It has to be understood that the first term of Eq. (2) represents the torque applied to a particle by the linearly polarized portion of the light; and the second term the torque due to the

circularly polarized portion of the light. Clearly, the particle undergoes a rotation only when the circularly polarized portion is larger than the linearly polarized portion, the maximum rotational rates occurring when the incoming laser is circularly polarized, i.e.  $\phi=\pi/4$ .

In practice, the trapped sphere ( $a$ ) is  $\ll$  the wavelength of the trapping laser ( $\lambda$ ), and thus the conditions for Raleigh scattering are satisfied, and therefore the optical forces can be computed by treating the particle as a point dipole. In this case, the scattering force ( $F_{scatt}$ ), which is due to the absorption and reradiation of light by the dipole; and the gradient force components are readily separated. For a sphere of radius  $a$ ,  $F_{scatt}$  is given by:

$$F_{scatt} = \frac{I_o \sigma n_m}{c}, \quad (3)$$

where  $I_o$  is the intensity of the incident light,  $n_m$  is the index of refraction of the medium,  $c$  is the speed of light in vacuum,  $m$  is the ratio of the index of refraction of the particle to the index of the medium ( $n_p/n_m$ ),  $\lambda$  is the wavelength of the trapping laser, and  $\sigma$  is the scattering cross section of the sphere, given by:

$$\sigma = \frac{128\pi^5 a^6}{3\lambda^4} \left\{ \frac{(m^2 - 1)}{(m^2 + 2)} \right\}^2. \quad (4)$$

The gradient force is due to the interaction of the induced dipole with the inhomogeneous field, and its time-averaged value is given by:

$$F_{grad} = \frac{2\pi\alpha}{cn^2m} \nabla I_o, \quad (5)$$

where  $\alpha$  is the polarizability of the sphere, given by:

$$\alpha = n^2 m a^3 \left\{ \frac{(m^2 - 1)}{(m^2 + 2)} \right\}. \quad (6)$$

It has to be noted that the gradient force is proportional to the intensity gradient, and points up the gradient when  $m > 1$ . An optical trap consists of a trapping laser, beam expansion and steering optics, an objective with high numerical aperture, a trapping chamber holder, and an arrangement for observing the trapped specimen. This is the reason that mostly, the optical traps are built by modifying an inverted microscope, which facilitates the introduction of a laser beam into the optical path before the objective. The working is quite simple - the microscope provides the imaging, trapping chamber does the manipulation, and objective is used for focusing.

The degree of the enhancement in the single molecule imaging in optofluidics can be calculated on the basis of the Fresnel equations, which describe the behaviour of light when moving between media of different refractive indices. The predicted reflection of light is called as Fresnel reflection.

An incident light striking the interface (at an angle  $\theta_i$ , with the normal) between two media of refractive indices  $n_1$  and  $n_2$  at is split into two parts, the reflected ray and transmitted ray, making respectively the angles  $\theta_r$  and  $\theta_t$ , with the normal.

As the media under consideration are nonmagnetic, the reflectance  $R$  and transmittance  $T$  depend on the state of polarisation of light, which for the s-polarised light (light polarized with its electric field perpendicular to the plane containing the incident, reflected, and refracted rays) and p-polarised (light polarized with its electric field parallel to the plane containing the incident, reflected, and refracted rays) are given by the well known Fresnel Equations:

$$R_s = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \right|^2, \quad (7)$$

and

$$R_p = \left| \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2} - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2} + n_2 \cos \theta_i} \right|^2, \quad (8)$$

Where  $R_s$  and  $R_p$  are the reflectances respectively for the S-polarized light and P-polarised light. As a result of the conservation of energy, the respective transmission coefficients ( $T_s$  and  $T_p$ ) are given by

$$T_s = 1 - R_s, \quad (9)$$

and

$$T_p = 1 - R_p. \quad (10)$$

However, in case of the unpolarised (containing equal amounts of the of  $s$ - and  $p$ -polarisations) light, the reflection coefficient is just equal to the mean of  $R_s$  and  $R_p$ .

### III QUALITATIVE REVIEW OF THE RECENT IMPORTANT INVESTIGATIONS ON THE BIOPHOTONICS AND OPTOFLUIDICS AND THE CONCLUDING REMARKS

The importance of this fast evolving field can be judged from the fact that during the last five years or so, a number of good books [4, 5, 6] and chapters [7, 8] have been written covering the various aspects of the technology. Srinivasan [4] has brought out a very useful book on the latest advances in vibrational spectroscopic biomedical imaging, which includes chapters written by expert spectroscopists. This book discusses recent progress in the field in areas such as instrumentation, detector technology, novel modes

of data collection, data analysis, and various biomedical applications, besides describing the IR imaging techniques, including transmission reflection, transflection, and attenuated total reflection (ATR) imaging, and Raman imaging. The efficient use of vibrational spectroscopy in clinical applications has also been emphasized in this state-of-the-art guide. In addition, this book gives useful information about the Automated breast histopathology using mid-IR spectroscopic imaging, Synchrotron-based FTIR spectromicroscopy and imaging of single algal cells and cartilage, Preparation of tissues and cells for infrared and Raman spectroscopy and imaging Evanescent wave imaging, FTIR, Raman, and surface-enhanced Raman spectroscopic imaging of fungal cells, Widefield Raman imaging of cells and tissues Resonance Raman imaging, and quantification of carotenoid antioxidants in the human retina and skin Raman microscopy for biomedical applications-efficient diagnosis of tissues, cells, and bacteria.

Yang *et al.* [5] have written E-book, which is a book to help the librarians for sorting out some of the issues surrounding this technology. The book - Optofluidics: Fundamentals, Devices, and Applications, has assembled a group of contributors to offer a comprehensive introduction. The book has important chapters on school, public, and academic libraries; and e-book acquisitions and management. One chapter explores the various standards that now exist and what changes need to be made, and the final chapter is on the future of Academic Book Publishing. Lee [6] has emphasized that Biofluidics has gained in importance in recent years, forcing engineers to redefine mechanical engineering theories and apply them to biological functions. This book is one of the first books to take an interdisciplinary approach to the subject, combines engineering principles with human biology to deliver a text specifically designed for biomedical engineering professionals and students.

Wu and Jamshidi [7] have discussed that Optofluidics is the integration of optical and microfluidic systems to achieve novel functionalities like - the manipulation, assembly, and patterning of objects of interest in a microfluidic environment. They have also emphasized that the recent advances in nanophotonics have introduced exciting methods for biological and chemical sensing with single molecule sensitivities, and have therefore, suggested that the integration of nanophotonic sensors with optofluidic manipulation platforms is essential for sensing and monitoring of single cells and other biomaterials. Mönch and Zappe [8] have written a chapter, which covers the use of microsystems in biophotonics applications, and also includes a brief overview of the most relevant interactions between light and biological samples, followed by the consideration of the biophotonics areas, such as microimaging, sensors, flow cytometry, and microfluidic biochips, in which microsystems play a significant or increasing role.

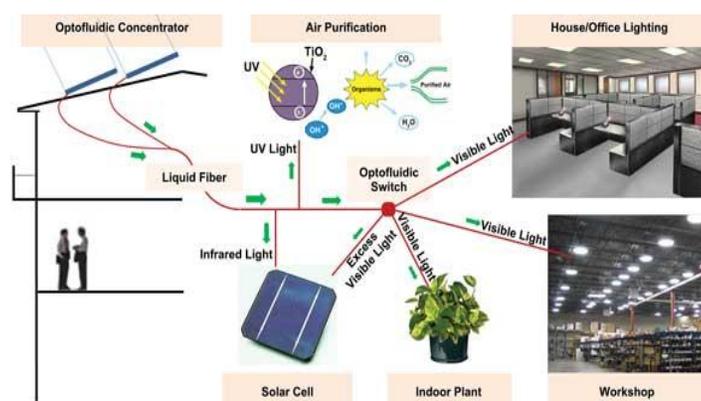
The fields of Microfluidics and Lab-on-a-Chip Technology: Fabrication and Microfluidics have also been discussed and described in detail in the books [9, 10] The recently increasing interest in the medical applications of

the field has resulted in the publication of important review papers [11, 12], which cover the drug research and diagnostic devices. The application of various branches of physics in medical field has recently been increasing. Chopra [13, 14, 15, 16] has discussed in detail the Biomedical Applications based on Spintronics; the Plasma Treatment for Biomedical Applications and use of lasers in surgery. In this direction, some important studies [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] on the use of this technology in medical field have recently been made. A Photonics Global Conference [24] with emphasis on the research papers connected with the topical areas including Optofluidics and Biophotonics, was recently held, in which the biophysical, biochemical and biomedical applications were considered and discussed in detail by various researchers.

It is well understood that the development of the Optofluidic devices is very important, from the point of view of drawing the benefit from other techniques, including liquid crystals in microfluidic channels. It is expected that the optofluidics should have far-reaching consequences like – (i) the on-chip nanofabrication factory taking advantage of the various control techniques as the optical tweezers to build molecular constructions in a fluid environment; and (ii) the photonic integrated circuit, for reconfiguring the optical components with on-chip fluidics. It is clearly understood that such multitasking devices might become possible through a combination of optical devices, which are based on the use of the fluidics for the reconfigurability purpose. In this direction, mention can be made of the optofluidic microscope, which shows promise as a single-task device, but it is necessary to combine it with other devices to draw maximum potential. Efforts are in progress to combine optics and fluidics with other lab on chip techniques like - electric, mechanical, and thermal. The integration of optics and fluidics on-chip is expected to be developed as a technique for creating new possibilities for tunable microscale devices.

A very novel application of optofluidics is for the possible solution of the challenge of the energy problem. Efforts are being made to use Optofluidics, for the delivery of fluids through extremely small channels or tubes. It is believed that with precision design and nano- and microtechnology – optofluidics can be used very efficiently for providing the solutions for the solar fuel generation. It has to be noted that the term solar fuel refers not just to the photovoltaics, but in addition to the conversion of energy from the sun into fuel to power the systems requiring electricity e.g. the conversion of water and carbon dioxide into methane in large industrial biofuel plants. The solar fuels are generated by the mechanisms including photocatalysis and biofuels, the former being the interaction of light with nanoparticles or materials deposited on the surface of a reactor, resulting in encouraging the chemical reaction for the generation of the fuel. It has been established by Erickson *et al.* [25] that by directing light and concentrating it where it can be most efficiently used, can greatly increase the efficiency of the existing energy-producing systems, and also lead to the innovation of some new forms of energy production, They have been designing

and fabricating the systems, which use solar radiation for water purification and for indoor lighting during the daytime, in which case, a Fresnel lens-type solar collector array is used to collect and focus sunlight directly into the optical fibers. In this way, by coupling sunlight to a guiding element, the light is channeled to otherwise inaccessible areas, especially for the indoor illumination. After channeling the sunlight inside, it is directed to the ceilings of office spaces, and the indoor solar panels, and in this way by using the sunlight to drive an indoor solar panel leads to the panel being protected from the elements and thus lasting last longer. Already, some success has been achieved by the group, in the development of a tunable optofluidic solar concentrator and optofluidic switch, which are the core parts of an optofluidic solar lighting system. The schematic of the concentration of the sunlight and then its coupling into the fibers by the optofluidic solar concentrator panel installed on the roof of the building and adaptable to the position of the sun, is shown below:



**FIGURE 2.** Novel proposal of the solar lighting system, composed of an optofluidic solar concentrator, optical fibers in the form of polymer core or liquid core, an optofluidic switch, and the optical lighting terminals. Figure courtesy EPFL.

It is clear that these components constitute a reconfigurable optofluidic illumination network. Another point to be noted is that in this arrangement, the infrared portion of light is separated and directed into the infrared photovoltaic solar cell, while the ultraviolet portion is extracted and used in place of the UV lamp for air purification during the daytime. The residual visible part of the sunlight is finally directed into each room for interior illumination. In this system, the light flow is dynamically controlled by the tunable optofluidic switch, and so the excess visible light can be used to generate electricity by the photovoltaic solar cells. Thus, it is clear that the direct transportation of the sunlight for indoor lighting is a unique and efficient way to conserve energy, and could be much more effective than photovoltaic technology.

Another good effort in this direction is that of the researchers of Cinninati University, who have been able to convert solar energy into biofuels. By performing tests on semitropical frogs, and by using the solar energy and carbon from air, they have been able to make sugar, and it has been emphasized that these sugars can be further transformed into

new biofuels, in the direction of fulfilling the promise of nanotechnology. The principle of conversion of solar energy into biofuels has been shown below:



**FIGURE 3.** Illustration of the principle of conversion of solar energy into biofuels. Figure courtesy University of Cinninati, USA.

Thus, it is a novel way to use solar energy to supplement non-renewable resources. However, in such a system, it is necessary to deviate from the secondary devices like the air filtration and solar panels so that a comfortable constant light source is maintained for ceiling lighting, so that it is not affected by the flickering of the light source due to a temporary factor, e.g. the cloud passing over the system. These different channels can be modulated to maintain a constant light source, a system using electrowetting can be employed to deviate light from one channel into another quite easily. If a droplet of water is made to sit on the outer surface of light tube, a small current excites the ions in the water, and pushes them to the edge of the droplet, and leads to its expansion just enough for it to touch the surface of another tube. Clearly, this expanded droplet then creates a light bridge between the two parallel light tubes, and thus effectively moderates the amount of light streaming through each. However, as explained by David Erickson, professor at Cornell University and visiting professor at EPFL, there is a real challenge before this technology can be used on a larger scale, as the problem to be encountered is to maintain the precision of nano and micro light and fluid manipulation, while creating the industrial sized installations large enough to meet the population's energy requirement," explains David Erickson, professor at Cornell University and visiting professor at EPFL. The up-scaling optofluidic technology requires the integration of many liquid chips to create a super-reactor, on the lines of the building of a super computer by small small elements, which is really a tough problem. Another point to be taken care of while designing such reactors is that the most reactions in liquid channels take place at just the point of contact between the liquid and the catalyst-lined tubes, and hence the efficiency of a system depends on the availability of the surface area for the reactions. The real advantage of the technology is that Scaling down the size of the channels to the micro and nano level implies that thousands more channels can be arranged in the same available space, and thus greatly increasing the overall surface area, and consequently leading to a radical reduction of the size

needed for catalytic and other chemical reactions, while finally reducing the cost. In this way, by adding a light source as a catalyst to the directed flow of individual molecules in nanotubes, we can have extreme control and high efficiency. It has been suggested that there are many possibilities for up-scaling the optofluidics, including the use of the optical fibers for transporting sunlight into large indoor biofuel reactors with mass-produced nanotubes. Also, it has been emphasized that the use of smaller spaces increases the power density, and reduces the operating costs; and at the same time offering the flexibility when concentrating and directing sunlight for solar collection and photovoltaic panels; and increasing surface area, and consequently, the reducing the use of surface catalysts, which are the most expensive element in such systems.

Optofluidics is quite a newly evolving field, though growing rapidly to prove useful for the applications from analysis of biomolecules and cells to creation of novel optical switches and lasers. Most of the progress made in this field, has been during the last decade, after the two related fields – microfluidics and nanophotonics – have reached the peak of their technology development. Many new technologies are quite mature at the lab scale, and the next step is obviously to develop them for practical large-scale applications. At Cornell, the researchers have designed and developed [26] a microscale optofluidic device which can measure the optical absorption in color-producing enzymatic reactions for biochemical analysis. It has been reported that this device employs cavity-enhanced laser spectrophotometry to probe analytes in a microfluidic channel with silicon nitride microring resonators. It has been discussed that the device has been used by many researchers as the refractive index sensors for measuring the binding events on the surface of a waveguide, and that these devices are based on measuring the shift in resonance wavelength of a microcavity, though this shift can result by the nonspecific binding or even by the thermal fluctuations. This device is capable of performing the cavity-enhanced on analytes in a microfluidic channel with microring resonators. The device consists of an array of such resonators within a microfluidic channel, and the rings, which are sensitive to the colour changes produced in the microchannel by the enzymes being tested.

It is of great significance to know that the researchers have shown that the unique spectral signature of the analyte can be measured, thus eliminating the need to alter the surface of the ring to facilitate the binding of specific biological targets. They have achieved this by using high-quality factor microcavities with high-index contrast materials. It has been explained that the Low losses in the cavities allow the light to propagate many times around the circumference of the ring, and thereby increasing the effective optical path length of the device. The researchers in the University of Alberta in Edmonton, Canada are engaged in using the optofluidic technology for developing the next generation portable cytometers for point-of-care and other applications. Presently available flow cytometers are in the form of the complex systems based on using multiple lasers and detectors, which are not only expensive

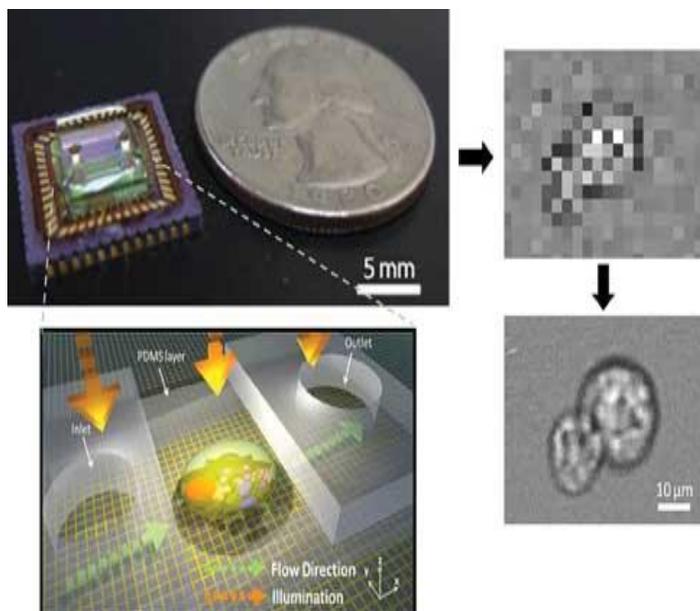
but also quite bulky. The emphasis is on compressing the light excitement and detection system in the existing cytometers. This microscope-based label-free microfluidic cytometer is capable of differentiating the normal cells from cancerous cells, through analysis of the 2-D light-scattering patterns.

Another important research work reported [27] is that a microscope-based label-free microfluidic cytometer can serve as a prototype for point-of-care clinical applications. It has been discussed that the system allows the non-imaging observation of single cells, and enables the differentiation of normal cells from the cancerous cells, on the basis of analyzing the 2-D light-scattering patterns, made possible by incorporating a microscope objective into the cytometer which, in defocusing mode, functions in a way, that is contrary to how these objectives are normally used. It has been emphasized that the numerical aperture of the optical objective improves the signal-to-noise ratio of the light-scattering detection, and hence enables the system to obtain the patterns from platelets, the smallest mature human blood cells.

It is now understood that the Optofluidic technology is believed to provide a breakthrough for the currently underlying problems in microfluidics and photonics/optics by complementary integration of fluidics and photonics, and the key aspect of the optofluidics technology is based on the use of fluidics for tuning the optical properties and addressing various functional materials inside of the microfluidic channels, which have built-in photonic structures. It is also clear that through the optofluidic integrations, fluidics technology enhances the controllability and tunability of the optical systems. In particular, the colloidal dispersion gives novel properties such as photonic band-gaps and enhanced Raman spectrum that conventional optofluidic devices cannot exhibit. Lee *et al.* [28] have reviewed the state of the art of the colloidal dispersions, especially for the optofluidic applications. It has been discussed that from isolated singlet colloidal particles to colloidal clusters, their self-organized assemblies lead to optical manipulation of the photonic/optical properties and responses. Also, the prospects of the integrated optofluidics technology based on colloidal systems have been highlighted.

Recently, a high level conference [29] was held, which featured advances in biophotonics and medical technology, especially useful for quicker diagnosis and more efficient therapies. Microfluidics and optofluidics have revolutionized high-throughput analysis and chemical synthesis during the last decade. The Single molecule imaging has also progressed a lot, because of its capacity to reveal heterogeneities at high spatial and temporal resolutions, which, however, are dependent on the signal to noise ratio (SNR) of the image. Vasdekis and Laporte [30] have reviewed how the SNR can be enhanced in optofluidics and microfluidics, and have outlined the integrated photonic structures, which increase the signal emitted by single chromophores, and minimize the excitation volume. They have also reviewed the compatible functionalization strategies that reduce noise stemming from

non-specific interactions and architectures which minimize bleaching and blinking. For the development of the nanophotonic devices for spectroscopy applications, the optofluidic technologists are engaged in trying to integrate more functionality (electrical, pneumatic, etc.) needs and thus develop stand-alone devices. Such work has progressed in the Shandong University, Jinan, China. Many important diagnosis and detection tests can be performed by using the optofluidic microscope developed by Zheng and his colleagues, shown below:



**FIGURE 4.** The subpixel resolving optofluidic microscope designed by Zheng Guoan, Figure courtesy Zheng Guoan, California Institute of Technology in Pasadena, USA.

