Amplificación Láser y Matemáticas Básicas: Una guía pedagógica

Vicente Aboites
Centro de Investigaciones en Óptica, Loma del Bosque 115, Col. Campestre, León, Gto., C.P. 37150, México.

E-mail: aboites@cio.mx

(Recibido el 21 de febrero de 2017; aceptado el 22 de agosto de 2017)

Resumen

Se presenta el material empleado en un curso de Calculo Diferencial e Integral de nivel medio superior o primer semestre universitario, para discutir el proceso de amplificación en un láser. Esta es una guía pedagógica que pretende auxiliar a profesores de matemáticas proporcionándoles un ejemplo de indiscutible relevancia científica-tecnológica. A pesar de que el láser fue descubierto hace más de medio siglo es notable la ausencia de material pedagógico sobre este tema útil desde nivel medio superior. Esto es más incomprensible considerando que los alumnos que han llevado un buen curso de Cálculo a este nivel pueden, sin problema y con el apoyo de su maestro, realizar el análisis aquí mostrado. Se analiza el proceso de amplificación con saturación y umbral. Se enfatiza la importancia del análisis físico de las expresiones matemáticas. Finalmente se calcula a partir de resultados experimentales previamente reportados el coeficiente de ganancia de pequeña señal de un láser de nitrógeno.

Palabras clave: Amplificadores láser, amplificadores, pedagogía de la ciencia.

Abstract

The material used in a High School level Differential and Integral Calculus course, or first semester university level course, is applied to discuss the process of amplification in a laser. This is a pedagogical guide that may help mathematics teachers providing them an example of great scientific-technological relevance. Even though the laser was discovered more than half a century ago is remarkable the absence of pedagogical resources on this subject useful at high school level. This is even more significant considering that any student who has studied a serious Calculus course at this level can, without a problem and with the assistance of his teacher, carry out the analysis here presented. The amplification process in a laser media with saturation and threshold is studied. The physical interpretation of mathematical expression is emphasized. Finally based on previously reported experimental results the small signal gain of a nitrogen laser is obtained.

Keywords: Laser amplifiers, amplifiers, science teaching

PACS: 01.40.E-, 01.40.ek, 01.50.–i, 42.55.Ah, 42.60.Da **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

A pesar de que la acción de amplificación de luz por emisión estimulada fue descubierta hace más de medio siglo [1, 2, 3, 4, 5] y Maiman [6, 7, 8] construyó el primer láser en 1960, es notable la ausencia de material pedagógico sobre este tema útil para alumnos de nivel medio superior o primer semestre universitario. Esto es más incomprensible aun considerando que los estudiantes que han llevado un curso de Cálculo Diferencial e Integral a este nivel tienen la herramienta matemática necesaria para comprender el proceso de amplificación de radiación óptica en un láser. La experiencia del autor en este sentido es que el análisis del proceso de amplificación en un láser por alumnos de nivel medio superior utilizando sus conocimientos de Calculo, contribuye de modo notable a despertar su interés por este problema científico así como por las innumerables aplicaciones tecnológicas y de ingeniería que de allí se derivan.

Este artículo pretende contribuir a atender esta ausencia analizando, con la herramienta del cálculo diferencial e integral, el proceso de amplificación en un medio láser aplicando los resultados obtenidos al caso de amplificadores láser de nitrógeno con objeto de determinar el coeficiente de amplificación de pequeña señal del medio activo. Se eligió éste láser debido a su relativa simplicidad experimental y bajo costo, además de que existen publicados numerosos artículos que pueden servir como base para aplicar los resultados aquí obtenidos. Hay artículos que describen la construcción de láseres de nitrógeno, pero sin ahondar en la física del proceso de amplificación [9, 10, 11, 12, 13]. Por otra parte, artículos que describen sistemas oscilador-amplificador omiten discutir la física-matemática básica del proceso de

amplificación [14, 15, 16,17]. Un artículo describe la simulación electrónica del proceso de amplificación con fines didácticos [18] y otros trabajos describen en detalle la física de los láseres de nitrógeno [19] o la física general de los láseres [20]. Todos estos artículos son interesantes pero no están dirigidos a estudiantes de nivel medio superior.

En este artículo, en la sección 2 se describen los conceptos básicos del proceso de amplificación láser considerando los casos de un medio activo con: *i*) amplificación exponencial, *ii*) saturación, *iii*) umbral, y *iv*) saturación y umbral. En la sección 3 se describe un sistema de amplificación láser formado por un oscilador y un amplificador láser de nitrógeno y aplicando los resultados de la sección 2 se obtiene el coeficiente de pequeña señal del medio. Finalmente en la sección 4 se presentan las conclusiones.

II. AMPLIFICACION OPTICA

A. Interacción entre fotones y átomos

Los procesos básicos de interacción entre radiación y materia son: i) absorción, ii) emisión espontánea y, iii) emisión estimulada. En su nivel más elemental la luz está compuesta por fotones o cuantos de energía, y la materia por átomos y moléculas. La figura 1 muestra esquemáticamente los tres procesos anteriores y su representación. Cada átomo consta de dos niveles energéticos, el nivel superior E_2 y el nivel inferior E_1 y los fotones participantes son llamados "resonantes" puesto que su energía es exactamente igual a la diferencia $E_2 - E_1$. En el proceso de absorción se tiene un fotón interactuando con un átomo inicialmente en su estado energético inferior E_1, como resultado el átomo absorbe la energía del fotón y pasa al estado superior E_2. En el proceso de emisión espontánea un átomo se encuentra inicialmente en el estado energético superior E_2 y después de un tiempo de $5\tau_R$ hay un 99% de probabilidad de que el átomo pase al estado energético inferior E_1 emitiendo un fotón resonante en el proceso; la constante τ_R se conoce como "constante de tiempo de decaimiento radiactivo". El proceso de amplificación estimulada fue propuesto por Einstein en 1917 [1], en este caso se tiene la interacción entre un fotón resonante y un átomo inicialmente en su estado energético superior E_2, el resultado del proceso es que el átomo pasa a su estado energético inferior E_1 y se emiten dos fotones resonantes en el proceso, uno debido a la diferencia de energía entre los niveles atómicos superior e inferior y otro, el fotón inicial. A diferencia del proceso de emisión espontánea en donde los fotones emitidos por cada átomo no tienen ninguna sincronización temporal y son emitidos en todas direcciones, en el proceso de emisión espontánea los fotones emitidos conservan la misma fase y dirección que el fotón inicial.

En un grupo de N átomos en los cuales N_1 están en el estado energético inferior y N_2 en el estado energético superior, la diferencia $N_2 - N_1$ se conoce como *inversión de población*. Es claro que si $N_2 > N_1$ la inversión de población es positiva, mientras que si $N_2 < N_1$ la inversión de población es negativa. Para tener amplificación láser es fundamental que la inversión de población sea positiva pues en caso contrario habrá absorción de fotones.