The microscope is based on using the oversampling in the time domain to compensate for undersampling in the spatial domain; made possible by applying a superresolution algorithm, the basic principle of this image-enhancement technique being getting one high-resolution image from several low-resolution images. Also, the work is progressing on implementing a new, more robust version using glass-based microfluidic channels integrated at the wafer level. The research groups are trying to incorporate additional imaging modalities onto the current platform, including dark-field and phase imaging capabilities. Use can also be made of the transmission increasing thin films [31] coated by dual ion beam sputtering unit for increasing the image contrast. The subpixel resolving optofluidic microscope has the potential of contributing to a number of point-of-care applications, including improved diagnosis of malaria and detection of blood-borne and water-borne parasites. On the basis of all these very important novel investigations, it can be safely concluded that the Biophotonics and Optofluidics Technology is progressing and evolving fast, and is also on a firm footing.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The author is grateful to the Dr. Nand Kishore Garg, Chairman, Maharaja Agrasen Institute of Technology, GGSIP University, Delhi for providing the facilities for carrying out this research work, and also for his moral support. The author is thankful to Dr. M. L. Goyal, Director, for encouragement. Thanks are also due to Dr. V. K. Jain, Deputy Director for his support during the course of the work. The author is grateful to Prof. V. K. Tripathi, Plasma Division, Department of Physics, Indian Institute of Technology, Delhi, for some useful discussions and suggestions resulting in significant improvement in the presentation of the paper. Thanks are due to the listed agencies for providing the images.

\*Some of the technical analysis presented in this paper is on the basis of the discussions with the researchers of the Photonics Group, Department of Physics, Indian Institute of Technology, Delhi, during the association of the author with the group, as Research Scientist in the Project on “Diffractive optical elements for optical vortices” (From 16-02-2009 to 15-07-2009), Ministry of Science and Technology, Government of India, New Delhi, INDIA.

## REFERENCES

- [1] Fainman, Y., Lee, L., Psaltis, D. and Yang, Ch., *Optofluidics - Fundamentals, Devices and Applications (Biophotonics)*, (McGraw Hill, USA, 2009).
- [2] Fainman, Y. and Psaltis, D., *Optofluidics: fundamentals, devices and applications*, (McGraw Hill, USA, 2009).
- [3] Zahn, J. D., *Methods in bioengineering: biomicrofabrication and biomicrofluidics*, (Artech House, USA, 2009).
- [4] Srinivasan, G., *Vibrational Spectroscopic Imaging for Biomedical Applications*, (McGraw-Hill Biophotonics, USA, 2013).
- [5] Yang, Ch., Psaltis, D., Lee, L., Fainman, Y., *Optofluidics: Fundamentals, Devices, and Applications*, (Ed. Polanka, McGraw Hill, USA, 2009).
- [6] Lee, W., *Biofluid Mechanics in Cardiovascular Systems* (McGraw-Hill’s Biomedical Engineering, USA, 2005).
- [7] Ming, W. C. and Arash, J., Chapter on *Nano-Photonics and Opto-Fluidics on Bio-Sensing, Nano-Bio-Sensing*, (Springer, NY, 2011), pp. 151-176.
- [8] Mönch, W. and Zappe, H., 3.09–*Biophotonics, Comprehensive Microsystems*, ScienceDirect **3**, 293–321 (2008).
- [9] Bruus, H., *Theoretical Microfluidics*, Oxford University Press, UK, 2008).
- [10] Herold, K. E., Rasooly, A., (editor), *Lab-on-a-Chip Technology: Fabrication and Microfluidics*, (Caister Academic Press., UK, 2009).
- [11] Chen, K., *Microfluidics and the future of drug research*, The University of Toronto Journal of Undergraduate Life Sciences **5**, 66–69 (2011).
- [12] Yetisen, A. K., *Paper-based microfluidic point-of-care diagnostic devices. Lab on a Chip*. (2013). doi:10.1039/C3LC50169H.

- [13] Chopra, K. N., *A Short Technical Review of the Biomedical Applications based on Spintronics*, (communicated 2014).
- [14] Chopra, K. N., *A Short Note on the Technical Investigations of the Plasma Treatment for Biomedical Applications*, Atti Fond G. Ronchi **68**, 645-660 (2013).
- [15] Chopra, K. N., *Applications of Lasers in Surgery*, Invited Talk, Symposium on Electromagnetic Waves and Applications, Jawaharlal Nehru University (JNU), New Delhi, Feb. 2005.
- [16] Chopra, K. N., *Biomedical Applications of Lasers*, Invited Talk, Workshop cum Symposium on Electromagnetic Fields in Environment: Implications and Solutions, Jawaharlal Nehru University (JNU), New Delhi, March, 2007.
- [17] Shemesh, J., Bransky, A., Khoury, M., Levenberg, S., *Advanced microfluidic droplet manipulation based on piezoelectric actuation*, Biomedical Microdevices **12**, 907-914 (2010).
- [18] Cady, N. C., *Microchip-based PCR Amplification Systems. Lab-on-a-Chip Technology: Biomolecular Separation and Analysis*, (Caister Academic Press, UK, (2009).
- [19] Chokkalingam, V., Tel, J., Wimmers, F., Liu, X., Semenov, S., Thiele, J., Figdor, C. G., Huck, W. T. S., *Probing cellular heterogeneity in cytokine-secreting immune cells using droplet-based microfluidics*, Lab on a Chip **13**, 4740-4744 (2013).
- [20] Keymer, J. E., Galajda, P., Muldoon, C. R. and Austin, R., *Bacterial metapopulations innanofabricated landscapes*, PNAS **103**, 17090676 (2006).
- [21] Ahmed T., Shimizu, T. S., Stocker, R., *Microfluidics for bacterial chemotaxis*, Integrative Biology **2**, 604-629 (2010).
- [22] Di Leonardo, R., Angelani, L., Ruocco, G., Iebba, V., Conte, M.P., Schippa, S., De Angelis, F., Mecarini, F., Di Fabrizio, E., *A bacterial ratchet motor*, PNAS **107**, 9541-9545 (2010).
- [23] Pégard, N. C. and Fleischer, J. W., *Microfluidic Flow-Scanning Optical Tomography*, Journal of Biomedical Optics **18**, 040503 (2013).
- [24] *Photonics Global Conference 2012*, Nanyang Technological University, Singapore, 13-16 Dec. 2012,
- [25] Erickson, D., Sinton, D. and Psaltis, D., *Optofluidics for energy applications*, Nature Photonics **5**, 583-590 (2011).
- [26] Optics InfoBase: Biomedical Optics Express **2**, 207-407 (2011).
- [27] Optics InfoBase: Optics Express. **19**, Iss. 1 —Jan. 3, 1-408 (2011).
- [28] Lee, S.-K., Kim, S.-H., Kang, J.-H., Park, S.-G., Jung, W.-J., Kim, S.-H., Yi, G.-R. and Yang, S.-M., *Optofluidics technology based on colloids and their assemblies*, Microfluidics and Nanofluidics **4**, 129-144 (2008).
- [29] Laser World of Photonics, Munich, Germany, May 13-16, 2013.
- [30] Vasdekis, A. E. and Laporte G., P. J., *Molecule Imaging in Optofluidics and Microfluidics*, Int J Mol Sci. **12**, 5135-5156 (2011).
- [31] Chopra, K. N. and Maini, A. K., Monograph, entitled, "Thin Films and their Applications in Military and Civil Sectors", Defence Science and Documentation Centre, Defence Research and Development Organisation, Ministry of Defence, Metcalfe House, Delhi, INDIA, (2010).

# A Technical Note on Gallium Nitride Technology and short Qualitative Review of its Novel Applications\*



**Kamal Nain Chopra**

*Applied Physics Department, Maharaja Agrasen Institute of Technology,  
Rohini, GGSIP University, New Delhi - 110086, India.*

**E-mail:** kchopra 2003@gmail.com

(Received 18 March 2014, 25 August 2014)

## Abstract

The increasing importance of the Gallium Nitride (GaN) Technology in finding newer applications in the device fabrication, has led to a spurt in the research efforts on this evolving topic. The present paper discusses technically (a) Designing based on the interdependence of the important performance parameters, (b) Some of the important devices like – (i) New Kind of Nanotubes, (ii) Laser Diodes, (iii) High-resolution Printings, (iv) Solar Cells, and (v) Microwave Radio-Frequency and Power Amplifiers, besides bringing out the salient features of GaN technology. The novel papers on the subject depicting the newer trends and novel applications have also been qualitatively reviewed.

**Keywords:** GaN Technology, GaN Devices.

## Resumen

La creciente importancia de la tecnología del Nitrato de Galio (GaN) de encontrar nuevas aplicaciones en la fabricación de dispositivos, ha conducido a una aceleración en los esfuerzos de investigación sobre este tópico en desarrollo. El presente artículo discute algunos aspectos técnicos sobre: (a) El diseño basado en la interdependencia de parámetros de desempeño importantes, (b) Algunos dispositivos importantes tales como – (i) Nuevos tipos de Nanotubos, (ii) Diodos Laser, (iii) Impresoras de alta resolución, (iv) Celdas solares y (v) Amplificadores de potencia y de frecuencia de micro ondas de radio, todo esto muestra la importancia de la tecnología del GaN. Los artículos recientes sobre el tema muestran las nuevas tendencias y nuevas aplicaciones que han sido revisadas cualitativamente.

**Palabras clave:** Tecnología del GaN, Dispositivos de GaN.

**PACS:** 85.30.De, 72.20.Fr, 72.80.Ey

**ISSN 1870-9095**

\*Some of the technical analysis presented in this paper is on the basis of the discussions with the various researchers in the Thin Film Group of Indian Institute of Technology, Delhi during the author's association with the group, in the year 2009, as the Research Scientist in the Project on "Spintronics" sponsored by the Department of Information Technology, Government of India.

## I. INTRODUCTION

It is now well established [1, 2, 3] that GaAs and GaN are very useful in the semiconductors, electronics and spintronics industries is Recently; Chopra [4, 5, 6, 7, 8, 9] has made important studies on the use of GaAs and GaMnAs in Spintronics, and Sensor and Deceiving Technologies. A lot of interest has been recently shown in Gallium Arsenide Technology and Devices based on this technology. However, because of various advantages of GaN over GaAs in the devices being made by GaAs technology, GaN is taking over as the more handy and suitable material for the fabrication of the semiconductor devices. It is being accepted as the next important semiconductor material. It has the advantage that it can be operated at high temperatures. Also, it has wide band gap

energy. It has great potential, and is regarded as key material for the next generation of high frequency and high power transistors. GaN with a high crystalline quality can be made by depositing a buffer layer at low temperatures, and because of its high-quality has led to the fabrication of the p-type GaN, p-n junction blue/UV-LEDs, and the room-temperature stimulated emission, which is required for the laser action, Because of the establishment of this utility, some commercial firms have developed (i) the high quality blue LEDs, (ii) violet-laser diodes with long life, and (iii) the nitride based devices like UV detectors and high speed field effect transistors (FETs). High brightness GaN LEDs have been developed for all the primary colors, which have applications in - daylight visible full color LED displays, white LEDs, and blue laser devices. Interestingly, the initial development of the GaN-based high-brightness LEDs was

based on the thin film of GaN deposited by the MOCVD on sapphire.

At present, the Group III nitride semiconductors are recognized as the most promising semiconductor for making the optical devices in the visible short wavelength and UV region. GaN crystals are generally grown in the laboratory from a molten Na/Ga melt held under 100 atm pressure of N<sub>2</sub> at 750 °C. The problem encountered is that as Ga does not react with N<sub>2</sub> below 1000 °C, and hence the powder is made from something more reactive, by either of the following ways:

- (i)  $2\text{Ga} + 2\text{NH}_3 \rightarrow 2\text{GaN} + 3\text{H}_2$ .
- (ii)  $\text{Ga}_2\text{O}_3 + 2\text{NH}_3 \rightarrow 2\text{GaN} + 3\text{H}_2\text{O}$ .

However, commercially, the GaN crystals are grown using the technique of the molecular beam epitaxy (MBE). In certain cases, this technique is further modified to reduce dislocation densities, which is done by first applying an ion beam to the growth surface for creating the nanoscale roughness, and subsequently polishing the surface, by carrying the process in a vacuum.

GaN exists in two forms: (i) Hexagonal (Alpha) GaN, and (ii) Cubic (Beta) GaN. The properties of (Alpha) GaN are: is stable, has Wurtzite Structure, has density 6.095 g/cm<sup>3</sup> at 300K, has lattice parameters at 300K as -  $a_0 = 0.3189$  nm,  $c_0 = 0.5185$  nm, has direct Energy Gap  $E_g$ , whose value at 293-1237 K =  $3.556 - 9.9 \times 10^{-4} T^2 / (T+600)$  eV., has Energy Gap  $E_g$  at 300 K ~ 3.45eV, and has Energy Gap  $E_g$  at ca. 0 K = 3.50 eV. The parameters of Cubic (Beta) GaN are: is Meta-stable, has Zinc Blende Structure, has density 6.10 g.cm<sup>-3</sup> at 300K, and has lattice parameters at 300K as- 0.450 nm., has Energy Gap  $E_g$  at 300 K ~ 3.24eV, and has Energy Gap  $E_g$  at ca. 0 K = 3.30 eV. Some other parameters of GaN in general are: Bandgap (eV) – 3.44 (Direct); Electron Mobility (cm<sup>2</sup>/Vs) – 900, Hole Mobility (cm<sup>2</sup>/Vs) – 10; Critical Field  $EC$  (V/cm) – 3000,000, Thermal Conductivity (W/mK) – 100 (200 Film); and coefficient of Thermal Expansion (ppm/K) – 5.4-7.2. The Bandgap of semiconductors is related to temperature (in Kelvin K) by:

$$E_G(T) = E_G(0) - \frac{\alpha T^2}{(T + \beta)}, \quad (1)$$

Where  $\alpha$  and  $\beta$  are coefficients. If  $T$  is measured in K, bandgap is in electron volts (eV).

GaN is grown in Wurtzite crystal structure, or in Zinc-blende crystal structure. Obviously, the band gap,  $E_g$ , is affected by the crystal structure. The Wurtzite Crystal Structure, and the Zinc-blende crystal structure are shown below.

In case of the Wurtzite crystal structure, it has been observed that it has an ideal angle of 109° and the nearest neighbour at 19.5 nm, and has been found to be energetically favorable. It has to be noted that this structure is also observed in other semiconductors, like AgI, ZnO, CdS, and CdSe,

In case of the Zinc-blende Crystal Structure, it has an ideal angle of 109.47°, Energy gap of 3.2 eV, and the nearest neighbor at 19.5 nm.

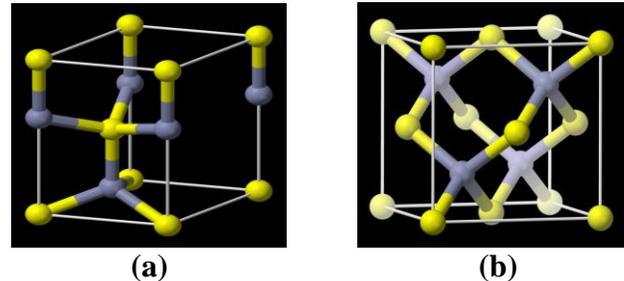


FIGURE 1. (a) Wurtzite crystal structure of GaN, (b) Zinc-blende crystal structure of GaN, Figure courtesy.

<http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Wurtzite-unit-cell-3D-balls.png>.

The GaN Bonding Properties are given below:

- (i) Tetrahedral bonds – with sp<sup>3</sup> hybridization, Bonding angle: 109.47°, and the Bond Length = 19.5 nm.
- (ii) Ga-N bonds are significantly stronger than Ga-Ga interactions (based on distance).

GaN shows the mixed ionic-covalent bonding - Ionicity of a bond is the fraction  $f_i$  of ionic character compared to the fraction of  $f_h$  of covalent character. The Modern definition is the ionicity phase angle. The Electronegativity, denoted by the symbol  $\chi$ , is a chemical property, which defines the tendency of an atom or a functional group to attract electrons (or electron density) towards itself. The percentage of the ionic character  $I$  a function of the electronegativity difference, and is found to increase with increase in the electronegativity difference. The behaviour of the curve showing the dependence of percentage of ionic character on the electronegativity difference is as shown below:

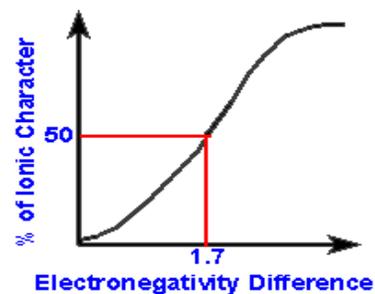


FIGURE 2. Ionic character as a function of the Electronegativity Difference. Figure courtesy.

<http://www.bcpl.net/~kdrews/bonding/bonding2.html>.

The fraction of ionic character  $f_i$  is empirically given by the following relation:

$$f_i = \left[ 1 - e^{-\frac{(\chi_A - \chi_B)^2}{4}} \right]. \quad (2)$$

Where  $(X_A - X_B)$  is the difference in electronegativity between the atoms A and B.

The GaN Bonding Properties based on calculations using both methods are as: Pauling ionicity and Modern ionicity are respectively 0.387 and 0.500. Bond Character is dependent on electronegativity, and varies as given below:

$$\chi_N \gg \chi_P > \chi_{As} > \chi_{Sb}$$

The Bonding strength determines energy gap size, and the large band gap is the evidence of strong bonding in GaN. The parameters for some of the Strongly Ionic Compounds (also insulators) are:

$$\text{LiF} - 11\text{eV}; \text{NaCl} - 8.5\text{eV}; \text{KBr} - 7.5 \text{ eV}.$$

For some III-V compounds, the values are as: GaN – 3.2 eV/3.4 eV, GaP – 2.3 eV, AlSb – 1.5 eV, and InP – 1.3 eV.

## II. USE OF THE INTERDEPENDENCE OF PARAMETERS IN DESIGNING OF GaN DEVICES

It is very important to understand and consider the Interdependence of Parameters of the various GaN Material Parameters, while designing the devices.

### A. Temperature dependence of bandgap energy

The energy gap (eV) dependence on temperature has been studied by a number of workers in various academic and industrial institutions, It is found to fit in the following equation:

$$E_g(\text{eV}) = 3.396 + 9.39 \times 10^{-4} \cdot \left[ \frac{300^2}{300 + 772} - \frac{T^2}{T + 772} \right]. \quad (3)$$

### B. Density of states for GaN

The density of states in a semiconductor is the density per unit volume, and energy of the number of solutions to Schrödinger's equation. It is assumed that the semiconductor is modeled as an infinite quantum well in which electrons with effective mass,  $m^*$ , can move freely, the energy in the well being set to zero. The results of the experiments of the workers in various academic and industrial institutions are quite similar, and the established variations for the parameters  $N_c(T)$  and  $N_v(T)$  representing respectively the density states for the conduction band and valence band as a function of temperature (in K) are given empirically by the following expressions:

$$N_c(T) = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.50945 \times 10^{19} \cdot \left( \frac{m_e^*}{m_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$N_v(T) = 2 \left( \frac{2\pi m_h^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.50945 \times 10^{19} \cdot \left( \frac{m_h^*}{m_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (4)$$

where  $k$  is wavenumber,  $h$  is the Planck's constant,  $T$  is the temperature (in K),  $m_c^*$  and  $m_h^*$  are density-of-state effective masses of electrons and holes,  $m_0$  is the free effective mass of electron,  $E_c$  and  $E_v$  are energies of the bottom of the conduction band and the top of the valence band, respectively, and  $h$  is Planck's constant.

Also, the corresponding computed values at 300° C K are given below:

$$N_c(300) = 2.3 \times 10^{18}, \quad m_e^* = 0.20 m_0 \text{ for Wurtzite GaN,}$$

$$N_v(300) = 4.6 \times 10^{19}, \quad m_h^* = 1.50 m_0 \text{ for Wurtzite GaN.} \quad (5)$$

### C. Incomplete ionization of impurity atoms

The ionization of the impurity atoms has also to be taken care of, while designing the devices. The accepted dependences are given by the following expressions:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{[1 + g_B \cdot \exp\left(\frac{E_{Fn} - E_c + \Delta E_D}{kT}\right)]}, \quad \Delta E_D = 0.016 \text{ eV for Si,}$$

$$N_A^+ = \frac{N_A}{[1 + g_B \cdot \exp\left(\frac{E_v - E_{Fp} + \Delta E_A}{kT}\right)]}, \quad \Delta E_A = 0.175 \text{ eV for Mg,} \quad (6)$$

where  $N_D^*$  and  $N_A^*$  are concentrations of ionized donors and acceptors, respectively. If  $N_D > N_A$ , the semiconductor is of  $n$ -type.

### D. Intrinsic carrier concentration

The intrinsic carrier concentration

$$n_i(T) = \sqrt{N_c \cdot N_v} \cdot \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right), \quad (7)$$

and its numerical values for T and T=300 are given below:

$$n_i(T) = 1.98 \times 10^{16} \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{20488}{T}\right), \quad (8)$$

and

$$n_i(300) = 2.25 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3} \text{ for epitaxial GaN.} \quad (9)$$

The small intrinsic carrier concentration in GaN at room temperature enables the high power and temperature applications.

### E. Mobility and recombination models

The electron mobility  $\mu$  is defined as

$$\mu = \frac{v_d}{E},$$

where  $E$  is an electric field applied across a piece of material, for which the electrons respond by moving with an average velocity called the drift velocity  $v_d$ .