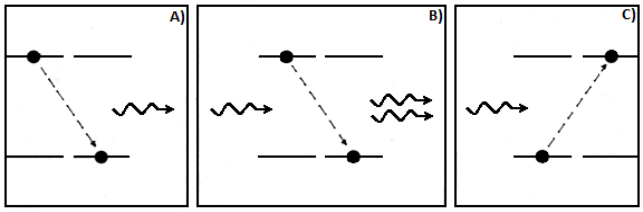

FIGURA 1. Representación esquemática de los procesos básicos de interacción entre fotones y átomos (centros activos): a) emisión espontánea, b) emisión estimulada, y c) absorción.

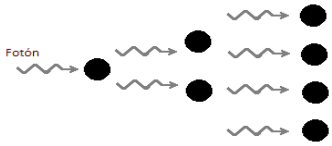

FIGURA 2. Representación del proceso de multiplicación fotónica por medio del proceso de amplificación estimulada. Los puntos representan átomos o moléculas inicialmente excitados y las líneas curvas fotones.

Si pensamos en un conjunto de átomos todos ellos en el nivel superior N_2, podemos ver que con un solo fotón incidente en alguno de esos átomos tendremos como resultado y debido al proceso de amplificación estimulada, dos fotones. En condiciones apropiadas cada uno de esos fotones puede repetir el proceso de amplificación estimulada dando como resultado un total de cuatro fotones, cada uno de estos cuatro fotones puede por el mismo proceso producir ocho fotones, etcétera. El proceso de amplificación estimulada es tremendamente eficiente para la multiplicación fotónica. Podemos ver que después de repetir este proceso n veces el número de fotones obtenidos es 2^n. De este modo tenemos: $2^0 = 1$ fotón, $2^2 = 4$ fotones, $2^3 = 8$ fotones, $2^4 = 16$ fotones, etcétera. Esto se muestra esquemáticamente en la Figura 2. Después de repetir este proceso 50 veces obtendremos 2^{50} fotones que es aproximadamente 10^{15} que es un número muy grande, sin embargo en realidad es pequeño comparado con el número de átomos que típicamente se encuentran en un láser, pues ahí no encontramos 50 átomos sino del orden de un mol de átomos, que es (recordando el número de Avogadro): 6.023 x 10^{23} partículas. Podemos ver que el proceso de amplificación estimulada en la naturaleza es extraordinariamente eficiente.

En matemáticas la función 2^n es un caso particular de una función exponencial. Como sabemos, estas funciones tienen la forma:

$$f(x) = b^x. \tag{1}$$

En donde b es una constante. La característica más importante de la función exponencial es que su derivada es proporcional al valor mismo de la función. Es decir:

$$\frac{d}{dx}b^x = \frac{d}{dx}\exp(x\ln b) = \exp(x\ln b)\cdot\frac{d}{dx}(x\ln b). \quad (2)$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x \cdot \ln b. \quad (3)$$

Matemáticamente la situación más sencilla de manejar se obtiene cuando la constante ln b es igual a 1; *i.e.* ln $b = 1$, lo cual ocurre cuando, $b = e$. Donde e es la constante de Euler $e \approx 2.718281828459045\ldots$ Por tanto escribiendo la función exponencial como:

$$f(x) = e^x. \quad (4)$$

Obtenemos el conocido resultado:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x. \quad (5)$$

B. Crecimiento Exponencial

La física, biología y economía entre otras disciplinas, proporcionan algunos de los mejores ejemplos de crecimiento exponencial observado en el mundo real. Como vimos en la sección anterior, la característica más importante de la ecuación que describe estos fenómenos es que la razón de cambio (la derivada) de una cantidad dada es directamente proporcional al valor de esa misma cantidad. Por ejemplo, en biología el crecimiento del número de bacterias en un cultivo $x(t)$ en el tiempo *i.e.* $dx(t)/dt$, se encuentra que con mucha aproximación es proporcional a la cantidad de bacterias que hay en un instante dado $x(t)$. Es decir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = K\,x(t). \quad (6)$$

En donde K es la constante de proporcionalidad. Si la cantidad de bacterias inicial en el cultivo es $x(0)$ al tiempo $t = 0$, entonces por integración directa de la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{dx}{x} = K\,dt, \quad (7)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_0^t K\,dt, \quad (8)$$

$$\ln\frac{x(t)}{x(0)} = K\,t, \quad (9)$$

Por tanto:

$$x(t) = x(0)\,e^{Kt}. \quad (10)$$

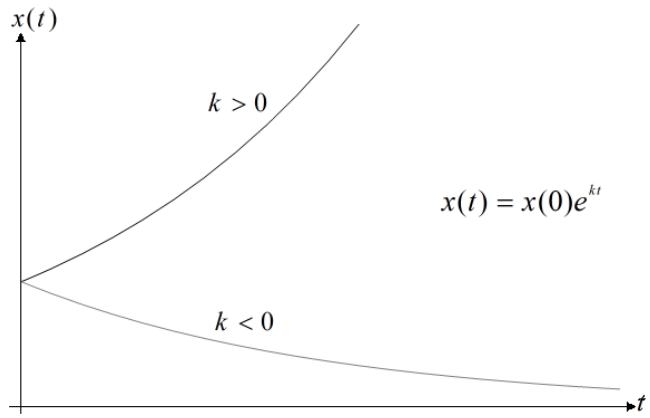

FIGURA 3. Solución de la ecuación exponencial para coeficiente K > 0 (crecimiento) y K < 0 (decrecimiento).

Si la constante de proporcionalidad es positiva la ecuación anterior describe un <u>crecimiento</u> exponencial de la población y en el límite cuando $t \to \infty$, la población $x(t)$ crece ilimitadamente $x(\infty) = \infty$, mientras que si la constante de proporcionalidad es negativa entonces se describe un <u>decrecimiento</u>, en este caso cuando $t \to \infty$, la población se extingue y se obtiene $x(\infty) = 0$. Esto se muestra en la figura 3. Es interesante saber que la ecuación exponencial y su solución se encuentran en muchos fenómenos de la naturaleza. Algunos ejemplos notables entre muchos, son los siguientes:

i) El voltaje de carga en un capacitor al ser cargado por una batería
ii) La corriente de descarga de un capacitor a través de una resistencia
iii) Las reacciones nucleares en cadena
iv) El decaimiento radioactivo de un isótopo
v) El crecimiento de la población humana
vi) La infección por un virus en una población no inmunizada
vii) El crecimiento económico de un país
viii) La amplificación de la luz en un amplificador láser

C. Física Básica de la Amplificación Láser

En un amplificador óptico el incremento en la intensidad por unidad de longitud dI/dz se describe por medio de la ecuación exponencial [18]:

$$\frac{dI}{dz} = \alpha I. \quad (11)$$

Como se ha señalado, esta ecuación físicamente establece que la razón de cambio de la intensidad *dI/dz* (el incremento de *I* a lo largo del eje espacial *z*) es directamente proporcional al valor de la intensidad *I*. Claramente esta ecuación describe un proceso de amplificación exponencial en donde α se conoce como *coeficiente de amplificación*, *coeficiente de ganancia sin saturación" o "coeficiente de ganancia de pequeña señal*, por unidad de longitud. Este coeficiente para átomos con niveles energéticos superior e inferior E_2 y E_1 está dado por la expresión:

$$\alpha = [N_2 - N_1]\,\sigma, \tag{12}$$

en donde N_2, N_1 son las densidades de inversión de población de los niveles superior e inferior y σ la sección transversal de emisión estimulada dada por:

$$\sigma = \frac{c^2}{8\pi n^2 f^2 \tau_R} g(f), \tag{13}$$

donde *c, n, f, g*(*f*) y τ_R son, la velocidad de la luz, el índice de refracción, la frecuencia de la luz láser, la función de forma de onda y el tiempo de vida radiactivo de la transición láser. La función de la forma de onda *g*(*f*) puede tener una forma Lorenziana o Gaussiana y es típico que en cada láser una sea la forma dominante. La función *g*(*f*) toma en cuenta el hecho de que en la realidad no todos los fotones obtenidos en el proceso de emisión estimulada son fotones resonantes, sino que aunque la mayoría de éstos tienen una frecuencia central f_0 (la frecuencia *nominal* de emisión láser) siempre habrá algunos fotones que tienen frecuencias ligeramente mayores o menores que f_0. En los láseres en donde el medio activo es un sólido (*e.g.* en láseres de Rubí o de Neodimio) la función de la forma de onda *g*(*f*) es Lorenziana, mientras que en los láseres en donde el medio activo es un gas (*e.g.* en láseres de Nitrógeno o Bioxido de Carbono) la función de forma de onda *g*(*f*) es Gaussiana. La Figura 4 muestra cualitativamente las funciones Lorenziana y Gaussiana.

En un amplificador láser en el régimen de pequeña señal, para una intensidad inicial *I*(0) en *z* = 0, la intensidad se incrementará dentro del medio amplificador láser a lo largo de su propagación en *z*, como se describe por la ecuación (11). Esta ecuación puede ser integrada como se mostró en la sección anterior y se obtiene la solución:

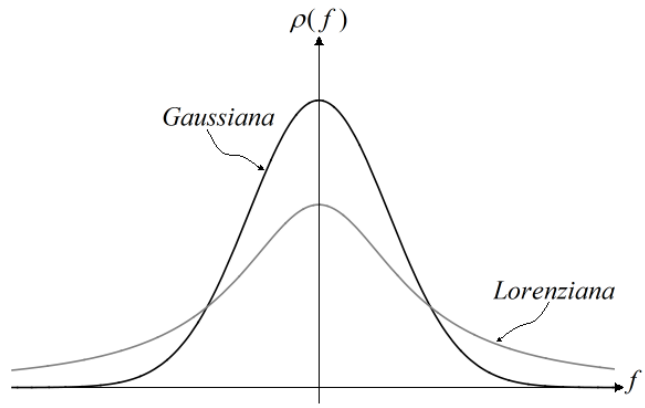

FIGURA 4. Función Gaussiana y Lorenziana.

$$I(z) = I(0)\,e^{\alpha z}. \tag{14}$$

Es claro que si el coeficiente de amplificación *α* es positivo se tendrá amplificación de la intensidad mientras que si es negativo se tendrá absorción. Si el término *αz* es pequeño éste puede expandirse usando la relación:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \tag{15}$$

Tomando los dos primeros términos de esta expresión obtenemos de la ecuación (14):

$$I(z) = I(0)\,[I + \alpha z]. \tag{16}$$

Esta expresión describe a la función *I*(*z*) como una relación lineal de la forma *y* = *mx* + *b*, con pendiente *m* = *I*(*0*)*α,* y abscisa *b* = *I*(*0*). Podemos ver que la solución exacta de la ecuación (11) dada por la ecuación (14) difiere significativamente de la aproximación obtenida con la ecuación (16), pues en (14) la intensidad *I*(*z*) crece de modo exponencial con la distancia *z* mientras que en (16) la intensidad *I*(*z*) se incrementa de modo lineal con la distancia *z*. Físicamente la solución exacta (14) es irreal pues ningún amplificador láser real amplifica indefinidamente una señal inicial *I*(*0*). Por otra parte la solución aproximada (16) también es irreal pues ésta solo es válida cerca de *z* = 0, para distancias de amplificación e intensidades láser pequeñas. Resumiendo, la solución exacta (14) es irreal pues sobre-estima el valor de intensidad mientras que la solución lineal aproximada (16) es también irreal pues sub-estima el valor de intensidad.

III. AMPLIFICACIÓN LASER CON SATURACIÓN

Suponer como en la sección anterior que el coeficiente de amplificación *α* es una constante, es válido solo si se manejan valores de intensidad *I*(*z*) pequeños (de ahí el nombre de *coeficiente de amplificación de pequeña señal*). En la práctica se observa que conforme la intensidad *I*(*z*) aumenta, la capacidad de amplificación del medio

disminuye hasta llegar al punto en que el medio prácticamente ya no amplifica la señal y entonces decimos que el medio activo ha alcanzado saturación. El coeficiente de ganancia de saturación α_s para láseres con ensanchamiento de línea homogéneo (típico de láseres de estado sólido o líquido, como el Rubí, Neodímio o Rodamina) viene dado por [20]:

$$\alpha_s = \frac{\alpha}{1+(I/I_s)}, \tag{17}$$

y para láseres con ensanchamiento de línea inhomogéneo (típico de láseres de gas, como el de Nitrógeno o Bióxido de Carbono), está dado por [18]:

$$\alpha_s = \frac{\alpha}{\left[1+(I/I_s)\right]^{1/2}}. \tag{18}$$

Es importante subrayar que mientras que el coeficiente de ganancia de pequeña señal α es una constante, el coeficiente de ganancia de saturación α_s es una función de la intensidad, i.e. $\alpha_s = \alpha_s(I)$. En las ecuaciones (17) y (18), I_s es la intensidad de saturación, es decir, es el valor de intensidad I al cual el coeficiente de ganancia α_s disminuye a un valor, $\alpha/2$ para láseres con ensanchamiento homogéneo o, $\alpha/\sqrt{2}$ para láseres con ensanchamiento inhomogéneo. En las ecuaciones (17) y (18) podemos ver que con $I << I_s$, $\alpha_s = \alpha$.

La ecuación que describe la amplificación láser tomando en cuenta el efecto de saturación es:

$$\frac{dI}{dz} = \alpha_s I. \tag{19}$$

Sustituyendo el coeficiente de ganancia de saturación homogéneo (2.3.1-17) en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{dI}{dz} = \left(\frac{\alpha}{1+\frac{I}{I_s}}\right) I. \tag{20}$$

Esta ecuación puede ser escrita como:

$$\frac{dI}{dz} = \alpha\left(1+\frac{I}{I_s}\right)^{-1} I. \tag{21}$$

Utilizando la expresión para el Binomio de Newton:

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n(n+1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots \tag{22}$$

Se puede desarrollar el binomio de la expresión (21) conservando los dos primeros términos para obtener:

$$\left(1+\frac{I}{I_s}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{I}{I_s}, \tag{23}$$

Sustituyendo en la expresión (2.3.5) obtenemos:

$$\frac{dI}{dz} = \alpha I - \frac{\alpha}{I_s} I^2, \tag{24}$$

Esta ecuación se conoce como ecuación logística o de Verhulst y será resuelta en la siguiente sección. Antes de esto analizaremos la derivada *dI/dz* -el lado derecho de la ecuación (24)- que representa una función *f*(*I*) dada por:

$$f(I) = \alpha I - \frac{\alpha}{I_s} I^2. \tag{25}$$

Este análisis es muy importante pues veremos que la información que obtendremos de *f*(*I*), ec. (25), es fundamentalmente la misma que la obtenida a partir de la solución de (24).