The Mobility Models (a and b) and Recombination Models (c and d) are also considered in the designing and fabrication of the devices. These are as: (a) Analytical Mobility Model, (b) Field-Dependent Mobility Model. These are respectively given as:

$$\mu = \mu_{\min} + \frac{\mu_{\max} \left(\frac{T}{300}\right)^\alpha - \mu_{\min}}{1 + \left(\frac{T}{300}\right)^\beta \left(\frac{N_{tot}}{N_{ref}}\right)^\gamma}, \quad (10)$$

and

$$\mu_n(E) = \frac{\mu_n}{\left[1 + \left(\frac{\mu_n E}{v_{sat}}\right)^{\beta_i}\right]^{1/\beta_i}}. \quad (11)$$

We know that the carrier generation and recombination results from the interaction between electrons and other carriers, with the lattice of the material, or with the optical photons. Due to the electron movement from one energy band to another, it gains or loses energy, in some other form, which distinguishes different types of generation and recombination. In the Shockley–Read–Hall (SRH) process, the electron in transition between bands passes through a new energy state created within the band gap by an impurity in the lattice - Localized State, which can absorb differences in momentum between the carriers, and hence this process is the dominant generation and recombination process in the indirect bandgap materials. In case of the Auger recombination, the energy is given to a third carrier, excited to a higher energy level without moving to another energy band, which after the interaction, normally loses its excess energy to thermal vibrations. Since the third particle has to begin the process in the unstable high-energy state, the Auger effect process is not easily produced.

The parameters - Shockley-Read-Hall Recombination ( $R_{SRH}$ ) and (d) Auger Recombination ( $R_{Au}$ ) are respectively given as;

$$R_{SRH} = \frac{p \cdot n - n_i^2}{\tau_p (n + n_i) + \tau_n (p + n_i)},$$

$$\tau_n = \frac{\tau_{n0}}{1 + \left(\frac{N_{tot}}{N_n^{SRH}}\right)^{\gamma_{ns}}},$$

and

$$R_{Au} = (C_p p + C_n n)(n \cdot p - n_i^2). \quad (12)$$

where  $\tau_p$  and  $\tau_n$  are the life times of the carriers respectively for p type and n type (each being  $\sim 1$  nanosecond).

Thus we see that the designing of the devices based on the GaN is a very specialized job. The interdependence of many parameters, and also their dependences on other parameters like temperature,  $E_c$  and  $E_v$  has to be considered.

Though, software for this work is available, still the optimum design can be made only by a specialist designer. In addition to this, the technologist has to produce the optimized results with a high degree of repeatability. Often, they have to work as a team, because the achieved results are considerably different from those expected on the basis of computations, the final results being dependent on the feedback of the measurements, and the experience of the designers and technologists for applying corrections.

### III. GaN BASED DEVICES

GaN is a binary III/V direct bandgap semiconductor, which has been commonly employed in bright light-emitting diodes during the last two decades. The compound has a Wurtzite crystal structure, and is a very hard material. The fact that it has wide band gap of 3.4 eV, is responsible for its special properties for applications in optoelectronic, high-power and high-frequency devices. Also, the GaN substrate can be used for making violet (405 nm) laser diodes, even without using the nonlinear optical frequency-doubling. As is the case with nitrides of all group III elements, it possesses low sensitivity to ionizing radiation, and hence is very suitable material for solar cell arrays used in satellites. Besides, having stability in radiation environments, it is very useful for the Military and space applications. Another useful characteristic is that GaN transistors can operate at much higher temperatures and at much higher voltages than GaAs transistors, and hence are employed for making the ideal power amplifiers at microwave frequencies.

Due to the fact that GaN has very high breakdown voltages, and high electron mobility and saturation velocity, it is an ideal candidate for high power and high temperature microwave applications, like the microwave RF power amplifiers, and high voltage switching devices for power grids. Also, the GaN-based RF transistors are used as the microwave source for microwave ovens. Its large band gap ensures that the performance of GaN transistors is maintained up to higher temperatures than the silicon transistors. Already, the GaN based Schottky rectifiers with ultrafast reverse recovery characteristics, and UV photodetectors with ultralow dark currents have been developed. Some safety precautions have to be taken, as the GaN dust is an irritant to skin, eyes and lungs. However, the bulk GaN is non toxic and biocompatible, and therefore, can be used in the electrodes and electronics of implants in living organisms.

GaN is very much in use in various applications, and some of the typical applications are:(i) New Kind of Nanotube, (ii) Laser diodes, (iii) High-resolution Printings, (iv) (v) Solar Cells, and (v) Microwave radio-frequency power amplifiers,

The New Kind of Nanotube is in the form of Single Crystal Nanotube, which is fabricated by using GaN. The Gallium Nitride nanotubes have diameter between 30 – 200 nm, and have the potential for mimicking ion channels. The Gallium Nitride nanotube is as shown below:



FIGURE 3(a). Gallium Nitride nanotube.

The GaN Laser Diode has the properties: Normally emits the ultraviolet radiation, Indium doping allows variation in band gap size, and the Band gap energies range from 0.7eV – 3.4eV. The Gallium Nitride Laser Diode is as shown below:



FIGURE 3(b). Gallium Nitride Laser Diode. Figure courtesy. [http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/assets/images/2002/Dec-17-2002/indium\\_LED.jpg](http://www.lbl.gov/Science-Articles/Archive/assets/images/2002/Dec-17-2002/indium_LED.jpg).

These GaN Laser Diodes have Applications in: ‘Blu-Ray’ technology, and Laser Printing.

The GaN Solar Cells have the properties: Indium doped (InGaN), Conversion of many wavelengths for energy, Theoretical 70% maximum conversion rate, Multiple layers attain higher efficiency (Need many layers to attain 70%), and Lattice matching not an issue. They have various advantages as: High heat capacity, Resistant to effects of strong radiation, and High efficiency. However, there are certain difficulties: Too many crystal layers lead to the system damaging stress, and are very expensive. The GaN High Power Rectifiers are based on various properties: High Temperature, High Power and High Frequency Applications, Intrinsic wide bandgap energy, High breakdown field for the case of the power applications, Very good electron transport properties, Heterostructure availability and strong piezoelectric polarization effect.

Fabrication of the GaN high power rectifiers (GaN Schottky and PiN rectifiers) mainly involves the steps: (i) GaN epi layer on sapphire, and (ii) GaN epi layer on freestanding GaN, in the Vertical geometry. The device processing is based on: Mesa etch (ICP dry etch), Oxide deposition (PECVD), p-guard rings (Implantation), Window opening (RIE), Ohmic metal formation (RTA), and

Schottky metal deposition (E-beam). The GaN Schottky Diode Array, is shown below

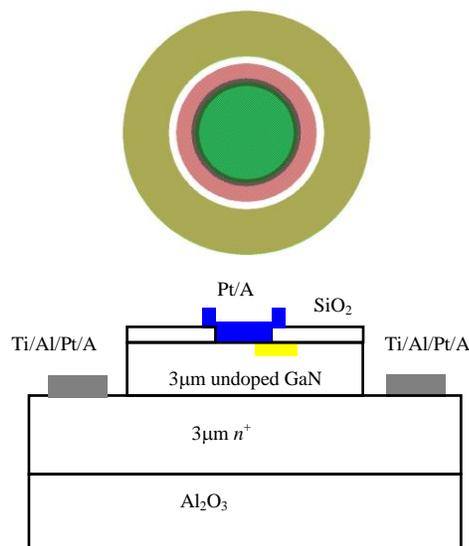


FIGURE 4. Schottky diode array with the size of 500 μm x 500 μm. Figure courtesy.

[http://www.shef.ac.uk/polopoly\\_fs/1.119646!/image/sm1.jpg](http://www.shef.ac.uk/polopoly_fs/1.119646!/image/sm1.jpg)

The Schottky diode array with the size of 500 μm×500 μm, has nitride windows interconnected with electroplated Au (~3μm). It has 161 A forward output current at 7.12 V,  $R_{ON}^2$  (On-state resistance) = 8 mΩ·cm<sup>2</sup>, 1.1 kW for 6×6 mm<sup>2</sup> (active device area). Already, some promising results for practical on-state current, have been achieved, and are very close to the simulated  $R_{ON}$  values (3.3 mΩ·cm<sup>2</sup>).

#### IV. QUALITATIVE REVIEW OF SOME RECENT NOVEL APPLICATIONS AND CONCLUDING REMARKS

The important features and benefits of GaN as a material for the device fabrication are: High frequencies, bandwidth up to 6 GHz, High efficiencies, High power density, High thermal conductivity, and Excellent ruggedness. As a result of these characteristics, GaN can operate at high temperatures, without loss of reliability (250 °C compared to 225 °C for Si LDMOS). Therefore, it has many important applications: Commercial wireless infrastructure (base stations), Radar systems, Broadband and narrow band general purpose amplifiers, Industrial /Scientific Medical Instruments, Jammers and EMC testing. It is finding new applications in Defence and aerospace sectors and also Consumer electronics. With the increasing realization of the advantages of GaN over GaAs, there has been a spurt of studies [10, 11, 12, 13, 14] on exploring the Novel Applications of GaN based devices. Wang *et al.* [15] have investigated the optical joint densities of states of three InGaN/GaN-based light-emitting diodes with different emission wavelengths (violet, blue and green) operated at

various currents, and their results have indicated that the blue shift of the emission with increasing current is related to the variation in optical joint density of states. They have ascribed the blue shift to the screening of the piezoelectric field by carriers. They have also found a tail at the low-energy end of the density of states, corresponding to localized states, and have emphasized that the presence of these tails broadens the spectra of the devices.

Wang [16] has described the research on the fabrication and characterization of Gallium nitride (GaN) based diodes. He has emphasized that because of its direct wide bandgap and outstanding electric properties, GaN is widely used in solid state lighting applications and considered as an alternative to Silicon in power electronics devices. He has fabricated (i) high performance GaN based Schottky diodes by using n- bulk GaN substrates synthesized by Hydride Vapor Phase Epitaxy (HVPE) process. By depositing full back ohmic contact on the N face and circular Schottky contacts on the Ga face, it has been shown that the Schottky diodes possess excellent forward and reverse bias characteristics, and thus result in a high figure of merit (FOM); (ii) GaN Schottky diodes on n- epilayer/ n+ bulk GaN structure, by depositing the epilayers using Metal-Organic Chemical Vapor Deposition (MOCVD) on HVPE grown substrate. The devices have been reported to have shown very high breakdown voltages. Also, the electrical measurements like current-voltage (I-V) and capacitance-voltage (C-V) have been made to extract ideality factors, series resistance and other important parameters from the diode, besides carrying out the Raman spectroscopy to determine the average junction temperature of the commercial ultraviolet (UV) light emitting diodes (LEDs). These results are expected to have important impact on the development of novel devices with increased efficiency. Felbinger *et al.* [17] have reported the growth, fabrication, and performance of AlGaIn/AlN/GaN high-electron-mobility transistors (HEMTs) with a total barrier thickness of 7 nm. They have discussed that (i) an optimized surface passivation and an Ohmic recess etch yield HEMTs exhibiting 0.72 S/mm peak extrinsic DC trans conductance at a current density of 0.47 A/mm, and (ii) the devices with a gate length of 90 nm achieve 78 GHz unity-current-gain frequency and up to 166 GHz maximum frequency of oscillation. It has been reported that the minimum noise figure at 10 GHz is 0.52 dB with an associated gain of 9.5 dB.

Hoffmann *et al.* [18] have investigated the growth, fabrication, and properties of GaN/AlN/sapphire with periodically poled surface polarity for second harmonic generation, and have achieved the periodic inversion of the surface polarity by the growth of a thin AlN buffer layer and subsequent partial removal by using either wet etching with potassium hydroxide (KOH) or reactive-ion etching (RIE). It has been emphasized that the GaN growth on these substrates by MOCVD leads to Gapolar GaN on the AlN buffer and N-polar GaN on the bare sapphire. By using the atomic force microscopy and scanning electron microscopy, they have demonstrated that a sufficient combination of H<sub>2</sub> and NH<sub>3</sub> surface treatment before the growth of the GaN

layers removes surface defects introduced by the RIE etching, which implies that the films with comparable quality and properties independent of the etching technique can be grown. It has, however, been noticed that, in contrast to the RIE etching, the interfaces between the Ga-polar and N-polar GaN are rough if KOH etching is applied, and hence it has been concluded that MOCVD in combination with RIE etched AlN/sapphire substrates can be a versatile process to fabricate GaN with periodically poled surface polarity as desired for the UV light generation by frequency doubling. Mehandru *et al.* [19] have used a finite element simulation to quantitatively estimate the effectiveness of flip-chip bonding in the temperature rise of bulk GaN Schottky rectifiers under various conditions of current density, duty cycle, forward turn-on voltage and on-state resistance, by keeping the temperature difference between flip-chip bonded devices and bottom bonded devices = 20 °C even at modest current densities. They have reported that the maximum temperature in the bulk cases occurred in the center of the GaN substrate thickness, and the transit time of the temperature reaching the steady state for the flip-chip bonding device is in the range of millisecond, which is faster than that of most power switch applications. It has been suggested that the Flip-chip bonding can improve the heat dissipation of high power, bulk GaN rectifiers. The realization of the importance of the GaN technology can be seen from the fact that very recently, the 2014 EMN Spring Meeting has taken place [20], where many aspects of the technology and the devices based on this, in addition to many other topics including quantum dots and semiconductor nanowires have been discussed. Thus, it is seen that GaN, in addition to being useful in itself for various applications, can be tailored to provide some novel results, and hence it can be safely concluded that the technology is evolving, and is on a firm footing for finding novel applications.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The author is grateful to the Dr. Nand Kishore Garg, Chairman, Maharaja Agrasen Institute of Technology, GGSIP University, Delhi for providing the facilities for carrying out this research work, and also for his moral support. The author is thankful to Dr. M. L. Goyal, Director, for encouragement. Thanks are also due to Dr. V. K. Jain, Deputy Director, for his support during the course of the work. The author is grateful to Prof. V. K. Tripathi, Plasma Division, Department of Physics, Indian Institute of Technology, Delhi, for some useful discussions and suggestions resulting in significant improvement in the presentation of the paper. Thanks are due to the listed agencies for providing the images.

## REFERENCES

- [1] Das, T., Mahata Chandreswar, G. Sutradhar, Bose, P. K., and Maiti C.K., *Interfacial and Electrical Properties of*

- GaAs Metal-Oxide-Semiconductor Device with  $TiO_xN_y$  High-k Gate Dielectrics*, doi: 10.1149/1.3569925 ECS Trans. **35**, 325-332 (2011).
- [2] Lidow, A., Strydom, J., Rooij, M. de and Ma, Y., *Gallium Nitride (GaN) technology overview (2012)*. In: GaN Transistors for Efficient Power Conversion, (Power Conversion Publications, UK, 2012).
- [3] Zampardi, P. J., *Will CMOS Amplifiers Ever Kick-GaAs?*, (IEEE, USA, 2010)
- [4] Chopra, K. N., *A Short Note on Ferromagnetism by Doping, and its Applications to “Spintronics”*, Atti Fond G. Ronchi **69**, 27-38 (2014).
- [5] Chopra, K. N., *A Short Note on the Technicalities of Theoretical Aspects and Characteristics of GaMnAs Digital Alloys*, Atti Fond G. Ronchi **69**, 67-80 (2014).
- [6] Chopra, K. N., *A Short Note on the Organic Semiconductors and their Technical Applications in Spintronics*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **7**, 1-6 (2013).
- [7] Chopra, K. N., *A Technical Note on Important Experimental Revelations and the Current Research in “Spintronics”*, Atti Fond G. Ronchi **68**, 279-291 (2013).
- [8] Chopra, K. N., *Sensor and deceiving technologies*, Proceedings of the IR Workshop (sponsored by Gas Turbine Research Establishment, Bangalore), March 2012, Aeronautical Society of India, Bangalore, INDIA.
- [9] Chopra, K. N., *Gallium Arsenide Technology and Devices – Technical Tutorial and short Review*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **7**, 1-8 (2013).
- [10] Shipman, M. and Ivanisevic, A., *Research Finds Gallium Nitride is Non-Toxic, Biocompatible – Holds Promise For Biomedical Implants*, (North Carolina State University, USA, 2012).
- [11] IEEE Intl. Symposium, Technical Abstract Book, Session TH3D, pp. 164–165 (2010).
- [12] *SiC and GaN Vie for Slice of the Electric Vehicle Pie*. Powerelectronics. November 1, (2009).
- [13] Davis, S., *Enhancement Mode GaN MOSFET Delivers Impressive Performance*, Power Electronic Technology **36**, 3 (2010).
- [14] Lidow, A., Witcher, J., Brandon and Smalley, K., *Enhancement Mode Gallium Nitride (eGaN) FET Characteristics under Long Term Stress*. GOMAC Tech Conference, (March 2011).
- [15] Yu-Shou, W., Nai-Chuan, Ch., Chun-Yi, L. and Jenn-Fang, Ch., *Optical joint density of states in InGaN/GaN-based multiple-quantum-well light-emitting diodes*, Physica B: Condensed Matter **406**, 4300–4303 (2011).
- [16] Yaqi, W., *Fabrication and Characterization of Gallium Nitride Based Diodes*, Dissertation, 2011-05-06, Auburn Theses and Dissertations, Auburn University, USA.
- [17] Felbinger, J., Fagerlind, M., Axelsson, O., Rorsman, N., Gao, X., Guo, S., Schaff, W. and Eastman, L., *Fabrication and Characterization of Thin-Barrier  $Al_{0.5}Ga_{0.5}N/AlN/GaN$  HEMTs*, IEEE Electron Device Letters, **32**, 889-891 (2012).
- [18] Hoffmann, M. P., Gerhold, M., Kirste, R., Akouala, Ch.-R., Xie, J. Q., Mita, S., Collazo, R. and Sitar, Z., *Fabrication and Characterization of lateral polar GaN structures for second harmonic generation*, Proc. SPIE 8631, Quantum Sensing and Nanophotonic Devices X, 86311T (February 4, 2013); doi:10.1117/12.2008827, Conference Volume 8631, Quantum Sensing and Nanophotonic Devices X, Manijeh Razeghi, (IEEE, San Francisco, California, USA, February 02, 2013).
- [19] Mehandru, R., Kim, S., Kim, J., Ren, F., Lothian, J. R., Pearton, S. J., Park, S. S. and Park, Y. J., *Thermal simulations of high power, bulk GaN rectifiers*, [http://www.researchgate.net/publication/223289055\\_Thermal\\_simulations\\_of\\_high\\_power\\_bulk\\_GaN\\_rectifiers](http://www.researchgate.net/publication/223289055_Thermal_simulations_of_high_power_bulk_GaN_rectifiers) (2014) *EMN Spring Meeting*, Energy Materials Nanotechnology, Feb. 27 - March 2, 2014, Las Vegas, NV, USA.

# Digital combinational circuit optimization using invasive weed optimization technique



Prabhat K. Patnaik<sup>1</sup>, Dhruba C. Panda<sup>2</sup>, Santosh Kumar Pantina<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Electronics and communication Engineering, School of Engineering and Technology, Centurion University of Technology and Management, Paralakhemundi, India

<sup>2</sup> Department of Electronics Science, Berhampur University, Berhampur, India

E-mail: prabhat.ku.patnaik@gmail.com

(Received 31 January 2013, accepted 27 may 2014)

## Abstract

Minimization of digital circuits is required to reduce the area, power consumption, propagation delay and number of active gates. Human methods of minimization like Karnaugh map, Quine' McCluskey, Sasao methods are tedious and are limited to systems with four or five inputs. A new bio-inspired algorithm called Invasive weed optimization (IWO) is used to minimize the combinational circuits. Results are presented to show that IWO based optimization of digital circuits are equivalent to or even with better solution than human design techniques.

**Keywords:** Combinational logic circuits, Karnaugh Map, Invasive Weed Optimization algorithm.

## Resumen

Se requiere minimización de circuitos digitales para reducir el área, el consumo de energía, el retardo de propagación y también el número de puertos activos. Los métodos humanos de minimización como el mapa de Karnaugh, y los métodos de Quine McCluskey y de Sasao son tediosos, y se limitan a sistemas con cuatro o cinco entradas. Un nuevo algoritmo bio-inspirado llamado optimización maleza invasora (OIV) se utiliza para minimizar los circuitos combinatoriales. Se presentan los resultados para mostrar que la optimización de circuitos digitales basada en OIV es equivalente o incluso una mejor solución mejor que las técnicas diseñadas por humanos.

Palabras clave: Circuitos lógicos combinatoriales, mapa de Karnaugh, algoritmo Optimización de Maleza Invasora.

PACS: 01.40.Fk, 01.40.E-

ISSN 1870-9095

## I. INTRODUCCIÓN

Real world applications require combinational circuits with minimal area, power consumption, propagation delay and minimum number of gates for cost effective and high speed circuit realization. Generally used methods to minimize the combinational circuits are Karnaugh Map [1], Quine' McCluskey [2, 3], Sasao [4] etc. The problem with the human design methods is that they become cumbersome and problematic when number of inputs, number of outputs and the complexity of the function increases.