A. Analisis of *f*(*I*)

El análisis de la función *f*(*I*) es muy importante pues muestra cómo varía la derivada de *I* respecto a *z* (lado izquierdo de la ecuación (24)). Esta expresión contiene de modo resumido toda la física y comportamiento del amplificador.

i) Puntos estables de *f*(*I*)

Estos puntos son los valores de *I* en donde *f*(*I*) = *0*. Es decir:

$$\alpha I - \frac{\alpha}{I_s} I^2 = 0. \tag{26}$$

Esta es una ecuación algebraica cuadrática para *I* con las soluciones:

$$I_1 = 0, \tag{27}$$

$$I_2 = I_{sat}. \tag{28}$$

ii) Punto crítico de *f*(*I*)

El primer criterio de la derivada permite determinar los puntos críticos de una función, estos son aquellos en donde la función tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión y allí la derivada de la función es cero. Por tanto:

$$\frac{df(I)}{dI} = \frac{d}{dI}\left(\alpha I - \frac{\alpha}{I_{sat}} I^2\right) = 0, \tag{29}$$

$$\alpha - \frac{2\alpha}{I_{sat}} I = 0. \tag{30}$$

Por tanto la función $f(I)$ tiene un solo punto crítico I_{cr}, que es:

$$I_{cr} = \frac{I_{sat}}{2}. \tag{31}$$

iii) Criterio de la segunda derivada

Para determinar si un punto crítico es un máximo o un mínimo se aplica el segundo criterio de la derivada. Tomando la derivada de la primera derivada de $f(I)$ obtenemos:

$$\frac{d}{dI}\left(\alpha - \frac{2\alpha}{I_{sat}} I\right) = -\frac{2\alpha}{I_{sat}} < 0 \Rightarrow Máximo. \tag{32}$$

Por tanto la función $f(I)$ tiene en el punto crítico I_{cr} un máximo. El valor máximo de $f(I)$ en el punto crítico se obtiene sustituyendo I_{cr} en $f(I)$.

$$f(I_{cr}) = f\left(\frac{I_{sat}}{2}\right) = \alpha\frac{I_{sat}}{2} - \frac{\alpha}{I_s}\frac{I_{sat}^2}{4} = \frac{\alpha I_{sat}}{4}, \tag{33}$$

Los resultados anteriores se muestran gráficamente en la figura 5. Se puede observar que la derivada dI/dz (el valor de $f(I)$) es cero tanto en $I = 0$ como en $I = I_{sat}$, estrictamente esto significa que en esas zonas la intensidad no se incrementa, mientras que en el valor $I = I_{sat}/2$ se obtiene el máximo valor de la derivada y por tanto el máximo incremento de la intensidad I por unidad de longitud z.

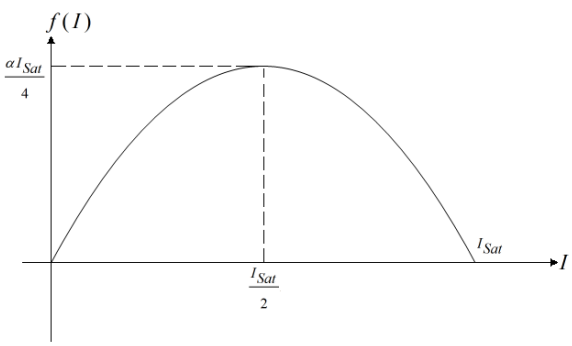

FIGURA 5. Grafica de la función $f(I)$, medio activo con saturación.

IV. SOLUCION DE LA ECUACION LOGISTICA

La solución de la ecuación logística (24) se obtiene por integración directa usando el método de fracciones parciales. La ecuación (24) se puede escribir como:

$$\frac{dI}{dz} = \alpha\left(I - \frac{I^2}{I_{sat}}\right), \tag{34}$$

que puede reescribirse como:

$$\frac{dI}{\left(1 - \frac{I}{I_{sat}}\right)I} = \alpha\, dz. \tag{35}$$

Reescribiendo en fracciones parciales el denominador del lado izquierdo se obtiene:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{I}{I_{sat}}\right)I} = \frac{A}{1 - \frac{I}{I_{sat}}} + \frac{B}{I}. \tag{36}$$

De donde se obtiene como solución para las constantes A y B los siguientes valores: $A = 1/I_{sat}$, $B = 1$. Sustituyendo en (35) e integrando se obtiene:

$$\int \frac{dI}{I_{sat}\left(1 - \frac{I}{I_{sat}}\right)} + \int \frac{dI}{I} = \int \alpha\, dz. \tag{37}$$

Usando la integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c. \tag{38}$$

Se obtiene:

$$-\ln|I_{sat} - 1| + \ln|I| = \alpha z + c.$$

Recordando las expresiones logarítmicas: $\ln M + \ln N = \ln(MN)$ y, $\ln M - \ln N = \ln(M/N)$, se obtiene:

$$\ln\left|\frac{I}{I_{sat} - I}\right| = \alpha z + c. \tag{39}$$

Por tanto:

$$\frac{I}{I_{sat} - I} = e^{\alpha z} \cdot e^{c}. \tag{40}$$

Usando la condición inicial $I(0) = I_0$, se obtiene:

$$e^{c} = \frac{I_0}{I_{sat} - I_0}. \tag{41}$$

Sustituyendo en la solución (40) se obtiene:

$$\frac{I}{I_{sat}-I}=\frac{I_0}{I_{sat}-I_0}e^{\alpha z}. \tag{42}$$

Simplificando esta expresión se llega a la solución final:

$$I=\frac{I_0 I_{sat}}{I_0+(I_{sat}-I_0)e^{-\alpha z}}. \tag{43}$$

De esta expresión podemos ver que cuando $z \approx 0$, se tiene que; $e^{-\alpha z} \approx 1$. Por tanto: $I = I_0$. Mientras que cuando $z \to \infty$, se tiene que $e^{-\alpha z} \approx 0$. Por tanto $I = I_{sat}$, que es el valor máximo al cual la radiación será amplificada. Estos son los resultados esperados cuando hay saturación en el amplificador láser. Esto se muestra en la Figura 6. Ahí mismo se puede apreciar que si el amplificador láser recibe radiación con intensidad mayor que I_{sat}, esta será absorbida y la intensidad decaerá al valor I_{sat}. En resumen: si el amplificador recibe radiación láser menor que I_{sat} esta será amplificada, mientras que si recibe radiación láser mayor que I_{sat} esta será atenuada. En ambos casos (si el amplificador tiene una longitud suficiente) la intensidad final será I_{sat}.