Process of minimization can be viewed as an optimization process wherein digital circuits seek a best possible/desirable solution for a physical model *i.e.*, combinational circuit. Hence, in order to reduce the problems faced in human design methods, minimization of combinational circuits was done through computational intelligence or more precisely with the use of bio inspired optimization algorithms like Genetic Algorithm(GA) [5], Particle Swarm Optimization(PSO) [6], a hybrid algorithm called Differential Evolution Particle Swarm

Optimization(DEPSO) [7] etc. Computational intelligence methods find the significant advantage of being automated through programming over human design methods.

A new technique called Invasive Weed Optimization (IWO) is used to minimize the combinational circuits. IWO is also a bio inspired optimization algorithm which unlike GA and PSO which are Evolutionary and Swarm based algorithms respectively it is an ecology based bio inspired algorithm. IWO is inspired from natural ecosystem which provides rich source of mechanism for designing and solving difficult engineering and computer science problems. The optimization of combinational circuits using IWO is presented and preliminary investigation show that IWO can optimize equally well as other algorithms like GA, PSO, and DEPSO etc. The paper is organized as follows: In section II a brief overview of Invasive weed optimization is given. Section III describes minimization of combinational circuits with IWO. In section IV examples of optimized combinational circuits using IWO are presented and section V compares against human design techniques.

## II. INVASIVE WEED OPTIMIZATION ALGORITHM

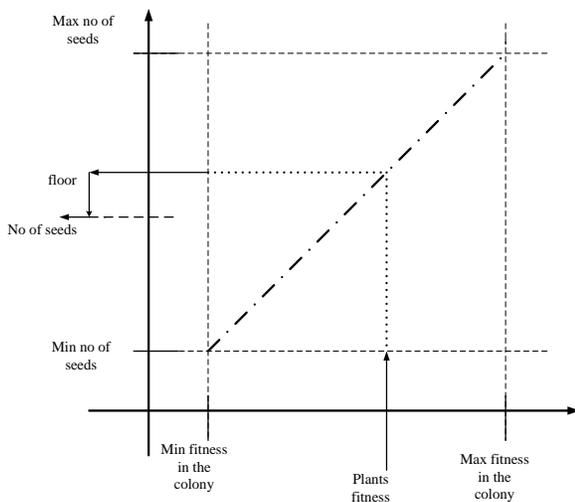
Invasive Weed Optimization is a numerical stochastic search algorithm proposed by Mehrabian and Lucas in 2006 [8], inspired by the ecological process of weed colonization and distribution. It is capable of solving general multi-dimensional, linear and nonlinear optimization problems with appreciable efficiency.

Weeds are plants whose vigorous, invasive habits of growth pose serious threat to desirable plants. Adapting with their environments, invasive weeds cover spaces of opportunity left behind by improper tillage; followed by enduring occupation of the field. Their behavior changes with time since as the colony become dense there is lesser opportunity of life for the ones with lesser fitness.

Fast reproduction and distribution, robustness and adaptation to the changes in the environment are some of the interesting characteristics have been seen in natural behavior of weeds that have inspired and used in this optimization algorithm. This algorithm has additional desirable properties of capability to deal with complex and non-differentiable objective functions and escapes from local optima.

The algorithm can be summarized in the following four steps [8]:

1. *Initialize a population*: A finite number of seeds composing initial population are being dispread randomly over the problem space.
2. *Reproduction*: Every seed that has grown to new plants is allowed to produce other depending on its fitness. In the simple case, the number of seeds each plant can produce increases linearly from minimum possible seed corresponding to minimum fitness to the maximum number of seeds corresponding to the maximum fitness in the population as illustrated in Figure1.



**FIGURE 1.** Procedure of seeds production in a colony of weeds [7].

3. *Spatial dispersal*: The produced seeds in the previous step are being distributed randomly in the problem space by normal distribution with mean zero and a variance parameter decreasing over time. By setting the mean parameter equal to zero, the seeds are distributed randomly such that they locate near to the parent plant and by decreasing the variance over time, the fitter plants are grouped together and inappropriate plants are eliminated over time. The standard deviation (SD) which is the root square of the variance of this distribution is calculated in every time step as according to (1):

$$\sigma_{iter} = \frac{(iter_{max} - iter)^n}{(iter_{max})^n} (\sigma_{init} - \sigma_{final}) + \sigma_{final} \quad (1)$$

$\sigma_{init}$  and  $\sigma_{final}$  are initial and final value of SD for normal distribution respectively,  $iter_{max}$  is the maximum number of iterations before stopping the algorithm,  $\sigma_{iter}$  is the SD present at the present time step and n is the nonlinear modulation index.

4. *Competitive exclusion*: After some iteration, the number of plants in a colony will reach its maximum (pmax) by fast reproduction. However, it is expected that the fitter plants have been reproduced more than undesirable ones. Thus, final step is to eliminate the inappropriate and weaker plants in a competitive manner for limiting the maximum number of plants in a colony. The process continues until maximum iterations or some other stopping criteria is reached and the plant with the best fitness is selected as the optimal solution.

The flow chart depicting IWO algorithm is shown in the Fig.2.

## III. OPTIMIZATION OF COMBINATIONAL DIGITAL CIRCUITS WITH IWO

Invasive weed optimization theory described above is used to evolve combinational logic circuits. The basic process of hardware evolution is illustrated in Figure 3. The desired circuit refers to the circuit required to map 100 % exactly the outputs for corresponding inputs typically given by truth table for digital circuits. After each generation, the fitness is evaluated against the desired function to be implemented, given by the truth table. If the output of the circuit is equal to the output of the truth table for the corresponding inputs, then the fitness is increased by one. This is carried out for all inputs listed in the truth table. This process is repeated till we get a weed with the fitness equal to total number of combinations in the truth table for the particular combinational digital circuit under study or

till maximum number of iterations is reached. The hardware evolution is carried out until the desired circuit is evolved and then downloaded to a reconfigurable hardware platform.

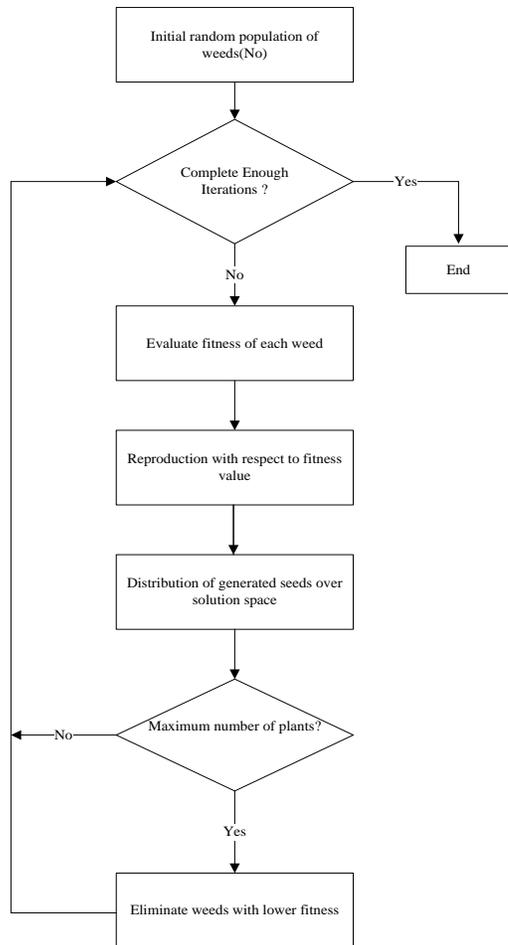


FIGURE 2. Flow chart depicting IWO algorithm [9].

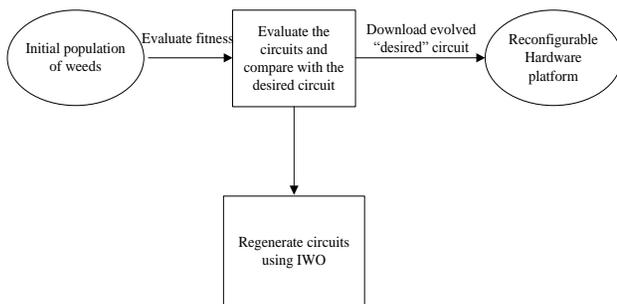


FIGURE 3. Desired circuit hardware evolution.

**A. Coding of input matrix**

The matrix shown in Figure 4 represents a circuit with M rows and N columns [6]. The elements of the circuit are the

logic gates which are selected from a predefined library of 1 or 2-input and 1-output gates. The inputs to the first column of the matrix come from the truth table of the function to be implemented. For all other columns, the input may come from any of the previous column outputs.

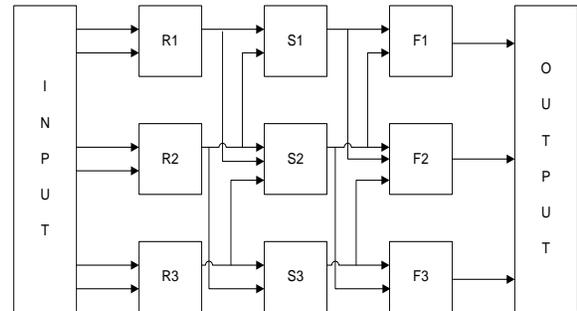


FIGURE 4. Structure of random matrix [6].

For circuit evolution with IWO one matrix is used to represent gates/inputs interconnectivity. The size of the matrix can be taken as  $g$  by 3 where  $g$  represents the total number of gates in input matrix. Elements in first and third column represent the inputs while the elements in the second column represent the gates. Gates are represented as: AND=1, OR=2, XOR=3, NOT=4 and WIRE=5, the inputs are as well represented for convenience as follows; A=1, B=2, C=3, R1=4, R2=5, R3=6, S1=7, S2=8, S3=9. (R1, R2 & R3) first column gate output, (S1, S2 & S3) second column gate output and F1=F2=F3=FOUT third column output.

**B. Implementation of IWO algorithm to combinational digital circuits**

1. Initial population of weeds (input matrices)  $N_0$  are generated randomly but depending on the constraints based on “coding the input matrix” as discussed previously.
2. Fitness of each weed is evaluated. Fitness of a weed is total number of output combinations of a truth table that matches with the outputs of weed for each particular input combination.
3. Depending on the fitness number of seeds is generated. A maximum number of seeds  $S_{max}$  for maximum fitness and minimum number of seeds  $S_{min}$  corresponding to minimum fitness.
4. Now the generated seeds corresponding to each input matrix are randomly scattered by normal distribution with mean equal to zero and an adaptive standard deviation(SD) given by (1). Produced seeds along with the parents are considered as potential solutions for next generation.
5. If the maximum number of plants  $P_{max}$  is reached then the weeds with lower fitness is eliminated.

6. Above steps from 2-5 are continued till either of the following conditions is met:
  - a. Input matrix (weed) with the highest fitness (total number of input and output combinations in the truth table) is reached. This matrix is the optimized matrix that is obtained by the algorithm.
  - b. Total number of iterations is reached.

A MATLAB program based on the coding of the input matrix discussed in section IIIA and on the IWO implementation for combinational circuits discussed in section IIIB is coded and simulated for the implementation of the IWO algorithm for minimization of the digital circuits.

#### IV. EXAMPLES OF EVOLVED CIRCUITS

Three examples are presented here to describe the capability of IWO for hardware evolution. The size of the input matrix for these examples is taken as 7 by 3. The IWO parameter values used for optimization of all the three examples is listed in the Table I.

**TABLE I.** IWO parameter values for optimization of combinational circuits.

Sl.No	Symbol	IWO parameter	Value
1	$N_0$	Number of initial population	5
2	$It_{max}$	Maximum number of iterations	2000
3	$P_{max}$	Maximum number of plant population	10
4	$S_{max}$	Maximum number of seeds	7
5	$S_{min}$	Minimum number of seeds	1
6	$n$	Nonlinear modulation index	1
7	$\sigma_{initial}$	Initial value of standard deviation	1
8	$\sigma_{final}$	Final value of standard deviation	0.1

##### A. 3-even parity problem implementation by IWO

3-even parity problem has three inputs, one output. The truth table for the circuit is shown in Table II. The evolved circuit satisfying the desired circuit is expected to have a fitness of eight in this case. Input matrix of size 7 by 3 is taken with the IWO parameters as mentioned in the Table I. The simplified expression for function F using Karnaugh map (human design method) is shown in (2).

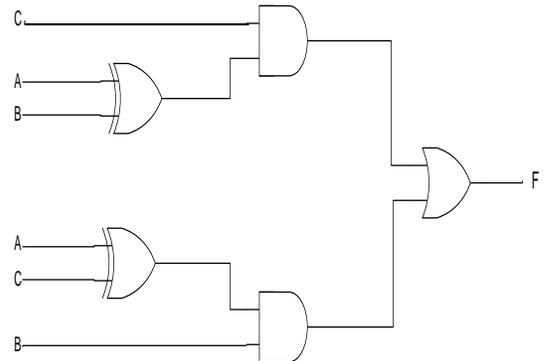
$$F = Z(X \oplus Y) + Y(X \oplus Z). \quad (2)$$

The circuit obtained by Karnaugh map consists of 5 gates

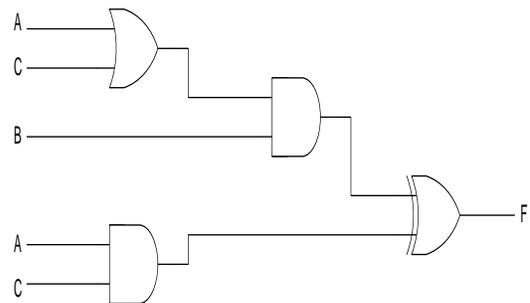
i.e. two XOR gates, two AND gates and one OR gate as shown in Figure 5. The circuit obtained by using IWO algorithm for the output F, having a fitness of eight obtained after 717 iterations consists of one XOR gate, two AND gates, one OR gate as shown in Fig. 5.

**TABLE II.** Truth table for 3-even parity generator.

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



**FIGURE 5.** Circuit obtained by Karnaugh map for 3-even parity problem.



**FIGURE 6.** Circuit optimized by IWO for 3-even parity problem.

##### B. Full Adder implementation by IWO

A full adder is a combinational circuit that can be used to add three bits to produce a sum and a carry output [11]. It consists of three inputs, two outputs. Truth table for full adder is shown in the Table III. The evolved circuit satisfying the desired circuit is expected to have a fitness of eight for both the outputs sum and carry. Input matrix of size 7 by 3 is taken with the IWO parameters as mentioned

in the Table I. The simplified expressions for *sum* and *carry* using Karnaugh map are shown in (3) and (4) respectively.

$$sum = c \oplus (a \oplus b), \tag{3}$$

$$carry = ab + ac + bc. \tag{4}$$

The circuit obtained by Karnaugh map consists of two XOR gates, three AND gates and one OR gate [10] as shown in Fig. 7. The circuits obtained by using IWO algorithm for the output *sum* having a fitness of eight obtained after 5 iterations consists of two XOR gates as shown in Fig. 8. The circuits obtained by using IWO algorithm for the output *carry* having a fitness of eight obtained after 4 iterations consists of four XOR gates and one OR gate as shown in Fig. 9. The final circuit including both *sum* and *carry* for full adder using IWO consists of four XOR gates and one OR gate as shown in Fig. 10.

TABLE III. Truth table for full adder.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>carry</i>	<i>sum</i>
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

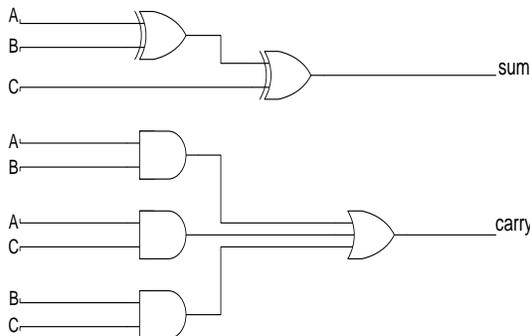


FIGURE 7. Circuit for full adder using Karnaugh map [10].

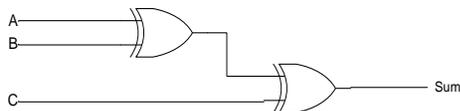


FIGURE 8. Sum circuit for the full adder using IWO.

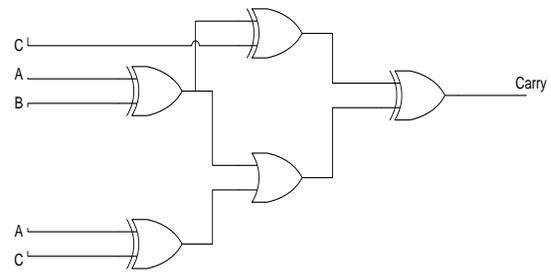


FIGURE 9. Carry for the full adder circuit obtained through IWO.

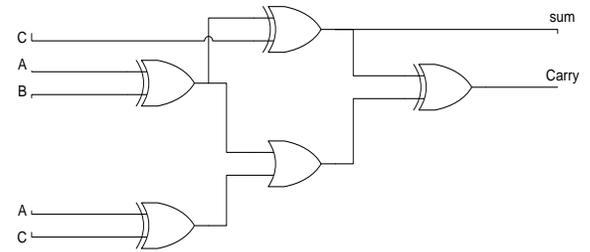


FIGURE 10. Circuit optimized by IWO for full adder.

### C. Full subtractor implementation by IWO

A full subtractor performs subtraction operation on two bits, a minuend and a subtrahend, and also takes into consideration whether a ‘1’ has already been borrowed by the previous adjacent lower minuend bit or not. As a result, there are three bits to be handled at the input of a full subtractor, namely the two bits to be subtracted and a borrow bit designated as C. There are two outputs, namely the *difference* output and the *borrow* output. The *borrow* output bit tells whether the minuend bit needs to borrow a ‘1’ from the next possible higher minuend bit. The truth table for the circuit is shown in Table III.

The evolved circuit satisfying the desired circuit is expected to have a fitness of eight for both the outputs *difference* and *borrow*. Input matrix of size 7 by 3 is taken with the IWO parameters as mentioned in the Table I. The simplified expressions for difference and borrow using Karnaugh map are shown in (5) and (6) respectively.

$$difference = c \oplus (a \oplus b), \tag{5}$$

$$borrow = \bar{a}b + \overline{(a \oplus b)}c. \tag{6}$$

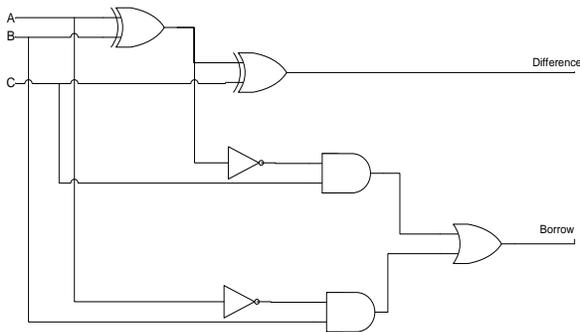
The circuit obtained by Karnaugh map consists of two XOR, two AND, one OR and two NOT gates [12] as shown in Fig. 11. The circuit obtained by using IWO algorithm for the output *difference* having a fitness of eight obtained after 5 iterations consists of two XOR gates as shown in Figure 12.

The circuit obtained by using IWO algorithm for the output *borrow* having a fitness of eight obtained after 127 iterations consists of four XOR gates and one OR gate as

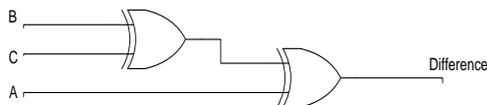
shown in Fig. 13. The final circuit including both *difference* and *borrow* for full subtractor using IWO consists of four XOR gates and one OR gate as shown in Fig. 14.

**TABLE IV.** Truth table for full subtractor.

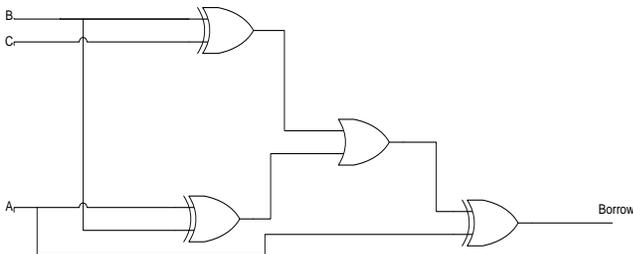
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>Borrow</i>	<i>Difference</i>
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1



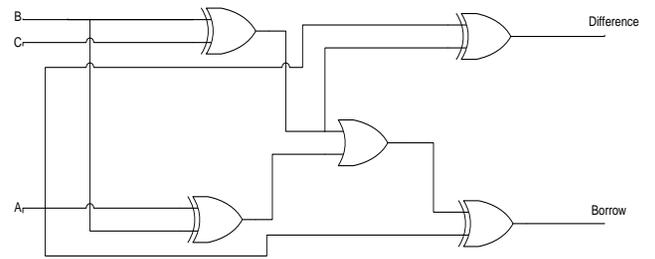
**FIGURE 11.** Circuit for full subtractor using Karnaugh map [12].



**FIGURE 12.** Difference circuit for the full subtractor using IWO.



**FIGURE 13.** Borrow circuit for the full subtractor using IWO.



**FIGURE 14.** Circuit optimized by IWO for full subtractor.

**V. COMPARISON OF RESULTS**

Results obtained for 3-even parity problem: Full adder, Full Subtractor through IWO are compared with the Karnaugh maps (human design), as shown in the Table V in terms of number of logic gates.

**TABLE V.** Comparison of results of IWO with Human design for different examples.

<i>Examples</i>	<i>Karnaugh map (human design)</i>	<i>IWO</i>
3-even parity problem	5 gates	4 gates
	2 XOR, 2 AND, 1 OR	1 OR, 2 AND, 1 XOR
Full adder	6 gates	5 gates
	2 XOR, 3 AND, 1 OR	4 XOR, 1 OR
Full subtractor	7 gates	5 gates
	2 XOR, 2 AND, 2 NOT, 1 OR	4 XOR, 1 OR

**VI. CONCLUSIONS**

In this paper it is shown that the invasive weed optimization can also be applied to evolve combinational logic circuit.

The emphasis was only on generation of circuit functionality. From the few examples carried out we infer that IWO approach is an improvement over human design method because it has minimum number of gates as summarized in Table V. It is clear that Invasive Weed Optimization has a potential for hardware evolution since it has faster convergence and is able to minimize the total number of active gates.

**REFERENCES**

[1] Karnaugh, M., *A map method for synthesis of combinational logic circuits*, Transactions of the AIEE, Communications and Electronics **721**, 593-599 (1953).  
 [2] McCluskey, E., *Minimization of boolean functions*, Bell Systems Technical Journal **35**, 1417-1444 (1956).

- [3] Quine, W. V., *A way to Simplify Truth Functions*, American Mathematical Monthly **62**, 627-631 (1955).
- [4] Sasao, T., *Logic Synthesis and Optimization*, (Kluwer Academic Press, 1993).
- [5] Higuchi T., Iba H. and Manderick T., *Evolvible hardware with genetic learning. Massively Parallel Artificial Intelligence*, (MIT press, USA, 1994).
- [6] Gudise V. G. and Venayagamoorthy G. K., *Evolving Digital Circuits Using Particle Swarm*, Proc. Of INNS-IEEE Intl. Joint Conf. on Neural Networks, 468-472 (2003).
- [7] Moore, P. K. and Venayagamoorthy G. K., *Evolving Digital circuits using Hybrid Particle Swarm Optimization and Differential Evolution*, International Journal of Neural Systems **16**, 163-177 (2006).
- [8] Mehrabian, R., and Lucas, C., *A novel numerical optimization algorithm inspired from invasive weed colonization*, Ecological Informatics **1**, 355-366 (2006).
- [9] Mallahzadeh, A. R., Es'haghi, S., and Alipour, A., *Design of an E-shaped MIMO antenna using IWO algorithm for wireless application at 5.8 GHz*, Progress In Electromagnetics Research **90**, 187-203 (2009).
- [10] Ushie Ogri, J., Etim O. J. A. and Prosper I., *Optimising digital combinational circuit using particle swarm optimisation technique*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, 72-77 (2012).
- [11] Kumar A., *Fundamentals of Digital Circuits*, 2nd Edition, (PHI Learning Private Limited, New Delhi, India).
- [12] Mano, M., *Digital Design*, 4th Edition (Pearson Education, India).

# Acerca del dicloruro de radio-223 (Ra-223-Cl<sub>2</sub>) (Alpharadin) en pacientes con cáncer de próstata resistente a la castración CPRC, una aplicación de la Física Médica



**Harley J. Orjuela Ballesteros<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Grupo de investigación en Física Médica UNALB, Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Carrera 30 con Calle 45, Bogotá D. F., Colombia.

<sup>2</sup>Grupo de Investigación Física e Informática Fisinform, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Carrera 3 No.26 A - 40, Bogotá, Colombia.

**E-mail:** hgorjuelab@unal.edu.co, hgorjuelab@correo.udistrital.edu.co

(Recibido el 16 de Marzo de 2014, aceptado el 27 de Agosto de 2014)

## Resumen

Aunque el tema de la radiactividad, se ha escuchado y leído, sobre la base de algunos acontecimientos ocurridos, desgraciadamente estos son relacionados con accidentes, como el de Chernobyl donde hubo un escape de radiación y la sobredosis que sufrieron decenas de pacientes en el año 1996 en Costa Rica [1], también se habla mucho de la problemática de los desechos radiactivos [2] y desde luego la historia resalta sobre las bombas atómicas utilizadas en la segunda guerra mundial. Pero realmente es poco lo que se conoce del tema. Hace falta conocer los beneficios que causa, los alcances científicos y las precauciones que se debe tener con el manejo de la radiactividad, como lo es el uso adecuado de Isótopos en medicina, más exactamente el medicina nuclear, y es en este punto donde avances como el logrado con el Dicloruro de radio-223 ((Ra-223-Cl<sub>2</sub>) Alpharadin) como tratamiento a la metástasis ósea. En este escrito se pretende dar un vistazo general (revisión bibliográfica), sobre aspectos generales de la radiactividad y los isotopos para llegar al elemento Radio Descubierto por Madame Curie y su evolución hasta llegar al isótopo Radio-223 usado en tratamientos de CPRC, su fabricación, decaimiento y aplicaciones experimentales en Física medica especialidad medicina nuclear de la mano de la empresa Bayer®, como parte de una lectura motivadora en el estudio de la física médica y su aplicación en la medicina nuclear.

**Palabras clave:** Física Médica, Medicina Nuclear, Radio nucleídeos.

## Abstract

Although the topic of radioactivity, has heard and read on the basis of some occurring events, unfortunately these are related to accidents, such as Chernobyl, where there was a release of radiation and overdose suffered dozens of patients in 1996 in Costa Rica [1], much has also talks about the problems of radioactive waste [2] and certainly highlights the history of the atomic bombs used in world War II . But really there is little that is known about the subject. We need to know the benefits that cause scientists scope and precautions that must be taken with the handling of radioactivity, such as the proper use of isotopes in medicine, nuclear medicine more accurately , and it is at this point that progress as that achieved with the radio dichloride 223 ((Ra-223-Cl<sub>2</sub>) Alpharadin) as treatment of bone metastasis. In this paper aims to give an overview on general aspects of radioactivity and isotopes (literature review), to reach the element Discovered by Madame Curie Radio and its evolution up to the Radio -223 isotope used in treatments CPRC, manufacturing, decay and applications experimental Physics in nuclear medicine medical specialty hand Bayer®, as part of a motivating reading in the study of medical physics and its application in nuclear medicine.

**Keywords:** Medical Physics, Nuclear Medicine, Radionuclides

**PACS:** 42.62.Be, 87.57.U-, 87.57.ue

**ISSN 1870-9095**

## I. PRELIMINARES

Antes de definir y explicar el *alpharadin radio-223*, se hace necesario definir y dar una pequeña introducción a diferentes conceptos básicos de la radiactividad, radio, isotopos y la medicina nuclear.

### A. Descubrimiento de la Radiactividad... breve descripción

Algún tiempo después de que se descubriera los rayos X (Rx), en el año 1895; *Antoine Henri Becquerel* (1852-1908) trató de demostrar la relación entre los **Rx** y la

Harley J. Orjuela Ballesteros

fosforescencia de las sales de Uranio. En uno de sus experimentos envolvió una placa fotográfica en papel negro, colocó una muestra de sal de uranio sobre ella y la expuso al sol. Al revelar la placa apareció que los rayos emitidos por la sal habían penetrado a través del papel. Tiempo después, Becquerel se preparaba para repetir el experimento pero, tenía problemas con la visibilidad de la luz solar, por ende colocó el conjunto en un cajón. Días después reveló la placa, esperando encontrarla sólo débilmente afectada. Pero para su sorpresa observó una imagen intensa en la placa. Repitió el experimento en la oscuridad total y obtuvo los mismos resultados, probando que la sal de uranio emitía rayos que afectaban la emulsión fotográfica, sin necesidad de ser expuesta a la luz solar. De este modo fue que Becquerel descubrió la radiactividad. Tiempo después Marie Curie, más exactamente dos años después en 1898 dio a este fenómeno el nombre de radiactividad. Radiactividad es la emisión espontánea de partículas o rayos por el núcleo de un átomo. A los elementos que tienen esta propiedad se les llama radiactivos.

En 1898, Marie Sklodowska Curie (1867-1934), con su esposo Pierre Curie (1859-1906), dirigió sus investigaciones a la radiactividad. En corto tiempo los Curie descubrieron dos elementos nuevos, el polonio y el radio, ambos radiactivos. Para confirmar su trabajo sobre el radio, procesaron una tonelada de residuos de mineral llamado peblenda, para obtener 0.1 g de cloruro de radio puro, que usaron para efectuar más estudios sobre las propiedades del radio y determinar su masa atómica.

## B. Clases y componentes de la radiación

Las radiaciones ionizantes son las radiaciones que son capaces de liberar electrones ligados en los diferentes orbitales atómicos y/o moleculares, para lo que se requieren energías superiores a 10 eV. "Las radiaciones ionizantes también pueden producirse en procesos diferentes a las desintegraciones radioactivas. Por ejemplo, cuando se aceleran o frenan partículas con carga eléctrica, se emiten fotones capaces de ionizar. También es posible con dispositivos muy sofisticados (ciclotrón, acelerador lineal) acelerar partículas cargadas, como núcleos o electrones, hasta altas energías"[3].

Ahora bien, ¿cuál es la clasificación de estas radiaciones?

Pues bien, Las radiaciones ionizantes se clasifican teniendo en cuenta a la carga eléctrica de las partículas (cargadas o neutras); La segunda característica relevante es la masa de las mismas, ver figura 1.

A la radiación formada por partículas cargadas se le suele clasificar como directamente ionizante, mientras que se denominan *indirectamente ionizante* a las partículas neutras [4], finalmente las radiaciones ionizantes se presentan en unas pocas variedades y se pueden clasificar de la siguiente manera: [4], ver figura 2.

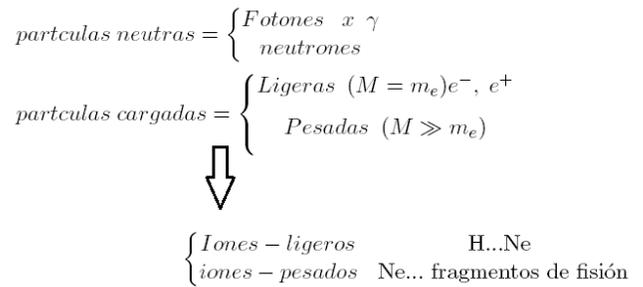


FIGURA 1. Diagrama de clasificación partículas.

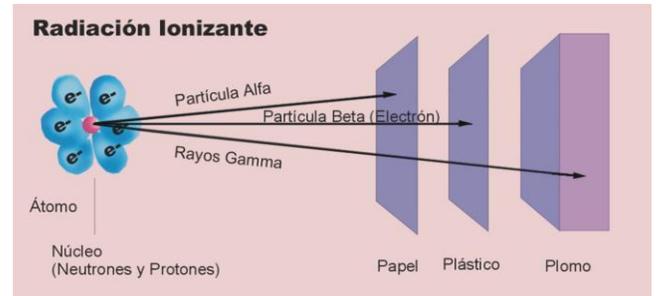


FIGURA 2. La radiación alfa es detenida en el aire al recorrer 1 o 2 centímetros, o por una hoja de papel. La radiación beta es absorbida completamente por una lámina de vidrio, madera o metal. La radiación gamma es muy penetrante y únicamente un espesor importante de plomo u hormigón la detiene [4].

## C. Estructura atómica... Por qué ocurre la radiactividad

Para representar un elemento químico, es decir un átomo, se utiliza el número atómico, Z, y el número másico, A. Este número másico, A, es una medida aproximada de la masa atómica, debido a que se toma el número total de partículas nucleares, es decir el número de nucleones. Siendo N el número de neutrones y Z el número de protones, entonces:  $A=Z+N$ , Por consiguiente la representación de cualquier elemento químico se hace mediante su símbolo (X) y los números másico y atómico, así:

$${}^A_Z X_N \quad (4)$$

Cuando existe una variaciones en estos valores (A, Z, N) se tendrá una clasificación de los nucleones denominados *isótopos*, *isótonos*, *isóbaros* e *isómeros*.

- **Isótopos**<sup>1</sup> Son aquellos nucleídos que tienen igual número atómico (Z) pero difieren en el número másico (A), por lo tanto poseen un número diferente de neutrones, aunque estén representando el mismo elemento químico.
- **Isóbaros.** Son aquellos nucleídos que tienen igual número másico (A) pero difieren en el número atómico (Z). Estos elementos químicos difieren el

<sup>1</sup> para el caso del radio (motivo de este trabajo se profundizará en los isótopos).

número de protones y neutrones que tienen en el núcleo, pero la suma de nucleones es igual.

- **Isótonos.** Son aquellos nucleídos que tienen igual número de neutrones (N) pero difieren en el número másico (A), por lo tanto tienen diferente número de protones representando elementos químicos distintos.
- **Isómeros.** Son aquellos nucleídos que tienen igual número másico (A) e igual número atómico (Z), por lo tanto igual número de neutrones (N), pero difieren en el nivel energético de los nucleones, para su identificación se agrega una m al número másico.

## II. EL RADIO

El radio, es un elemento químico altamente radiactivo, incluso más que el uranio. Su nombre deriva del término latino, radius, cuyo significado es, rayo. Su símbolo es **Ra**, y posee un número atómico de 88 que lo coloca en la serie química de los *metales alcalinotérreos*. Su aspecto es de un metal blanco, el cual se torna de color negro cuando se expone al aire.

El radio fue descubierto en 1898 por M. Curie en la pechblenda (7 toneladas de mineral contienen aproximadamente 1 g de radio). En la corteza representa el  $9 \times 10^{-11}$  % en peso. El elemento fue aislado en 1911 por M. Curie y A. Debierne por electrólisis de una solución de cloruro de radio puro con un cátodo de mercurio; la amalgama se destila en atmósfera de hidrógeno y se obtiene el metal puro. Actualmente se obtiene como bromuro o cloruro, no existiendo cantidades apreciables del elemento aislado. Tanto él como sus sales muestran luminiscencia y por eso se emplean en pinturas oscuras. Emite partículas alfa, beta y rayos gamma y cuando está mezclado con berilio emite neutrones (ver figura 2). Un gramos de 226-Ra (isótopo más común, 1600 años de período de semidesintegración) produce  $3.7 \times 10^{10}$  desintegraciones en un segundo, o lo que es lo mismo **1 Bq** (Becquerel).

Entre sus características más importantes se tiene la siguiente tabla:

**TABLA I.** Características generales del Radio.

Radio	
<b>Símbolo químico</b>	Ra
<b>Número atómico</b>	88
<b>Grupo</b>	<u>2</u>
<b>Periodo</b>	<u>7</u>
<b>Densidad</b>	5000 kg/m <sup>3</sup>
<b>Masa atómica</b>	(226,0254) u u
<b>Radio atómico</b>	215
<b>Punto de fusión</b>	973 K
<b>Calor de fusión</b>	37 kJ/mol

El radio, posee un total de 32 isótopos distintos, existiendo cuatro de ellos en la naturaleza. Uno de los isótopos del radio más frecuente y común, es el radio-226, procede de la desintegración del U-238. Así, el Ra-226, se convierte en el

isótopo del radio, más duradero pues su periodo de desintegración es de en torno a 1602 años, pasando a partir de ahí, a convertirse en el elemento, radón. El **Ra-223**, Ra-224, Ra- 226 y Ra-228, se forman a través de desintegración de otros elementos como puede ser el uranio o el torio. Lo cual se puede resumir en la siguiente tabla [6]:

**TABLA I.** Isotopos del Radio. [6].

Nucl.	Masa	Periodo de Semivida	Espín	Energía de enlace nuclear
<sup>202</sup> Ra	202.0 0989	2.6(21) ms	0+	1,533.16 MeV
<sup>203</sup> Ra	203.0 0927	4(3) ms	(3/2-)	1,541.24 MeV
<sup>204</sup> Ra	204.0 06500	60(11) ms	0+	1,549.31 MeV
<sup>205</sup> Ra	205.0 0627	220(40) ms	(3/2-)	1,557.39 MeV
<sup>206</sup> Ra	206.0 03827	0.24(2) s	0+	1,565.47 MeV
<sup>207</sup> Ra	207.0 0380	1.3(2) s	(5/2- ,3/2-)	1,573.55 MeV
<sup>208</sup> Ra	208.0 01840	1.3(2) s	0+	1,581.63 MeV
<sup>209</sup> Ra	209.0 0199	4.6(2) s	5/2-	1,589.71 MeV
<sup>210</sup> Ra	210.0 00495	3.7(2) s	0+	1,597.79 MeV
<sup>211</sup> Ra	211.0 00898	13(2) s	5/2(-)	1,605.87 MeV
<sup>212</sup> Ra	211.9 99794	13.0(2) s	0+	1,623.26 MeV
<sup>213</sup> Ra	213.0 00384	2.74(6) min	1/2-	1,622.02 MeV
<sup>214</sup> Ra	214.0 00108	2.46(3) s	0+	1,630.10 MeV
<sup>215</sup> Ra	215.0 02720	1.55(7) ms	(9/2+) #	1,638.18 MeV
<sup>216</sup> Ra	216.0 03533	182(10) ns	0+	1,646.26 MeV
<sup>217</sup> Ra	217.0 06320	1.63(17) μs	(9/2+)	1,654.34 MeV
<sup>218</sup> Ra	218.0 07140	25.2(3) μs	0+	1,662.42 MeV
<sup>219</sup> Ra	219.0 10085	10(3) ms	(7/2)+	1,661.18 MeV
<sup>220</sup> Ra	220.0 11028	17.9(14) ms	0+	1,669.26 MeV
<sup>221</sup> Ra	221.0 13917	28(2) s	5/2+	1,677.34 MeV
<sup>222</sup> Ra	222.0 15375	38.0(5) s	0+	1,685.42 MeV
<b><sup>223</sup>Ra</b>	<b>223.0 18502</b>	<b>11.43(5) d</b>	<b>3/2+</b>	<b>1,693.49 MeV</b>
<sup>224</sup> Ra	224.0 20211	3.6319(23) d	0+	1,692.26 MeV
<sup>225</sup> Ra	225.0 23612	14.9(2) d	1/2+	1,700.33 MeV
<sup>226</sup> Ra	226.0 25409	1600(7) a	0+	1,708.41 MeV
<sup>227</sup> Ra	227.0 29177	42.2(5) min	3/2+	1,716.49 MeV

<sup>228</sup> Ra	228.0 31070	5.75(3) a	0+	1,715.25 MeV
<sup>229</sup> Ra	229.0 34958	4.0(2) min	5/2(+)	1,723.33 MeV
<sup>230</sup> Ra	230.0 37056	93(2) min	0+	1,731.41 MeV
<sup>231</sup> Ra	231.0 4122	103(3) s	(5/2+)	1,730.17 MeV
<sup>232</sup> Ra	232.0 4364	250(50) s	0+	1,738.25 MeV
<sup>233</sup> Ra	233.0 4806	30(5) s	1/2+	1,746.33 MeV
<sup>234</sup> Ra	234.0 5070	30(10) s	0+	1,745.09 MeV

**A. Isótopo 223 Radio... características y sus usos**

El (**223Ra**) es un isótopo de radio con un tiempo de semivida de **11,4 días**, en contraste con el isótopo común el radio-226, descubierto por los esposos Curie, que tiene una vida media de 1.601 años. El uso principal de radio-223, como un producto radiofarmacéutico para el tratamiento de cánceres metastásicos en el hueso, se aprovecha de su similitud química con calcio, y el corto alcance de la radiación alfa que emite. El (223Ra) ha sido desarrollado por la empresa noruega *ALGETA ASA*, en una asociación con Bayer®, con el nombre comercial *Xofigo* (antes *Alpharadin*), y se distribuye como una solución que contiene **cloruro de radio-223** (1.000 Bq / ml), cloruro de sodio, y otros ingredientes para inyección intravenosa. El régimen recomendado es de seis tratamientos de 50 kBq / kg (1,3 Ci por kg), que se repite a intervalos de 4 semanas [7].

**III CÁNCER DE PRÓSTATA RESISTENTE A LA CASTRACIÓN (CPRC)**

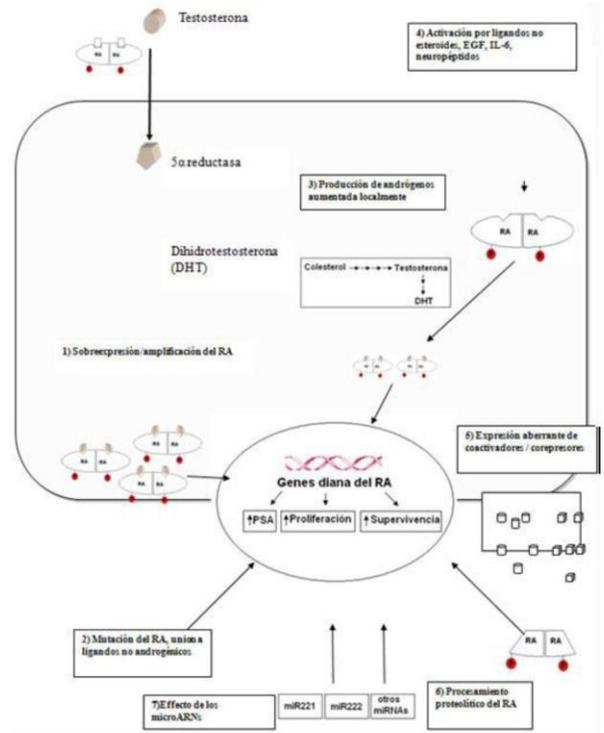
Es necesario utilizar una terminología médica para definir las diferentes etapas por las que atraviesa el Cáncer de Próstata (**CaP**) para facilitar un manejo óptimo de la enfermedad a partir del diagnóstico. La enfermedad evoluciona desde un estado hormono-sensible hasta uno metastático resistente a castración. En el intermedio se encuentran las etapas de hormono-independencia (AIPC), donde las células tumorales no dependen del andrógeno para su supervivencia y proliferación, por ende, el CPRC se define por al aumento progresivo del antígeno prostático específico; varios criterios son utilizados para definir progresión de la enfermedad (CaP):

- Lesiones óseas, Reparación del tumor primario en la fosa prostática después de la cirugía, Nuevas metástasis.