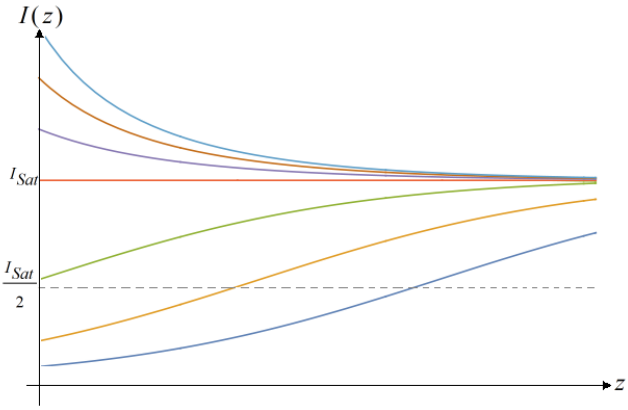

FIGURA 6. Intensidad láser en medio activo con saturación.

Con la solución (43) podemos responder a una pregunta de enorme importancia práctica que consiste es saber a qué distancia z a lo largo del amplificador láser la intensidad I se incrementa pasando de I_0, a $I_{sat}/2$. Debe ser claro que preguntar a qué distancia la intensidad se incrementa al valor I_{sat} no tiene sentido pues dado que la curva de I *vs* z es asintótica tendiendo a I_{sat} la respuesta sería infinito. Debido a esto se pregunta por la distancia z en que se alcanza el valor $I_{sat}/2$.

Sustituyendo en la ecuación (43) el valor $I = I_{sat}/2$, se obtiene:

$$\frac{I_{sat}}{2}=\frac{I_0 I_{sat}}{I_0+(I_{sat}-I_0)e^{-\alpha z}}. \tag{44}$$

Despejando para z se obtiene después de un poco de algebra:

$$z=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{I_{sat}-I_0}{I_0}\right). \tag{45}$$

Debe subrayarse que todos los resultados anteriores se obtuvieron para el caso de un medio activo con ensanchamiento de línea homogéneo (partiendo de la ecuación (17)) como el encontrado en láseres de estado sólido como el de Rubí o Neodimio. Sin embargo para un amplificador láser de medio activo con ensanchamiento inhomogéneo (partiendo de la ecuación (18)) como el encontrado en láseres de gas, los resultados solo cambian ligeramente. Podemos ver que para este último caso –inhomogéneo- el desarrollo del binomio de Newton (semejante al desarrollado en la ecuación (23)) apropiado para obtener la nueva ecuación logística ahora es el siguiente;

$$\left(1+\frac{I}{I_s}\right)^{-1/2}\approx 1-\frac{I}{2I_s}. \tag{46}$$

Por tanto la solución final (equivalente a la ecuación (43)) ahora es:

$$I=\frac{2I_0 I_{sat}}{I_0+(2I_{sat}-I_0)e^{-\alpha z}}. \tag{47}$$

En donde solamente se sustituyó I_s por $2I_s$. De modo similar la expresión (45) para un amplificador láser de medio activo con ensanchamiento inhomogeneo es:

$$z=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2I_{sat}-I_0}{I_0}\right). \tag{48}$$

V. NIVEL DE UMBRAL

En la naturaleza es frecuente encontrar situaciones en las que si no se tiene un nivel de umbral mínimo para una población dada, ésta decrecerá hasta extinguirse. Este caso se presenta igualmente con poblaciones biológicas que con los fotones en un medio láser. Como en seguida se mostrará esta situación se describe por medio de la ecuación siguiente:

$$\frac{dI}{dz}=-\alpha\left(I-\frac{I^2}{I_{umb}}\right). \tag{49}$$

Puede apreciarse que la ecuación anterior es muy semejante a la ecuación logística (34) excepto por el signo de α y la constante I_{umb}.

El lado derecho de la ecuación anterior está dado por la función $g(I)$.

$$g(I) = -\alpha I + \frac{\alpha}{I_{umb}} I^2. \tag{50}$$

Esta función es importante pues su comportamiento describe el comportamiento de la derivada *dI/dz* del lado izquierdo de la ecuación (49).

A. Análisis de *g*(*I*)

El análisis de la función *g*(*I*) es muy importante pues muestra cómo varía la derivada de *I* respecto a *z*.

i) Puntos estables de *g*(*I*)

Estos puntos son los valores de *I* en donde *g*(*I*) = *0*. Es decir:

$$-\alpha I + \frac{\alpha}{I_{umb}} I^2 = 0. \tag{51}$$

Esta es una ecuación algebraica cuadrática para *I* con las soluciones:

$$I_1 = 0, \tag{52}$$

$$I_2 = I_{umb}. \tag{53}$$

ii) Punto crítico de *g*(*I*)

El primer criterio de la derivada permite determinar los puntos críticos de una función, estos son aquellos en donde la función tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión y allí la derivada de la función es cero. Por tanto:

$$\frac{dg(I)}{dI} = \frac{d}{dI}\left(-\alpha I + \frac{\alpha}{I_{umb}} I^2\right) = 0, \tag{54}$$

$$-\alpha + \frac{2\alpha}{I_{sat}} I = 0. \tag{55}$$

Por tanto la función *g*(*I*) tiene un solo punto crítico I_{cr}, que es:

$$I_{cr} = \frac{I_{umb}}{2}. \tag{56}$$

iii) Criterio de la segunda derivada

Para determinar si un punto crítico es un máximo o un mínimo se aplica el segundo criterio de la derivada. Tomando la derivada, de la primera derivada de *g*(*I*) obtenemos:

$$\frac{d}{dI}\left(-\alpha + \frac{2\alpha}{I_{sat}} I\right) = \frac{2\alpha}{I_{sat}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Mínimo}. \tag{57}$$

Por tanto la función *g*(*I*) tiene en el punto crítico I_{cr} un mínimo. El valor mínimo de *f*(*I*) en el punto crítico se obtiene sustituyendo I_{cr} en *g*(*I*).

$$g(I_{cr}) = g\left(\frac{I_{sat}}{2}\right) = -\alpha \frac{I_{sat}}{2} + \frac{\alpha}{I_s}\frac{I_{sat}^2}{4} = -\frac{\alpha I_{sat}}{4}. \tag{58}$$

Los resultados anteriores se muestran gráficamente en la figura 7. Se puede observar que la derivada *dI/dz* (el valor de *g*(*I*)) es cero tanto en $I = 0$ como en $I = I_{umb}$, estrictamente esto significa que en esas zonas la intensidad no se incrementa y la pendiente de *I*(*z*) es cero en esos puntos, mientras que en el valor $I = I_{umb}/2$ se obtiene el mínimo valor de la derivada y por tanto el máximo decremento de la intensidad *I* por unidad de longitud *z*.