Y adicional los niveles de testosterona están por debajo de 50 ng/mL, entonces se puede afirmar que el paciente tiene cáncer prostático resistente a castración (CPRC).

Ahora bien, ¿cómo definir los mecanismos de progresión del CPRC?; Pues bien, para comprender los diferentes mecanismos por los que las células prostáticas

cancerígenas pueden sobrevivir a las terapias de supresión hormonal es preciso mencionar primero el efecto general que tienen las hormonas masculinas en la próstata, Figura 3, El principal andrógeno masculino, la testosterona (T) estimula la proliferación e inhibe la muerte por apoptosis de las células prostáticas. Al penetrar en la célula prostática la testosterona es convertida por acción de la enzima 5 $\alpha$  reductasa en un metabolito más potente, la dihidrotestosterona (DHT). Los dos, la testosterona y la dihidrotestosterona se pueden unir al receptor de andrógenos (RA), mutándolos haciéndolos capaz de unirse a secuencias específicas en la región promotora del ADN y reclutar proteínas co-reguladoras, que pueden ser co-activadoras o co-represoras, formando el complejo activo que interactúa con la maquinaria transcripcional de la célula, es decir, generando el cáncer de próstata no controlado [8].



**FIGURA 3.** Tomado de la Revista Cubana de Urología [8].

Partiendo de este hecho se hace imperativo encontrar un tratamiento para este tipo de enfermedad agresiva, por ende para el tratamiento de pacientes con CRPC, con metástasis óseas sintomáticas y sin enfermedad metastásica visceral, (Como se denomina medicamento la enfermedad), el Dicloruro de radio 223 demostró un perfil de seguridad favorable y tiene el potencial de mejorar los resultados del paciente de una forma totalmente novedosa. El radio 223 emite partículas alfa que afectan a las células cancerosas en las metástasis óseas y puede contribuir a una mejora en la supervivencia del paciente. Según estudios realizados por el Dr. Kemal Malik (evidenciado en un gran número de comunicados de diferentes portales y medios de comunicación de índole medico), "revelo que el hueso es el



- A pesar de encontrarse aún en fase experimental (fase III), y de tener pocos efectos colaterales (consistentes en náuseas leves y diarrea esporádica y puede haber un efecto pequeño sobre la médula ósea [9], a la fecha, promete ser un tratamiento contundente frente al CPRC, una de las fuentes con mayor mortalidad en hombres en el mundo.
- Como parte de la enseñanza dada a ingenieros, tecnólogos, físicos y licenciados en física [12], se hace imprescindible tener conocimientos del ámbito físico, que proporciona la física médica y más aún en ámbitos de medicina nuclear, ya que si bien las simulaciones son una herramienta válida [13, 14] se hace necesario conocer y ver detalles clínicos en la aplicación de las ciencias básicas como la física en el campo mediático y clínico [15].

## REFERENCIAS

- [1] Plazas, M. C., *Ataques y accidentes radiactivos a nivel mundial*, 2a Ed. presentación: Protección radiológica, (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2013).
- [2] Roman, A. G., *Gestión de residuos radiactivos y fuentes en desuso*, presentación: Protección radiológica, (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2013).
- [3] Gonzalez S. G., *et al.*, *Para entender las radiaciones.*, (Facultad de Ciencias Universidad de la República, Uruguay, 2011).
- [4] Brosed. A., *Fundamentos de Física Médica Volumen 1: Medida de la radiación.*, (Editorial Adi, España, 2011).
- [5] Ministerio De Minas Y Energía, Unidad De Seguridad Nuclear., *Protección Radiologica Y Gestion Ambiental*, (Instituto de Investigación e Información Geocientífica, Minero-ambiental y Nuclear, Bogota, 2002).
- [6] Lide., D. R., *CRC Handbook of Chemistry and Physics.*, 83rd ed.; (CRC Press, Boca Raton, FL, 2002), pp 6:107-6:122.
- [7] FDA Access Data on Xofigo., *Radium-223 dichloride.*, <[http://www.accessdata.fda.gov/drugsatfda\\_docs/label/2013/2039711bl.pdf](http://www.accessdata.fda.gov/drugsatfda_docs/label/2013/2039711bl.pdf)> Consultado el 10 de marzo de 2014.
- [8] Moro Soria, A., *El cáncer de próstata resistente a castración. Mecanismos de progresión y nuevos tratamientos.*, servicio de Urología y Laboratorio de Biología Molecular. Instituto Nacional de Oncología y Radiobiología., *Revista Cubana de Urología*, *Rev Cub Urol* **1**, 106-122 (2012).
- [9] Infobae., <<http://www.infobae.com/2013/08/02/723080-nuevo-tratamiento-da-esperanzas-pacientes-cancer-prostata>> Consultado el 10 de marzo de 2014.
- [10] Henriksen, G., *et al.*, *Targeting of osseous sites with alpha-emitting 223Ra: comparison with the -emitter 89Sr in mice.*, *Nucl. Med.* **44**, 252-259 (2003).
- [11] Castellanos., D., *et al.*, *Agentes dirigidos a la enfermedad metastásica ósea con impacto en la supervivencia.*, SOGUG, (Complejo Hospitalario Universitario de Santiago de Compostela, Madrid, 2012).
- [12] Orjuela B., H., *A new theory, a new practice, Blackboard Physics Laboratory and assisted by free software (STEP), directed to Technologists in Systematizing of Data*, *Latin-American Journal of Physics Education* **4**, 316-319 (2010).
- [13] Orjuela B., H. *et al.*, *Desarrollo De Step, Un Nuevo Simulador Interactivo, Como Una Propuesta Alternativa En El Perfeccionamiento De Herramientas En La Enseñanza De La Física.* (Memorias Simposio Centroamericano y del Caribe de Física XXVIII CURCCAF. San José, Costa Rica, 2009.)
- [14] Orjuela B., H., Hurtado., A., *Simulando Física paso a paso con Step.* (Modalidad de Investigación y Desarrollo I+D.), (Fondo de Publicaciones Universidad Distrital, Bogotá, 2012).
- [15] Orjuela B., H., Sánchez. M., Plazas M. C., *Estudio cualitativo y cuantitativo del crecimiento tumoral de un carcinoma lobular invasivo (CLI), mediante el modelo gompertziano, analizado y simulado bajo software libre Gnu/Linux.*, Ponencia presentada en el XXV Congreso Nacional de Física, Armenia, Colombia, (2013).

# Aplicación del software estadístico R para evaluar el aprendizaje de conceptos vectoriales en estudiantes de nivel Medio Superior



**Rubén Sánchez-Sánchez, Diego Fernando Becerra-Rodríguez,  
César Mora**

*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. Unidad Legaria. Calzada Legaria #694. Col. Irrigación. Del. Miguel Hidalgo. C.P. 11,500. México, D.F. Tel. 011(52)(55)57296000 Ext. 67737.*

**E-mail:** rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 14 de Diciembre de 2013, aceptado el 4 de Febrero de 2014)

## Resumen

Las clases interactivas demostrativas (CID) han sido aplicadas a la clase de Física con buenos resultados por Sokoloff y Thornton. En este trabajo se emplea el uso del lenguaje R para ver la eficiencia que se logra usando esta metodología con el Aprendizaje Activo de la Física, empleando de auxiliar el teléfono celular. Aquí se muestra como emplear R para obtener estadísticos comparativos de la  $t$  de Student y poder dar un criterio sobre la efectividad de esta metodología en la ciudad de México.

**Palabras clave:** Aprendizaje Activo de la Física, teléfonos celulares, lenguaje de programación R.

## Abstract

Interactive Lecture Demonstration (ILD) has been applied to physics class with good results with Sokoloff and Thornton. In this paper we use R to show the efficiency that is achieved using this methodology in Active Learning Physics using the cellular telephone as auxiliary technology. Here is, how we use the software R for the comparative Student's  $t$  and give an opinion on the effectiveness of this methodology in Mexico City.

**Keywords:** Active Learning Physics, cellular telephones, R programming language.

**PACS:** 01.40.-d, 01.50.H-, 01.50.hv, 01.50.-i, 01.50.ht

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La educación en la ciudad de México casi siempre se ha caracterizado por llevar la enseñanza tradicional a las aulas, en la clase de Física. El profesor cubre un programa de estudios ya aprobado en su unidad académica y se dedica a *transmitir* estos conocimientos a sus alumnos con el empleo de la exposición en el pizarrón de los temas y mediante la resolución de problemas. Las actividades se complementan con las *prácticas de laboratorio*. El profesor se convierte así en una especie de *fuentes de conocimiento absoluto* para sus estudiantes. Y el objetivo, de los cursos es *transmitir* el conocimiento del profesor a sus alumnos de la manera más eficiente, convirtiendo así a la clase de Física en una especie de exposición de la *oratoria* del maestro. Esto es, la clase de Física es una especie de *discurso* donde casi siempre el participante que ocupa la mayor parte del tiempo en hablar, es el profesor.

Sin embargo, este tipo de práctica, donde el profesor (o en algunas ocasiones el libro de texto), es la *autoridad máxima* de conocimiento en el salón de clases, se ha

tornado en una práctica común en los salones de clase, y se le ha conocido comúnmente como la *enseñanza tradicional*.

Las Clases Interactivas Demostrativas (CID) han sido desarrolladas en Estados Unidos por Laws, Sokoloff y Thornton [1, 2, 3, 4], para aplicar el *Aprendizaje Activo de la Física* (AAF).

Se ha demostrado que el AAF auxilia a los estudiantes de Física dentro de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Sokoloff y Thornton [5, 6, 7, 8] han llevado su buena práctica docente a ciertas Universidades de Estados Unidos con resultados bastante favorables.

En este trabajo, se resumen los resultados obtenidos con una metodología ajustada con el empleo del teléfono celular, para el aprendizaje del tema de suma vectorial, para estudiantes también de nivel Universitario, y esto aplicado a la cultura mexicana del Valle de México. En particular los estudiantes eran del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) No. 11 del Instituto Politécnico Nacional.

Los resultados fueron recolectados por José Orozco Martínez [9] alrededor de septiembre y octubre del año de 2009 en el CECyT No. 11: *Wilfrido Massieu*.

En este trabajo, los autores pretenden mostrar como el uso de una herramienta de software libre llamada *R* puede ser empleada en la parte del análisis estadístico de este trabajo de investigación educativa.

## II. INSTALANDO R

Básicamente, para instalar *R* es necesario visitar su página web ubicada en el Uniform Resource Locator (URL) o dirección web [www.r-project.org](http://www.r-project.org) [10], y posteriormente bajar e instalar el paquete. En el margen izquierdo de la página contiene una liga con la leyenda

Download, Packages  
CRAN

Una vez que se le da click a la liga, se nos conduce a otra página con los principales servidores o *mirrors* de *R* en el mundo. Desde luego, hay que escoger aquí a un servidor que esté lo suficientemente cerca de nuestra ubicación geográfica.

Los autores del presente escrito están ubicados en la ciudad de México, así que a ellos les conviene escoger el sitio marcado como [11]

<http://cran.itam.mx>

que corresponde al Instituto Tecnológico Autónomo de México. Nuevamente y eligiendo esta liga nos conducimos a tra página web de la misma dirección URL que la liga titulada *The Comprehensive R Archive Network*, en la sección titulada *Download and Install R* encontramos tres ligas enumeradas con viñetas como sigue

- Download R for Linux
- Download R for (Mac) OS X
- Download R for Windows

Dependiendo de nuestro sistema operativo, bajamos el paquete correspondiente y lo instalamos. Para Linux habrá dos paquetes de *R* que corresponden a sus correspondientes versiones de distribución ya sea *debian/deb*, *redhat/rpm*, *suse/rpm*, *ubuntu/deb*. Para instalarlo, por ejemplo, en un sistema tipo *debian*, se abre una terminal en el sistema [12] y se le da el comando *dpkg* siguiente

```
$ sudo dpkg -i r-base-core_2.11.0-1~etchcran.0_i386.deb
```

después de darle la contraseña de superusuario para el comando *sudo* que permite que la instalación se efectúe con los privilegios de un administrador de linux, el programa *R* se instalará en nuestro sistema.

Para un sistema linux tipo *Red Hat* [13] se instala como en el siguiente ejemplo en modo de *superusuario*

```
# rpm -i R-core-2.10.0-2.fc11.i586.rpm
```

En un sistema Windows se le debe de dar doble click al archivo *exe*, en modo de administrador. El archivo al tiempo de este escrito se llama como sigue

```
R-3-0-1-win.exe
```

En un sistema o Mac OS X se baja el paquete llamado

```
R-3-0-1-pkg
```

y se le da doble click, después de lo cual se siguen las instrucciones y después de pasar por varias opciones de configuración, el programa *R* queda instalado.

Para un sistema operativo FreeBSD [14, 15] la instalación de *R* se facilita mediante el empleo de los *puertos*. Primero se cambia el directorio al puerto de *R*, llamado *math/R* con el comando

```
$ cd /usr/ports/math/R
```

y después de dar *enter* se procede a bajar el archivo fuente, a compilarlo, y a instalarlo en el sistema con el comando

```
# make install
```

Acto seguido, es recomendable borrar las trazas del paquete compilado y guardado en el subdirectorio *work* con el comando de limpieza de puerto

```
# make clean
```

Otra opción para FreeBSD es simplemente bajar el paquete ya compilado e instalarlo. Para emplear los *paquetes* en FreeBSD se sigue un esquema muy similar con el comando *pkg\_add* y utilizando la opción *-r* que nos permite *capturar* el paquete desde *lejos* en algún servidor de FreeBSD. De modo que en modo de superusuario se ejecuta la orden

```
# pkg_add -r R
```

Orden con la cual, se instala *R* sobre FreeBSD. Uno de los autores, prefiere este sistema operativo debido a su simplicidad y ligereza, además de que es un sistema operativo muy estable que desciende directamente del antiguo sistema UNIX de la AT&T.

## III. EL PAQUETE NCSTATS

Dentro del lenguaje *R* se pueden cargar paquetes, que añaden funcionalidad a *R*. Uno de estos paquetes es *NCStats*, que contiene las funciones necesarias de soporte para poder graficar, en nuestro caso, las distribuciones *t* de Student aplicables a los grupos experimental y de control de Orozco. Una descripción del paquete se puede hallar en su página web [16].

El paquete contiene funciones y simulaciones para soportar la Estadística introductoria, que normalmente se da en la Universidad *Northland College* en Ashland, Wisconsin, Estados Unidos, con página web [www.northland.edu](http://www.northland.edu) [17].

Para instalar NCStats dentro de R, es conveniente ejecutar un comando que va a explorar, los sitios de respaldo de R, para descargarlo e instalarlo. El comando es

```
>source("http://www.rforge.net/NCStats/InstallNCStats.R")
```

Después de contestar de qué sitio se quiere descargar el paquete, el comando empieza a instalarlo en R. Cuando la tarea es por fin acabada, se puede cerrar la sesión. En la siguiente sección podemos cargar el paquete mediante el comando

```
> library(NCStats)
```

Y ya podemos empezar a usarlo. Si queremos aprender acerca de las funciones que provee esta librería podemos efectuar el siguiente comando

```
> ?NCStats
```

Que nos mostrará una breve introducción del paquete, como se muestra a continuación

Support for statistics classes at Northland College.

Description:

Functions to support statistics classes at Northland College.

Details:

This package contains functions and simulations to support the Introductory Statistics, Biometry, and Fisheries Science courses at Northland College in Ashland, WI (<URL:<http://www.northland.edu/>>). 'NCStats' has not been included on CRAN because I have not fully proofed all functions - they work with the examples that I have developed but have not been thoroughly checked for all possibilities. Please do not use these functions for research-grade analyses.

Some of the functions in this package are simple modifications of functions from other packages. I have attempted to give the authors of these other packages appropriate credit while still documenting my modifications.

Básicamente nuestro interés particular en NCStats radica en que como R es un lenguaje de programación orientado a objetos, las funciones de graficación como *plot* pueden ser fácilmente modificables dentro de un paquete, de acuerdo a nuestra conveniencia particular. Modificamos la función

plot de R para que sea vicualmente más adecuada para mostrar la distribución *t* de Student que se quiere analizar. Posteriormente, y con un pequeño programa que usa a esta función plot modificada, podremos *personalizar* nuestras gráficas. Esta es en sí, una de las ventajas que podemos lograr con el uso de esta preciosa herramienta estadística de software libre.

**TABLA I.** Calificaciones de los alumnos para el grupo de control para el pretest y el postest. El grupo de control aprende la suma vectorial de la Física empleando el método didáctico tradicional. Se muestran las calificaciones correspondientes a la pregunta #1 del test aplicado por Orozco.

Grupo de Control		
Alumno	Postest	Pretest
1	100.0	100.0
2	100.0	100.0
3	77.8	33.3
4	44.4	33.3
5	100.0	100.0
6	44.4	33.3
7	33.3	33.3
8	66.7	22.2
9	77.8	77.8
10	22.2	33.3
11	66.7	33.3
12	33.3	33.3
13	100.0	100.0
14	33.3	77.8
15	11.1	77.8
16	33.3	33.3
17	11.1	77.8
18	00.0	55.6
19	00.0	22.2
20	00.0	100.0
21	33.3	22.2
22	11.1	11.1
23	22.2	22.2
24	33.3	100.0
25	00.0	33.3
26	44.4	33.3
27	100.0	100.0
28	33.3	11.1
29	22.2	22.2
30	33.3	66.7
31	22.2	66.7
32	33.3	00.0
33	33.3	00.0
34	33.3	00.0
35	33.3	33.3

#### IV. RESULTADOS DEL APRENDIZAJE ACTIVO DE LA FÍSICA

José Orozco Martínez [9] aplicó la metodología del Aprendizaje Activo de la Física (AAF) en su grupo experimental y dejó a otro grupo con el método tradicional de aprendizaje, éste último es su grupo de control.

Empezamos a enlistar los resultados obtenidos por él para su grupo de control. En la tabla I se enlistan tanto sus resultados después de aplicar la metodología educativa<sup>1</sup> y antes de aplicarla.<sup>2</sup> Todo esto se realiza de acuerdo a los resultados obtenidos para la pregunta #1 de su test aplicado, para adaptarlo al uso del teléfono celular como asistente o punto de apoyo tecnológico a la metodología principal de aprendizaje (el AAF).

La pregunta #1 tiene que ver con el concepto de la magnitud de un vector. Aquí se les muestra una gráfica o figura a los alumnos con varios vectores dispuestos en forma horizontal y vertical, y con varias magnitudes. La figura 1, tiene por objeto, tratar de que el alumno entienda el concepto matemático que yace atrás de la magnitud de los vectores, y todo esto encaminado a un mejor entendimiento del concepto de vector, para posteriormente aplicarle operaciones matemáticas, como la suma vectorial. En Física, los conceptos de *vectores* y de *suma vectorial* son fundamentales para el entendimiento de varios fenómenos que tienen en su formulación matemática, la participación de magnitudes vectoriales, y de magnitudes escalares.

**TABLA II.** Calificaciones de los alumnos del grupo experimental, se muestran los resultados del postest y del pretest cuando se utiliza el Aprendizaje Activo de la Física combinada con el uso del teléfono celular. Aquí se muestran las calificaciones obtenidas de acuerdo a la pregunta #1 del test empleado por Orozco.

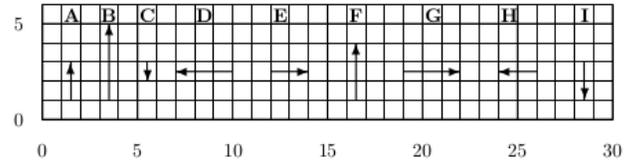
Grupo Experimental		
Alumno	Postest	Pretest
1	33.3	33.3
2	11.1	00.0
3	55.6	33.3
4	00.0	00.0
5	44.4	22.2
6	33.3	11.1
7	77.8	00.0
8	100.0	100.0
9	77.8	100.0
10	00.0	00.0
11	33.3	00.0
12	33.3	55.6
13	100.0	100.0
14	100.0	100.0
15	33.3	33.3
16	33.3	00.0
17	100.0	11.1
18	33.3	33.3
19	100.0	100.0
20	100.0	100.0
21	77.8	33.3
22	22.2	00.0
23	100.0	33.3
24	22.2	33.3
25	11.1	11.1
26	100.0	11.1
27	33.3	33.3

<sup>1</sup> Resultados del postest.

<sup>2</sup> Resultados del pretest.

También es conveniente tener a la mano los resultados del pretest y postest que obtuvo Orozco [9] durante su experimento con el Aprendizaje Activo de la Física y el uso del teléfono celular. En la tabla II enlistamos los resultados obtenidos por cada uno de sus alumnos del grupo experimental. El experimento fue realizado en aras de apoyar a la nueva metodología de aprendizaje, pues en México se tienen generalmente resultados de aprovechamiento de la Física muy bajos.

Al aplicar esta metodología de aprendizaje el investigador busca obtener mejores resultados de aprendizaje que con el método utilizado de antaño.



**FIGURA 1.** Problema #1. En este problema se evalúa el concepto: magnitud de un vector. Aquí mostramos el gráfico del problema y el texto que aplicó Orozco para su primer pregunta del test y que versa así: *En la imagen anterior se aprecian varios vectores, los cuales tienen diferentes magnitudes y arriba de cada uno tiene una letra mediante la cual se le identifica, agrupa las letras de los vectores con igual magnitud, por ejemplo si los vectores  $x$  y  $w$  tienen igual magnitud la respuesta se escribe como  $|x|=|w|$ .*

En la siguiente sección exploramos como podemos analizar estos resultados mediante la *t* de Student haciendo uso del software libre R. Para esto, mostramos un pequeño pero útil programa de graficación en R utilizando el paquete NCStats, y posteriormente mostramos los resultados en forma gráfica.

## V. INTRODUCIENDO DATOS EN R

La forma de introducir datos en R es a través de *vectores* [18, 19]. Los vectores se construyen en R con el comando *c()* del inglés *concatenate* que en español significa *unir*. Por ejemplo, para construir un vector 3-dimensional *v* con componentes cartesianas  $v_x=2$ ,  $v_y=-1$ ,  $v_z=3$ , se da el siguiente comando en R.

```
> v <- c(2, -1, 3)
```

Después de introducir este sencillo vector en R, se puede desplegar tan sólo mencionándolo por su nombre

```
> v
[1] 2 -1 3
```

Donde el 1 entre corchetes indica que el *primer* elemento del vector *v* es el número 2, y se *sobreentiende* que las *siguientes* entradas de *v* son: su segunda entrada -1 y su tercer entrada 3. En caso de que el vector no pueda mostrarse en una sola línea, R continuará desplegándolo utilizando la segunda línea del su *display*, iniciándolo con

otro número entre corchetes, que indicaría el número de *entrada* en el vector que ocuparía la siguiente componente, y así sucesivamente, hasta que el vector quede totalmente desplegado en las líneas de su *display*.

Si queremos ingresar las evaluaciones de los 35 *alumnos* del grupo de *control* en el *pretest* para la pregunta #1 del test de Nguyen & Meltzer [20], podemos construir para el grupo de Orozco el vector<sup>3</sup> *al.con.pre.1* como sigue

```
> al.con.pre.1 <- c(100, 100, 33.3, 33.3, 100, 33.3,
33.3, 22.2, 77.8, 33.3, 33.3, 33.3, 100, 77.8, 77.8,
33.3, 77.8, 55.6, 22.2, 100, 22.2, 11.1, 22.2, 100,
33.3, 33.3, 100, 11.1, 22.2, 66.7, 66.7, 0, 0, 33.3,
33.3)
```

Asimismo, si queremos pasar para el mismo grupo y la misma pregunta las evaluaciones correspondientes al *postest* podemos construir para este experimento de Orozco al vector *al.con.pos.1* como se indica enseguida

```
al.con.pos.1 <- c(100, 100, 77.8, 44.4, 100, 44.4,
33.3, 66.7, 77.8, 22.2, 66.7, 33.3, 100, 33.3, 11.1,
33.3, 11.1, 0, 0, 0, 33.3, 11.1, 22.2, 33.3, 0, 44.4,
100, 33.3, 22.2, 33.3, 22.2, 33.3, 33.3, 33.3)
```

Similarmente, habrá otros dos vectores *al.exp.pre.1* y *al.exp.pos.1*, correspondientes a las pruebas del *pretest* y *postest* para el grupo *experimental* de Orozco, como este grupo sólo tiene 27 *alumnos* los vectores constan correspondientemente de 27 *entradas* cada uno. Así tenemos, para este grupo de *alumnos* los siguientes dos vectores de datos, que ingresamos a R

```
> al.exp.pre.1 <- c(33.3, 0, 33.3, 0, 22.2, 11.1, 0,
100, 100, 0, 0, 55.6, 100, 100, 33.3, 0, 11.1, 33.3,
100, 100, 33.3, 0, 33.3, 33.3, 11.1, 11.1, 33.3)
```

```
> al.exp.pos.1 <- c(33.3, 11.1, 55.6, 0, 44.4, 33.3,
77.8, 100, 77.8, 0, 33.3, 33.3, 100, 100, 33.3, 33.3,
100, 33.3, 100, 100, 77.8, 22.2, 100, 22.2, 11.1,
100, 33.3)
```

Después de ingresar los datos en R, se pueden realizar varias operaciones con ellos. Quizá la operación más fundamental en R, sea la de simplemente desplegar los datos, por ejemplo para *al.con.pre.1* tenemos

```
> al.con.pre.1
[1] 100.0 100.0 33.3 33.3 100.0 33.3 33.3 22.2
[9] 77.8 33.3 33.3 33.3 100.0 77.8 77.8 33.3 77.8
[18] 55.6 22.2 100.0 22.2 11.1 22.2 100.0 33.3
```

<sup>3</sup> Aquí, se está tratando de ser claro, con la nomenclatura a la hora de escoger un nombre para el vector que contendrá los datos del grupo de control para el *pretest*. En el nombre escogido: *al.con.pre.1*, la primera parte *al* se refiere a *alumnos*, la segunda parte *con* se refiere a que los *alumnos* son del grupo de *control*, al tercera parte *pre* se refiere a que los resultados se obtuvieron durante el *pretest*, la cuarta y última parte *1* se refiere a que se están analizando los resultados arrojados cuando los *alumnos* contestan la pregunta #1 del test de Nguyen y Meltzer.

```
[26] 33.3 100.0 11.1 22.2 66.7 66.7 0.0 0.0 33.3
[35] 33.3
```

Por ejemplo, para sumar los datos se emplea el comando *sum* de esta forma

```
> sum(al.con.pre.1)
[1] 1733
```

Para evaluar su promedio se utiliza la función *mean*

```
> mean(al.con.pre.1)
[1] 49.51429
```

Y para sacar su desviación estándar se usa *sd*, de esta forma tenemos la desviación estándar de los datos en *al.con.pre.1* con

```
> sd(al.con.pre.1)
[1] 32.72413
```

**TABLA III.** Se muestran varios parámetros estadísticos para las cuatro muestras tomadas por Orozco, tanto para su grupo de control como para el grupo experimental, en sus fases de *pretest* y *postest*, se muestran el número de *alumnos* de cada grupo, la suma total de las calificaciones alcanzadas por los *alumnos* de cada grupo y cada fase, su media y su desviación estándar.

Resultados estadísticos de las muestras					
Grupo	prueba	# al.	Sum.	Prom.	Desv. Est.
Gpo de control	Pretest	35	1733	49.51429	32.72413
	Postest		1443.9	41.25429	31.15339
Gpo experimental	Pretest	27	988.6	36.61481	37.59642
	Postest		1466.4	54.31111	35.99287

En la tabla III se resumen varios resultados estadísticos que se pueden hallar fácilmente con la ayuda de R [21, 22], tal y como se acaba de mostrar para el grupo de control en su fase de *pretest* (*al.con.pre.1*) para la pregunta #1 del test.

En la tabla IV se muestra la nomenclatura empleada para distinguir a los vectores de datos utilizados en R para los grupos de control y experimental en cada fase, ya sea de *pretest* o *postest*.

**TABLA IV.** Nomenclatura utilizada para los vectores de datos empleados en R, y que corresponden a las evaluaciones obtenidas por cada estudiante de los grupos de control y experimental en cada una de las fases de prueba. Esto es, en las fases de *pretest* y *postest*. Y esto se hizo así, para la pregunta #1 del test que aplicó Orozco a sus grupos.

Nomenclatura utilizada para los vectores de R que se corresponden a los grupos de control y experimental en sus fases de <i>pretest</i> y <i>postest</i>		
Grupo	Prueba	Nomenclatura en R
Grupo de control	Pretest	al.con.pre.1
	Postest	al.con.pos.1
Grupo experimental	Pretest	al.exp.pre.1
	Postest	al.exp.pos.1

En la siguiente sección mostraremos como se puede hacer una prueba estadística de la  $t$  de Student con este software libre.

## VI. CALCULANDO LOS PARÁMETROS DE LA $t$ DE STUDENT

Con el fin de calcular la prueba estadística  $t$  de Student de dos muestras de datos, se emplea la función integrada  $t.test$ . Si queremos pedir ayuda acerca de la manera de usarla, se le puede pedir ayuda a R [23, 24, 25] con el comando

```
> ?t.test
```

que nos muestra la siguiente ayuda

```
t.test      package:stats      R Documentation
```

Student's t-Test

Description:

Performs one and two sample t-tests on vectors of data.

Usage:

```
t.test(x, ...)
```

```
## Default S3 method:
```

```
t.test(x, y = NULL,  
       alternative = c("two.sided", "less", "greater"),  
       mu = 0, paired = FALSE, var.equal = FALSE,  
       conf.level = 0.95, ...)
```

```
## S3 method for class 'formula'
```

```
t.test(formula, data, subset, na.action, ...)
```

Arguments:

$x$ : a (non-empty) numeric vector of data values.

$y$ : an optional (non-empty) numeric vector of data values.

$alternative$ : a character string specifying the alternative hypothesis, must be one of "two.sided" (default), "greater" or "less". You can specify just the initial letter.

$mu$ : a number indicating the true value of the mean (or difference in means if you are performing a two sample test).

$paired$ : a logical indicating whether you want a paired t-test.

$var.equal$ : a logical variable indicating whether to treat the two variances as being equal. If 'TRUE' then the pooled variance is used to estimate the variance otherwise the

Welch (or Satterthwaite) approximation to the degrees of freedom is used.

$conf.level$ : confidence level of the interval.

$formula$ : a formula of the form 'lhs ~ rhs' where 'lhs' is a numeric variable giving the data values and 'rhs' a factor with two levels giving the corresponding groups.

$data$ : an optional matrix or data frame (or similar: see 'model.frame') containing the variables in the formula 'formula'. By default the variables are taken from 'environment(formula)'.

$subset$ : an optional vector specifying a subset of observations to be used.

$na.action$ : a function which indicates what should happen when the data contain 'NA's. Defaults to 'getOption("na.action")'.

...: further arguments to be passed to or from methods.

Details:

The formula interface is only applicable for the 2-sample tests.

'alternative = "greater"' is the alternative that 'x' has a larger mean than 'y'.

If 'paired' is 'TRUE' then both 'x' and 'y' must be specified and they must be the same length. Missing values are silently removed (in pairs if 'paired' is 'TRUE'). If 'var.equal' is 'TRUE' then the pooled estimate of the variance is used. By default, if 'var.equal' is 'FALSE' then the variance is estimated separately for both groups and the Welch modification to the degrees of freedom is used.

If the input data are effectively constant (compared to the larger of the two means) an error is generated.

Value:

A list with class "htest" containing the following components:

$statistic$ : the value of the t-statistic.

$parameter$ : the degrees of freedom for the t-statistic.

$p.value$ : the p-value for the test.

$conf.int$ : a confidence interval for the mean appropriate to the specified alternative hypothesis.

$estimate$ : the estimated mean or difference in means depending on whether it was a one-sample test or a two-sample test.

null.value: the specified hypothesized value of the mean or mean difference depending on whether it was a one-sample test or a two-sample test.

alternative: a character string describing the alternative hypothesis.

method: a character string indicating what type of t-test was performed.

data.name: a character string giving the name(s) of the data.

See Also:

'prop.test'

Examples:

```
require(graphics)

t.test(1:10, y = c(7:20)) # P = .00001855
t.test(1:10, y = c(7:20, 200)) # P = .1245 -- NOT
significant anymore

## Classical example: Student's sleep data
plot(extra ~ group, data = sleep)
## Traditional interface
with(sleep, t.test(extra[group == 1], extra[group == 2]))
## Formula interface
t.test(extra ~ group, data = sleep)
```

Como podemos ver, para usarla podemos dar dos argumentos principales, que son los dos conjuntos de datos que queremos comparar, y debemos de decir si los datos están *apareados*<sup>4</sup> o están *desapareados*.<sup>5</sup>

Para mostrar su uso vamos a realizar una prueba *t* de Student comparando Los datos del postest contra los del pretest para el grupo de control de Orozco. Aquí, los dos grupos de datos representados por los vectores *al.con.pos.1* y *al.con.pre.1* están apareados por tratarse de las evaluaciones para los alumnos del *mismo* grupo de control. Así pues, tenemos que

```
> t.test(al.con.pos.1, al.con.pre.1, paired=TRUE)
```

Lo cual nos arroja el siguiente análisis estadístico para la *t* de Student:

Paired t-test

```
data: al.con.pos.1 and al.con.pre.1
t = -1.4404, df = 34, p-value = 0.1589
alternative hypothesis: true difference in means is not equal
to 0
```

<sup>4</sup> Pertenecen en este caso al mismo grupo.

<sup>5</sup> Pertenecen para este caso a dos grupos diferentes. Por ejemplo: unos datos fueron capturados a partir del grupo de control y otros datos (de otro vector) fueron capturados del grupo experimental.

```
95 percent confidence interval:
-19.913614 3.393614
sample estimates:
mean of the differences
-8.26
```

Lo cual nos muestra la ayuda proporcionada por R [26, 27], para la *t* de Student. Primero nos dice que los datos están apareados, pues estamos comparando dos grupos de datos del mismo grupo de control. Luego nos muestra el valor del parámetro *t*, nos indica que existen 34 grados de libertad, que es el número de datos menos uno.<sup>6</sup> Nos da el valor *p*. Nos muestra que la hipótesis alternativa es cierta. Es decir, los estudiantes del grupo de control muestran *diferencias* de conocimiento entre el pretest y el postest. Nos muestra el intervalo de confianza al 95%. Y nos da el promedio de la diferencia. Como esta diferencia es negativa, tal parece que el grupo de control de Orozco tuvo muchos problemas para aprender Física con el método tradicional de enseñanza, donde el profesor *expone* el conocimiento que hay que aprender y los estudiantes *aprenden* del profesor, sin cuestionarlo.

Veamos ahora que pasa con su grupo experimental, el grupo que lleva la metodología del Aprendizaje Activo de la Física auxiliado con el teléfono celular, para la pregunta #1 del test de Nguyen y Meltzer [20], tenemos

```
> t.test(al.exp.pos.1, al.exp.pre.1, paired=TRUE)
```

Que arroja la siguiente prueba *t* de Student

Paired t-test

```
data: al.exp.pos.1 and al.exp.pre.1
t = 2.9499, df = 26, p-value = 0.006644
alternative hypothesis: true difference in means is not equal
to 0
95 percent confidence interval:
5.365255 30.027338
sample estimates:
mean of the differences
17.6963
```

Como podemos darnos cuenta es un grupo de 27 alumnos, pues el número de grados de libertad es 26 para el estadístico *t* de Student. Además el valor de la *t* es positivo, a diferencia del primer caso. También es positivo el promedio de la diferencia *comparativa*, entre el grupo experimental después de aplicar la metodología (postest) y antes de aplicarla (pretest). Estos dos valores, como son positivos, nos muestran que los alumnos del grupo experimental de Orozco, si están al menos, aprendiendo algo, con el método del Aprendizaje Activo de la Física auxiliado con el empleo del teléfono celular.

Para finalizar este breve análisis estadístico, nos falta comparar a ambos grupos después de que han llevado el tema de *suma vectorial* y *vectores*. Pero, como

<sup>6</sup> O el número de alumnos del grupo menos uno.

Rubén Sánchez-Sánchez et al.

manipulamos los datos para la primera pregunta, al menos sabremos lo que pasa en esa pregunta del test aplicado. Nuevamente le pedimos a R que haga la comparación de los postest del grupo experimental contra el grupo de prueba

```
> t.test(al.exp.pos.1, al.con.pos.1, paired=FALSE)
```

Como aquí, se están comparando a *dos* grupos diferentes, los datos *no* están apareados (por eso, el parámetro *paired* en la llamada de la función *t.test*, lo igualamos con *FALSE*, para este caso de comparación). El análisis de R es

#### Welch Two Sample t-test

```
data: al.exp.pos.1 and al.con.pos.1
t = 1.5006, df = 51.566, p-value = 0.1396
alternative hypothesis: true difference in means is not equal
to 0
95 percent confidence interval:
-4.406868 30.520519
sample estimates:
mean of x mean of y
54.31111 41.25429
```

Lo primero que vemos es que los datos no están apareados. R muestra esto cuando dice:

#### Welch Two Sample t-test

porque esta vez, estamos comparando a dos grupos diferentes, para la primer pregunta del test: el grupo experimental contra el grupo de control. Como la *t* de Student dió positiva para la pregunta #1 del test de Nguyen, al menos vemos que en este caso, los alumnos del grupo experimental tuvieron una ventaja con respecto a los del grupo de control. Es decir, aún sin una prueba de hipótesis nula, el grupo experimental salió un poco mejor que el de control. Lo cual nos sugiere que al menos en la pregunta #1 del test aplicado, el Aprendizaje Activo de la Física dió mejores resultados que el empleo del aprendizaje tradicional.

## VII. PRUEBA DE HIPÓTESIS NULA CON R

Se dice que R es un lenguaje de programación *orientado a objetos*. Pero, ¿qué es un objeto?, nos preguntamos a estas alturas. Bueno, un *objeto* (en un sentido formal y profesional) es una estructura de datos. Pero para entender mejor el concepto, diremos aquí que un objeto es una especie de conjunto, que abraza en su interior, a varios parámetros. En nuestro caso nos sirve esta definición informal, para darnos una idea aproximada de lo que significa un *objeto* en las Ciencias Computacionales. Para

aplicarla a nuestro caso, este conjunto de datos o parámetros los podemos almacenar en una sola variable.

Esto es, cada análisis anterior de la *t* de Student que hicimos con R, es un *objeto*; y por ende, lo podemos asignar a una variable. De manera que podemos *guardar* cada uno de los análisis estadísticos pasados en variables por separado, y así evitamos perder la información.

Vamos ahora a *guardar* cada análisis en una variable de R, así, si queremos almacenar en la variable *tt.al.con.1* al primer análisis escribimos lo siguiente en R

```
> tt.al.con.1 <- t.test(al.con.pos.1, al.con.pre.1,
paired=TRUE)
```

Notamos que esta vez, R no muestra ningún resultado. Esto es porque el resultado se guardó en la variable *tt.al.con.1*. Para mostrar el análisis, simplemente llamamos a *tt.al.con.1*, sobre la línea de comando de R, y el análisis se vuelve a desplegar en la pantalla.

Hacemos lo propio con los otros dos análisis

```
> tt.al.exp.1 <- t.test(al.exp.pos.1, al.exp.pre.1,
paired=TRUE)
> tt.al.pos.1 <- t.test(al.exp.pos.1, al.con.pos.1,
paired=FALSE)
```

Con el objeto de hacer la prueba de hipótesis nula a cada análisis, empleamos las funciones gráficas de R. Para esto, bastaría con simplemente cargar la librería NCStats y llamar a la función *plot* de R, con cada una de las variables anteriores donde hemos guardado los análisis pasados en la forma de *objetos* de programación. Nuevamente como R es un lenguaje de programación orientado a objetos, la función R cambia o sufre *metamorfosis* para hacer las gráficas *t* de Student de cada uno de los análisis pasados. Otro elemento que nos faltaría sería un manejador de dispositivo gráfico que R abre con el comando *pdf()*, y cierra después de haber hecho el gráfico con la función *dev.off()*. De manera, que si queremos graficar el primer análisis basta con emitir los comandos

```
> library(NCStats)
> pdf()
> plot(tt.al.con.1)
> dev.off()
```

En la secuencia pasada de comandos, primero le decimos a R que cargue la librería NCStats, para que nos grafique la *t* de Student según la Universidad de Northland College. Luego, abrimos el manejador de dispositivo gráfico para documentos pdf. Después graficamos la *t* de Student del primer análisis y finalmente le decimos a R que *cierre* el manejador gráfico de dispositivo. Esto tiene el efecto de producir una gráfica en formato pdf de la *t* de Student para el primer análisis en el directorio de trabajo, y le da un nombre por default *Rplots.pdf*. Pero, ¿cuál es el directorio de trabajo? Esto se puede obtener si le

preguntamos a R donde es nuestro directorio de trabajo actual

```
> getwd()
[1] "/home/genesis"
```

En este ejemplo, se está trabajando en el directorio de trabajo `/home/genesis` en un sistema operativo FreeBSD. Si no nos gusta nuestro directorio actual de trabajo lo podemos cambiar con el siguiente comando

```
> setwd("/home/genesis/trabajo")
```

Aquí le estamos dando la orden a R de que cambie el directorio de trabajo a `/home/genesis/trabajo`, para un sistema operativo en FreeBSD.