B. Solución de la ecuación para un medio activo con umbral

La ecuación (34) describe el caso de un medio láser con saturación y tiene como solución a la ecuación (43). Obtener la solución de la ecuación (49), la cual describe el caso de un medio láser con umbral, es sencillo sustituyendo α por –α, I_{sat} por I_{umb}, con la condición inicial $I(0) = I_0$. De este modo obtenemos la solución:

$$I = \frac{I_0 I_{umb}}{I_0 + (I_{umb} - I_0)e^{\alpha z}}. \tag{59}$$

De esta expresión podemos ver que cuando $z \approx 0$, se tiene que; $e^{\alpha z} \approx 1$. Por tanto: $I = I_0$. Mientras que cuando $z \to \infty$, se tiene que $e^{\alpha z} \to 0$. Por tanto $I \to 0$, lo cual implica que la radiación no será amplificada y finalmente será absorbida por el medio. Esto se muestra en la Figura 8. Ahí mismo se puede apreciar que si el amplificador láser recibe radiación con intensidad *mayor* que I_{umb}, esta será exponencialmente amplificada. En resumen: si el amplificador recibe radiación láser menor que I_{umb} esta será atenuada, mientras que si recibe radiación láser mayor que I_{umb} esta será amplificada.

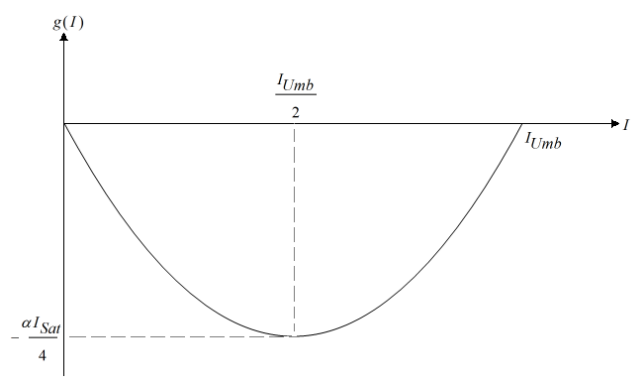

FIGURA 7. Grafica de la función *g*(*I*), medio activo con umbral.

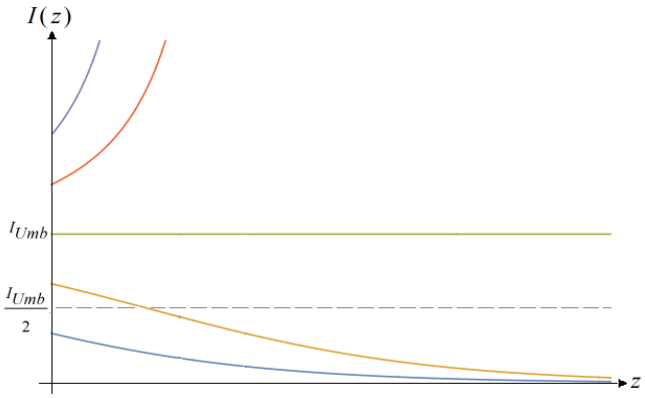

FIGURA 8. Intensidad láser en medio activo con umbral.

VI. MEDIO ACTIVO CON SATURACION Y UMBRAL

El modelo de un medio activo láser con umbral para amplificación puede ser modificado para incluir también el fenómeno de saturación. De este modo: i) Si $I < I_{umb}$ la radiación es absorbida y decae en el medio. ii) Si $I = I_{umb}$ la radiación se mantiene exactamente en este nivel a lo largo de su propagación, finalmente. iii) Si $I > I_{umb}$ la radiación será amplificada incluyendo el fenómeno de saturación; es decir que si la radiación incidente I es ligeramente mayor que I_{umb} la radiación será amplificada (como se ha explicado) inicialmente aproximadamente de modo exponencial hasta acercarse al valor de saturación I_{sat}. En este caso la ecuación diferencial que describe al medio activo es:

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha\left(1-\frac{I}{I_{umb}}\right)\left(1-\frac{I}{I_{sat}}\right)I. \tag{60}$$

En donde $\alpha > 0$ y $0 < I_{umb} < I_{sat}$. En seguida se presenta el análisis del comportamiento de la derivada dI/dz, (el lado derecho de la ecuación (60)) que designaremos por la función $h(I)$:

$$h(I) = -\alpha\left(1-\frac{I}{I_{umb}}\right)\left(1-\frac{I}{I_{sat}}\right)I. \tag{61}$$

A. Análisis de *h*(*I*)

El análisis de la función $h(I)$ es muy importante pues (de la ecuación (6)) muestra cómo varía la derivada de I respecto a z. Esta expresión describe en detalle el comportamiento físico del amplificador.

i) Puntos estables de $h(I)$

Estos puntos son los valores de I en donde $h(I) = 0$.

$$-\alpha\left(1-\frac{I}{I_{umb}}\right)\left(1-\frac{I}{I_{sat}}\right)I = 0. \tag{62}$$

Esta es una ecuación algebraica cúbica para I con las soluciones:

$$I_1 = 0, \tag{63}$$
$$I_2 = I_{umb}, \tag{64}$$
$$I_3 = I_{sat}. \tag{65}$$

ii) Puntos críticos de $h(I)$

El primer criterio de la derivada permite determinar los puntos críticos de una función, estos son aquellos en donde la función tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión y allí la derivada de la función es cero. Por tanto:

$$\frac{dh(I)}{dI} = \frac{d}{dI}\left[-\alpha\left(1-\frac{I}{I_{umb}}\right)\left(1-\frac{I}{I_{sat}}\right)I\right] = 0, \tag{66}$$

$$\frac{dh(I)}{dI} = 3I^2 - 2(I_{umb}+I_{sat})I + I_{umb}I_{sat}. \tag{67}$$

Dado que el lado derecho de la expresión (67) es una ecuación cuadrática, la función $h(I)$ tiene dos puntos críticos I_{cr}. La solución de esta ecuación es:

$$I_{cr} = \frac{\frac{2}{3}(I_{umb}+I_{sat}) \pm \sqrt{\frac{4}{9}(I_{umb}+I_{sat})^2 - \frac{4I_{umb}I_{sat}}{3}}}{2}. \tag{68}$$

Simplificando se obtiene:

$$I_{cr} = \frac{I_{umb}+I_{sat} \pm \sqrt{I_{umb}^2 + I_{sat}^2 - I_{umb}I_{sat}}}{3}. \tag{69}$$

Las dos soluciones I_{cr1} e I_{cr2}, se obtienen aplicando el signo + y – del radical.

iii) Criterio de la segunda derivada

Para determinar si un punto crítico es un máximo o un mínimo se aplica el segundo criterio de la derivada. Tomando la derivada, de la primera derivada de $h(I)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dI}\left(3I^2 - 2(I_{umb}+I_{sat})I + I_{umb}I_{sat}\right) &= \\ &= 6I - 2(I_{umb}+I_{sat}).\end{aligned} \tag{70}$$

Sustituyendo en esta expresión las soluciones I_{cr1} e I_{cr2} podemos determinar si hay un máximo o mínimo. La sustitución de I_{cr1} en la ecuación (2.3.1.9-70) resulta en:

$$2(I_{umb}+I_{sat})+2\sqrt{I_{umb}^2+I_{sat}^2-I_{umb}I_{sat}}-2(I_{umb}+I_{sat})= \\ =2\sqrt{I_{umb}^2+I_{sat}^2-I_{umb}I_{sat}}>0 \quad \Rightarrow \quad Mínimo. \tag{71}$$