En el ejemplo pasado, se generó un archivo pdf, pero si quisiéramos generar un archivo png, debemos cambiar el dispositivo gráfico de salida por `png()`, si además le queremos dar un nombre al archivo de salida como `postestControl.png`, entonces la secuencia de comandos sería

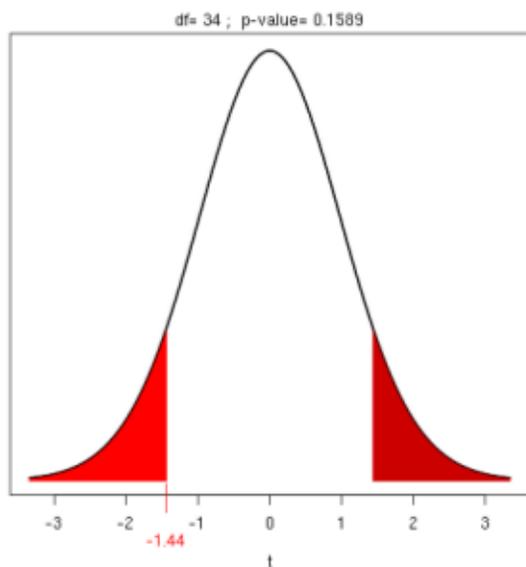


FIGURA 2. Gráfica de la  $t$  de Student para el grupo de control.

```
> library(NCStats)
> png(file="postestControl.png")
> plot(tt.al.con.1)
> dev.off()
```

Si queremos refinar los resultados gráficos obtenidos hasta ahora en R, podemos definir la siguiente función gráfica

```
tstudent5 <- function (x, y) {
  png(file = y)
  par(ann=FALSE, font=3, font.axis=3)
  plot(x, smoothness=1000, shade.col="blue3",
  shade.col2="red")
}
```

```
par(mgp=c(3,3,0), col.axis="blue3")
axis(1, at=x$Statistic[1][[1]], labels="t")
alpha12 <- abs(qt(0.975, x$parameter[1][[1]]))
yalpha12 <- dt(alpha12, x$parameter[1][[1]])
text(alpha12, yalpha12+0.05, expression(alpha/2),
adj=c(-0.1,0), col="forestgreen")
text(-alpha12, yalpha12+0.05, expression(-
alpha/2), adj=c(1.1,0), col="forestgreen")
axis(1, at=alpha12*c(-1,1), labels=NA,
col.ticks="forestgreen", tcl=4.0)
title(sub="t de Student", font.sub=4)
}
```

Donde “ $x$ ” denota el objeto del análisis que queremos graficar, y “ $y$ ” denota el nombre del archivo de salida. Recomendamos utilizar la ayuda de R, como lo hemos venido haciendo aquí, para entender, los comandos que intervienen en esta función. Por ejemplo, para producir la gráfica de la  $t$  de Student del postest contra el pretest para el grupo de control y la pregunta #1 del test de Nguyen y Meltzer, podemos hacerlo con los comandos

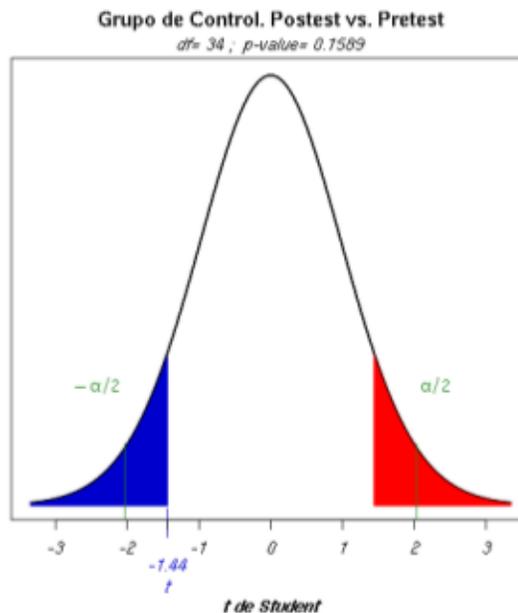


FIGURA 3. Gráfica comparativa  $t$  de Student para el grupo de control de Orozco.

```
> tstudent5(tt.al.con.1, "GpoCon.png")
> title(main= "Grupo de Control. Postest vs.
Pretest")
> dev.off()
```

El resultado se puede apreciar en la figura 3. Como se puede apreciar, las características de la gráfica ya se refinaron. El valor límite se muestra en la gráfica.

Como  $-\alpha/2 < t < \alpha/2$  el valor de  $t$  queda dentro del rango de aceptación de la hipótesis nula ( $H_0$ : No hay diferencia en el conocimiento de los alumnos antes y después de aplicar la metodología tradicional de

Rubén Sánchez-Sánchez et al.

aprendizaje), entonces no hay una diferencia significativa de aprendizaje utilizando el método tradicional de enseñanza.

Hasta ahora hemos hecho la gráfica para los resultados del grupo de control. Si repetimos el mismo procedimiento para el grupo experimental, podemos crear una primera gráfica *postest-experimental.png* utilizando la función *plot* con los comandos

```
> png(file="postestExperimental.png")
> plot(tt.al.exp.1)
> dev.off()
```

Al final, se cierra el dispositivo gráfico *png()* con el comando *dev.off()*, después de lo cual, el archivo *postestExperimental.png* lo encontraremos en nuestro directorio de trabajo (que en este ejemplo corresponde al directorio de FreeBSD para el usuario *genesis*, que es */home/genesis*).

El resultado gráfico preliminar se puede observar en la figura 4.

Aquí el valor de la *t* de Student fue de  $t=2.35$ , positiva y fuera del rango de aceptación de la hipótesis nula, por lo tanto aquí los estudiantes tuvieron un nivel de aprendizaje mayor, para la pregunta #1 del test, comparada con la obtenida con el grupo de control.

Con el objeto de ilustrar gráficamente el hecho de que en este caso la *t* de Student queda fuera del rango del valor límite  $\alpha/2$ , generamos la gráfica con refinamientos, empleando nuevamente la función que construimos a mano: *tstudent5()*.

El resultado de la gráfica lo podemos apreciar en la figura 5. Esta gráfica ya incluye los valores de aceptación de hipótesis nula límite conocidos como  $-\alpha/2$  y  $\alpha/2$ .

Ahora, como

$$t \notin [-\alpha/2, \alpha/2].$$

Es decir, *t* no pertenece al intervalo de aceptación, entonces aquí rechazamos la Hipótesis nula (aquí, la hipótesis nula versaría  $H_0$ : *No existe diferencia alguna en los conocimientos de los alumnos en respecto a la pregunta #1 del test, antes de aplicar la metodología del AAF y después de hacerlo*).

Por lo que podemos decir con tranquilidad, que vale la pena intentar una estrategia didáctica alterna como el Aprendizaje Activo de la Física, si se quieren obtener mejores resultados de aprendizaje en los alumnos.

Esta afirmación, fue verificada por los alumnos del grupo experimental de Orozco, al menos en lo concerniente a la pregunta #1 del test de Nguyen y Meltzer.

```
> tstudent5(tt.al.exp.1, "GpoExp.png")
> title(main= "Grupo Experimental. Postest vs.
Pretest")
> dev.off()
```

Aún nos faltaría para cerrar este análisis estadístico, formar la gráfica *t* de Student, comparando ahora, los resultados de aprendizaje obtenidos con el AAF contra los

obtenidos con el método tradicional de aprendizaje, al menos, para esta misma pregunta del test. Así tendremos otro referente estadístico del AAF.

Entonces procedemos a realizar la gráfica normal de la *t* de Student con el paquete NCStats y la función *plot* sin modificar. Los comandos de R, son en este caso

```
> png(file="experimentalVsControl.png")
> plot(tt.al.pos.1)
> dev.off()
```

Para explicarlo: Primero abrimos el controlador gráfico de los archivos *png*, con la primer instrucción y le damos el nombre de *experimentalVsControl.png* al archivo de salida con el parámetro *file* de la función *png()*. Posteriormente graficamos el análisis de la *t* de Student guardada en la variable de objeto llamada *tt.al.pos.1*. La última de las instrucciones sirve para *cerrar* el archivo de salida de R, que en este caso es el archivo *experimentalVsControl.png* que contiene la gráfica generada en el directorio de trabajo de FreeBSD llamado */home/genesis*. Después la podemos incluir en otro documento, como el presente.

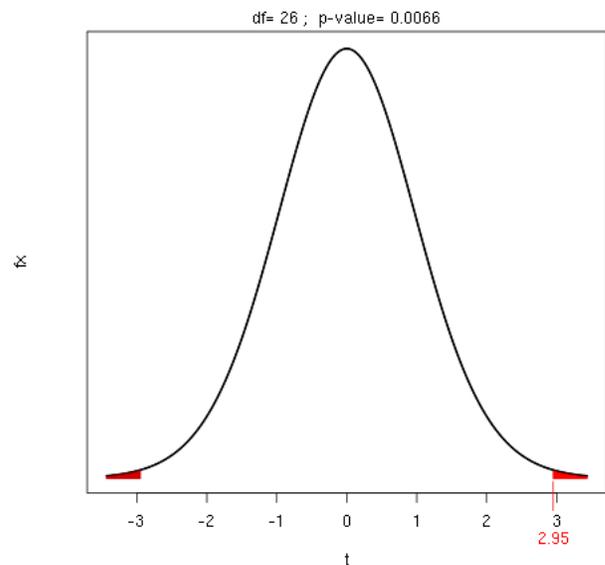


FIGURA 4. Gráfica *t* de Student para el grupo de control.

El resultado de la gráfica para comparar el AAF con la enseñanza tradicional para la pregunta #1 del test, se muestra en la figura 6.

Para refinar más nuestros resultados gráficos debemos de emplear la función que escribimos como *tstudent5()*, pues nos permite escribir

```
> tstudent5(tt.al.pos.1, "Postest.png")
> title(main= "Gpo Experimental vs. Control
(Postest)")
> dev.off()
```

Después de usar nuestra función agregamos un título principal a nuestra gráfica: *Gpo Experimental vs. Control (Postest)*, con el comando *title()* y su argumento *main*. Después volvemos a cerrar el dispositivo gráfico con *dev.off()* y tendremos el archivo gráfico *Postest.png*, generado por R en nuestro directorio de trabajo para FreeBSD /home/genesis.

El resultado gráfico ya mejorado, se muestra en la figura 7. Y muestra los valores límites de  $-\alpha/2$  y  $\alpha/2$ .

Como en este caso la *t* cae en el intervalo de aceptación de hipótesis nula  $H_0$ : *No hay una diferencia notable en el nivel de conocimientos adquiridos por los alumnos entre emplear AAF y la enseñanza tradicional, al menos con respecto a la pregunta #1 del test de Nguyen y Meltzer.*

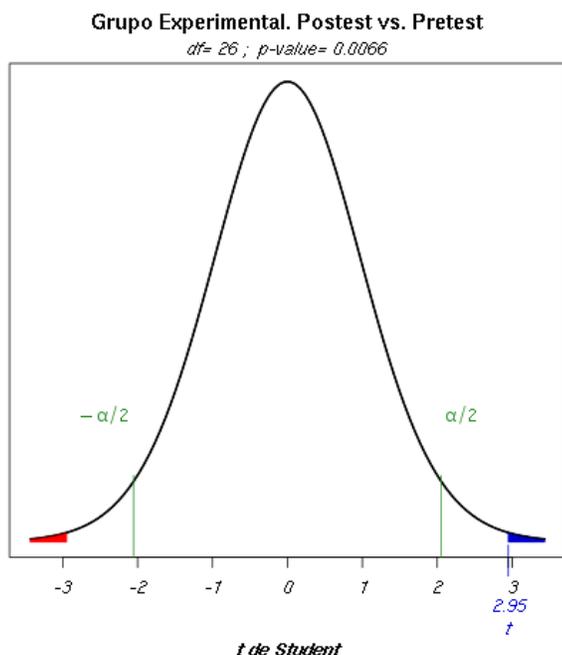


FIGURA 5. Gráfica comparativa para la *t* de Student del grupo experimental de Orozco.

Expresado matemáticamente:

$$t \in [-\alpha/2, \alpha/2].$$

Y aquí no notamos alguna diferencia que sea significativa entre el nivel de aprendizaje de los alumnos del grupo de experimental contra los alumnos del grupo de control. A pesar, de esto, por los resultados de las gráficas anteriores, podemos concluir que el AAF es mejor en general que la metodología usada en la enseñanza tradicional.

## VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos mostrado como el Aprendizaje Activo de la Física (AAF) puede alcanzar resultados de *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 8, No. 3, Sept. 2014*

aprendizaje en los alumnos bastante buenos. Para esto, se utilizaron los resultados obtenidos por José Orozco Martínez en sus grupos [9] del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 11 *Wilfrido Massieu*, del Instituto Politécnico Nacional en la ciudad de México. Orozco utiliza el AAF combinado con la asistencia del teléfono celular, para realizar la prueba.

En su grupo de control utilizó la metodología de la enseñanza tradicional, y en su grupo de control utilizó AAF. Se usó el test de Nguyen y Meltzer [20] para el aprendizaje de los conceptos de vectores y suma vectorial.

En este trabajo, utilizamos sólo los resultados obtenidos en la pregunta #1 de este test, para darnos una idea de las ventajas que podemos obtener en el aprendizaje de los alumnos, si utilizamos AAF.

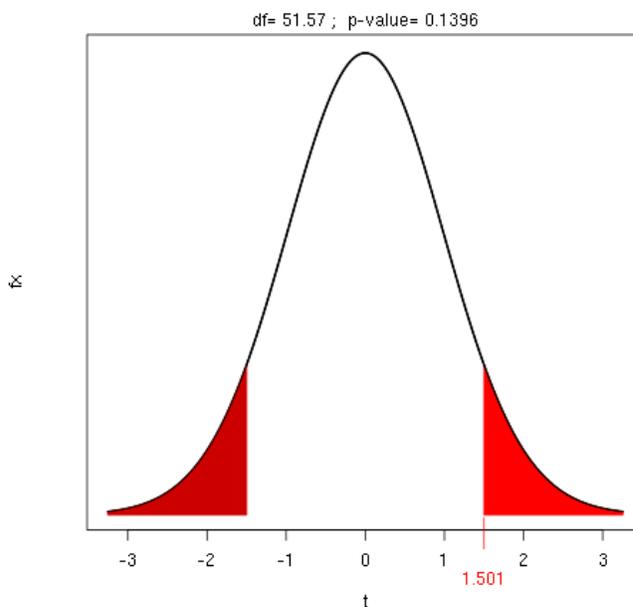
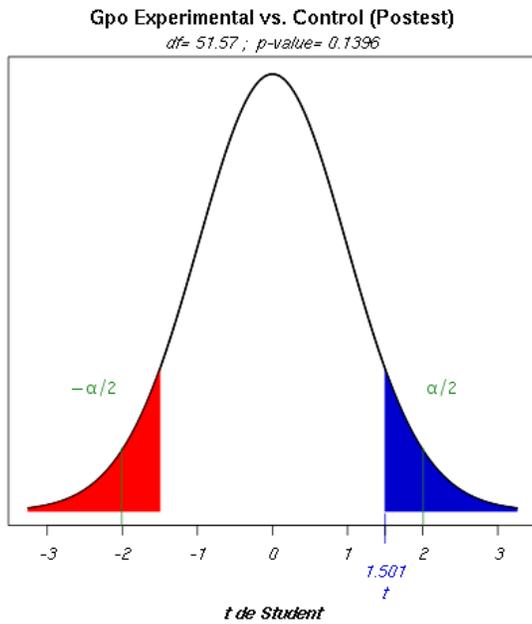


FIGURA 6. Gráfica *t* de Student del grupo experimental vs. el grupo de control.

Después de realizar el análisis estadístico de la *t* de Student en los resultados de Orozco para la primer pregunta, se encontró que los alumnos del grupo de control casi no obtuvieron un conocimiento insatisfactorio del concepto de magnitud vectorial, que es de lo que trata la primer pregunta del test de Nguyen y Meltzer [20].

Sin embargo, los alumnos en el grupo experimental que usaron la AAF para aprender el mismo concepto, si obtuvieron un nivel de conocimiento bastante satisfactorio como lo muestra su análisis de la *t* de Student: Postest vs. Pretest del grupo de control.

Esto, nos mostró en suma, las ventajas de utilizar AAF en lugar de la enseñanza tradicional.



**FIGURA 7.** Gráfica comparativa de la  $t$  de Student, para comparar el nivel de aprendizaje obtenido con la AAF con respecto a la enseñanza tradicional. Se compara el grupo de experimental contra el de control de Orozco.

## IX. AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer el apoyo recibido por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México, en la realización del presente trabajo. Así mismo, quieren también reiterar su agradecimiento a la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional de la ciudad de México por el apoyo recibido en la elaboración de este trabajo, por medio del proyecto SIP20131706.

## REFERENCIAS

[1] Laws, P. W., *Workshop Physics, Activity Guide, Module 2, Mechanics II, The Physics Suite*, (John Wiley & Sons Inc., Estados Unidos, 2004).

[2] Sokoloff, D. R., Thornton, R. K., Laws, P. W., *RealTime Physics, Learning Laboratories, Module 1, Mechanics, The Physics Suite*, (John Wiley & Sons, Inc., Estados Unidos, 2004).

[3] Sokoloff, D. R., Thornton, R. K., Laws, P. W., *RealTime Physics, Active Learning Laboratories, Module 3, Electric Circuits, The Physics Suite*, (John Wiley & Sons, Inc., Estados Unidos, 2004).

[4] Sokoloff, D. R., Thornton, R. K., Laws, P. W., *RealTime Physics, Active Learning Laboratories, Module 4, Light and Optics, The Physics Suite*, (John Wiley & Sons, Inc., Estados Unidos, 2004).

[5] Sokoloff, D. R., Thornton, R. K., *Learning motion concepts using real-time microcomputer-based laboratory tools*, Am. J. Phys. **58**, 858-867 (1990).

[6] Sokoloff, D. R., Thornton, R. K., *Using Interactive Lecture Demonstrations to Create an Active Learning Environment*, The Physics Teacher **35**, 340-347 (1997).

[7] Sokoloff, D. R., Thornton, R. K., *Assessing student learning of Newton's laws: The Force and Motion Conceptual Evaluation of Active Laboratory and Lecture Curricula*, Am. J. Phys. **66**, 338-352 (1998).

[8] Sokoloff, D. R., Thornton, R. K., *Interactive Lecture Demonstrations, Active Learning in Introductory Physics, The Physics Suite*, (John Wiley & Sons, Inc., Estados Unidos, 2006).

[9] Orozco Martínez, J., *El teléfono celular como recurso didáctico en el Álgebra Vectorial para la Física en el nivel Medio Superior*. (Tesis de Maestría en Física Educativa). Disponible en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Legaria. México, D. F., (2012).

[10] *The R project for Statistical Computing* <<http://www.r-project.org>>, consultado el 26 de agosto de 2013.

[11] *The Comprehensive R Archive Network* <<http://cran.itam.mx/>>, consultado el 26 de agosto de 2013.

[12] Krafft, M. F., *The Debian System*, (No Starch Press, San Francisco, 2005).

[13] Shotts, Jr., W. E., *The Linux Command Line*, (No Starch Press, San Francisco, 2012).

[14] Lucas, M. W., *Absolute FreeBSD, 2nd Edition*, (No Starch Press, San Francisco, 2008).

[15] Lavigne, D., *The Best of FreeBSD Basics*, (Reed Media Services, Estados Unidos, 2007).

[16] *NCStats - Functions to support learning in Northland College statistics courses* <<http://www.rforge.net/NCStats>>, consultada el 26 de agosto de 2013.

[17] *Northland College* <<http://www.northland.edu>>, consultada el 26 de agosto de 2013.

[18] Albert, J., Rizzo, M., *R by Example (Use R!)*, (Springer Verlag, Estados Unidos, 2011).

[19] Spector, P., *Data manipulation with R (Use R!)*, (Springer Verlag, Estados Unidos, 2008).

[20] Nguyen, N. L., Meltzer, D. E., *Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics courses*, Am. J. Phys., **71**, 630-638 (2003).

[21] Chambers, J. M., *Software for Data Analysis: Programming with R (Statistics and Computing)*, (Springer Verlag, Estados Unidos, 2009).

[22] Yau, C., *R tutorial with Bayesian Statistics Using OpenBUGS*. California, (Amazon Digital Services, Inc., California, 2013).

[23] Matloff, N., *The Art of R Programming: A Tour of Statistical Software Design*. (No Starch Press, San Francisco, 2011).

[24] Teetor, P., *25 Recipes for Getting Started with R*, (O'Reilly Media, Inc., Estados Unidos, 2011).

[25] Teetor, P., *R Cookbook*, (O'Reilly Media, Inc., Estados Unidos, 2011).

[26] Verzani, J., *Getting Started with RStudio*, (O'Reilly Media, Inc., Estados Unidos, 2011).

[27] Adler, J., *R in a Nutshell*, (O'Reilly Media, Inc., Estados Unidos, 2010).