En donde se asume que $I^2_{umb} + I^2_{sat} - I_{umb}I_{sat} > 0$ para garantizar que la raíz es real. La sustitución de I_{cr2} da como resultado:

$$2\sqrt{I_{umb}+I_{sat}-I_{umb}I_{sat}}<0 \quad \Rightarrow \quad Máximo. \tag{72}$$

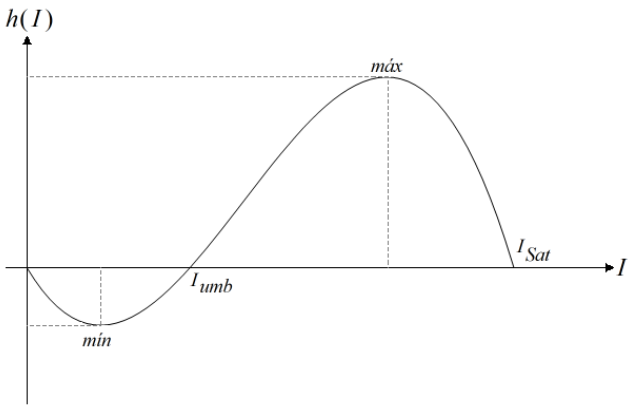

FIGURA 9. Gráfica de la función $h(I)$, medio activo con saturación y umbral.

Por tanto la función $h(I)$ tiene en el punto crítico I_{cr1} un mínimo y en I_{cr2} un máximo. La Figura 9 muestra estos resultados. Se puede observar que la función $h(I)$ es un polinomio cúbico con tres raíces $h(I) = 0$ que corresponden a los puntos de equilibrio $I = 0$, $I = I_{umb}$, $I = I_{sat}$. Es también claro que la derivada $dI/dz = h(I)$ es positiva para valores de I tales que $I_{umb} < I < I_{sat}$ y por tanto la derivada es creciente en esa región, esta es por tanto la región de amplificación láser óptima. Mientras que por otra parte, la derivada $dI/dz = h(I)$ es negativa para valores de I tales que $0 < I < I_{umb}$ así como para $I > I_{sat}$. La solución de la ecuación (60) es más complicada de obtener pero en realidad es innecesaria pues a partir del análisis de la función $h(I)$ anterior, resumido en la figura 9, podemos obtener la Figura 10 que representa la solución cualitativa esperada.

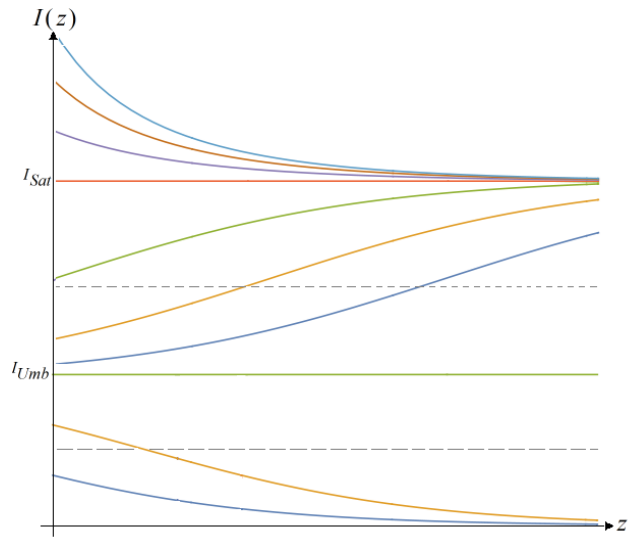

FIGURA 10. Intensidad láser en medio activo con saturación y umbral.

VII. SISTEMA LASER OSCILADOR-AMPLIFICADOR

En seguida se describen los resultados experimentales obtenidos con un sistema Oscilador-Amplificador conocido como MOPA (Master Oscillator Power Amplifier). Posteriormente estos resultados serán utilizados para obtener, utilizando los resultados analíticos obtenidos en las secciones anteriores, el coeficiente de amplificación de pequeña señal α del medio activo. Láseres que utilizan como medio activo la molécula de nitrógeno N_2 para fines didácticos han sido reportados en numerosas ocasiones pues son sencillos de construir y su física y características de operación son bien conocidas, estos láseres están ampliamente documentados [9-11, 19]. Algunos de los aspectos físicos más importantes de estos láseres son los siguientes: i) Las moléculas de nitrógeno son excitadas por los electrones de una descarga eléctrica pulsada, produciendo emisión principalmente en una banda centrada en una longitud de onda de 337.1nm. ii) Los electrones excitan el nivel láser superior por medio de impacto electrónico directo, logrando así la inversión de población. iii) El estado de inversión de población es transitorio debido a que el tiempo de vida del nivel de excitación inferior (10μs) es mayor que el del estado superior (47ns), a causa de esto el tiempo de elevación del pulso eléctrico de excitación aplicado al gas debe de ser muy corto. Debido a que la naturaleza transciente de la inversión de población en la molécula de N_2 limita severamente la potencia obtenible con estos láseres [12, 13], únicamente utilizando sistemas basados en osciladores seguidos de amplificadores se logra aumentar la potencia final obtenida [14-17]. Los resultados experimentales aquí reportados fueron obtenidos utilizando un oscilador acoplado a un amplificador como esquemáticamente se muestra en la figura 11. Como ya se mencionó, para extraer la máxima potencia de un láser de

N_2 es necesario tener una alta densidad de excitación durante un periodo breve comparado con el corto tiempo de vida del nivel láser excitado (< 40 *ns*). Por tanto, para que un sistema oscilador-amplificador sea eficiente el pulso óptico producido por el oscilador debe llegar al amplificador en el momento preciso en que el amplificador tiene el máximo de inversión de población, lo cual implica que debe haber una muy buena sincronización entre el disparo del oscilador y del amplificador. Para lograr la sincronización se pueden utilizar líneas de retardo eléctricas u ópticas, la figura 11 muestra el caso de un sistema con sincronización basada en retardo óptico en donde mecánicamente (variando la posición de los espejos) se ajusta la trayectoria del pulso producido en el oscilador antes de entrar al amplificador.

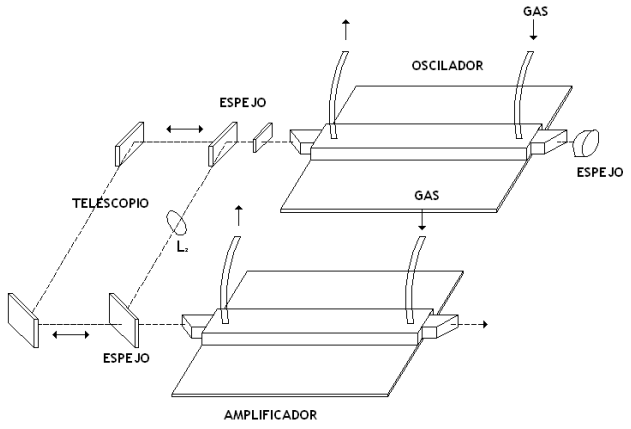

FIGURA 11. Diagrama del sistema oscilador – amplificador construido mostrando la línea óptica de retardo requerida para optimizar la potencia de salida.

La figura 12 muestra el resultado más importante del experimento anterior. En esta gráfica se muestra en el eje de las abscisas, la energía de los pulsos láser producidos por el oscilador (justo antes de entrar al amplificador) y en el eje de las ordenadas la energía de los pulsos láser una vez que han salido del amplificador ya amplificados. Los puntos indican los resultados experimentales y la línea continua el mejor ajuste de estos puntos a la solución de una ecuación logística. Es claro en dicha figura el efecto de saturación en el amplificador. Para pulsos láser con pequeñas energías de entrada, las señales de entrada y salida pueden describirse por medio de una relación lineal, sin embargo a medida que la intensidad de la señal de entrada aumenta se pierde completamente la relación lineal entre entrada y salida pues se entra al régimen de amplificación no-lineal o saturación. Podemos ver que para pulsos láser de entrada con energía mayor de 50 μJ la señal de salida prácticamente (dentro del error experimental) ya no se incrementa pues el amplificador se encuentra en la zona de saturación.

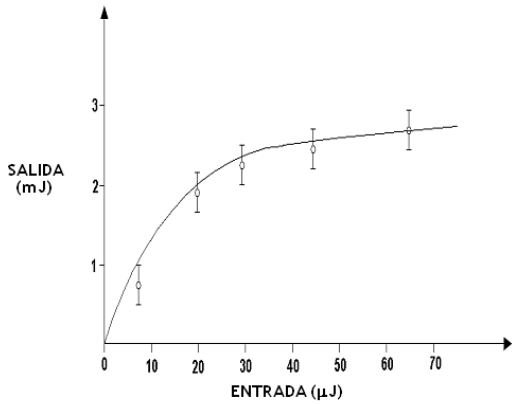

FIGURA 12. Gráfica entrada-salida característica del amplificador láser. Los puntos muestran los resultados experimentales de la energía de los pulsos producidos por el oscilador (entrada) que son inyectados en el amplificador, así como la energía de salida de los mismos pulsos después de haber sido amplificados (salida) en el amplificador. La línea continua muestra el mejor ajuste a los puntos experimentales a la solución de una ecuación logística.

A. Medición del coeficiente de pequeña señal

La intensidad de un pulso láser se mide en Watts y esta se obtiene dividiendo la energía del pulso laser (medida en Joules) entre la duración del pulso láser (medido en segundos). En la zona de saturación vemos en la figura 12 que un pulso inicial de 66 μJ se amplifica casi mil veces pasando a 2.6 *m*J en la salida del amplificador. Dividiendo la energía de los pulsos entre el ancho temporal de los mismos (aproximadamente 14 *ns*), obtenemos una intensidad inicial de 4.71 KW y final de saturación de 0.18 MW. Sustituyendo en la relación (2.4.15) estos valores así como la longitud del amplificador z = 0.3 m, obtenemos:

$$z = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2I_{sat} - I_0}{I_0}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{0.3}\ln\left(\frac{360000 - 4710}{4710}\right).$$

Lo cual nos proporciona un coeficiente de amplificación de pequeña señal de: $\alpha = 8.64\ m^{-1}$, o, $\alpha = 0.0864\ cm^{-1}$. Este valor se encuentra dentro del rango medido por otros autores [21] quienes reportan valores de 0.04, 0.07 y 0.1 cm^{-1} dependiendo de las condiciones de presión del gas.

VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta la guía de trabajo del material empleado en un curso de Calculo Diferencial e Integral de nivel medio superior y primer semestre universitario, para discutir el proceso de amplificación en un láser, que es un tema de indiscutible interés y relevancia científico tecnológica. Se analiza el proceso de amplificación con

saturación y umbral. Finalmente se calcula a partir de resultados experimentales previamente reportados el coeficiente de ganancia de pequeña señal de un láser de nitrógeno formado por un oscilador y un amplificador basados en configuraciones Blumline. Los resultados aquí reportados son un auxilio pedagógico que permiten relacionar de modo claro las ecuaciones que describen la amplificación de un pulso láser en un medio activo amplificador con lo que físicamente ocurre en un láser tanto en la región lineal como en la de saturación.

AGRADECIMIENTOS.

Se agradece al Lic. Victor David Liceaga Sánchez de la División de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de Guanajuato la elaboración de las figuras y a los alumnos de bachillerato del Instituto Euro-Americano de la ciudad de Guanajuato, y del Colegio Nuevo Continente de la ciudad de México, sus comentarios y positiva retroalimentación a este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Einstein, A., *On the Quantum Theory of Radiation*, Physikalishe Zeitschrift **18**, 121 (1917).
[2] Gordon, J. P., Zeiger, H. J., Townes, C. H., *Molecular Microwave Oscillator and new Hiperfine Structure of the Microwave Spectrum of NH_3*, Phys. Rev. **95,** 282-284 (1954).
[3] Gordon, J. P., Zeiger, H. J., Townes, C. H., *The Maser – New Type of Microwave Amplifier, Frequency Standard and Spectrometer,* Phys. Rev. **99**, 1264-1274 (1955).
[4] Bloembergen, N., *Proposal for a New Type Solid State Maser*, Phys. Rev. **104**, 324-327 (1956).
[5] Schawlow, A. L. y Townes, C. H., *Infrared and Optical Masers*, Phys. Rev. **112**, 1940-1949 (1958).
[6] Maiman, T. H., *Stimulated Optical Radiation in Ruby*, Nature **187**, 493–94 (1960).
[7] Maiman, T. H., *Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids I. Theoretical Considerations*, Phys. Rev. **123**, 1445-1450 (1961).
[8] Maiman, T. H., Hoskins, R. H., D'Haenens, I. J., Azawa C. K. y Evtuhov, V., *Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids II. Spectroscopy and Stimulated Emission in Ruby*, Phys. Rev. **123**, 1151-1157 (1961).
[9] Walker, J., *Light and its uses: making and using lasers, holograms, interferometers, and instruments of dispersion*, (Scientific American, San Francisco, 1980), p. 117.
[10] Fernández, M., Silva, A., Iturbe, D., Haro, E., Escobar, L., Habichayn, P., García, A., Cudney, R., García, C. y González, E., *Diseño y construcción de láseres de nitrógeno molecular*, Rev. Mex. Fis. **38**, 588 (1991).
[11] Villagrán, M., Argote, M. y Domínguez-Tagle, C., *Láseres de N_2 para fines didácticos*, Rev. Mex. Fis. **40,** 935 (1993).
[12] Pinto, V. J., Aboites, V., de la Rosa, J., *High efficient nitrogen laser*, Rev. Mex. Fis. **37**, 391–395 (1991).
[13] Vazquez, A. y Aboites, V., *High-efficiency low-pressure Blumlein nitrogen laser*, IEEE Journal of Quantum Electronics **29**, 2364-2370 (1993).
[14] Pinto, V. J., Aboites, V., De la Rosa, J., N_2 *MOPA system with coaxial laser amplifier*, Rev. Mex. Fis. **37**, 665–670 (1991).
[15] Sandoval, J., Apolinar, A., Pinto, V. J. y Aboites, V., *Perfiles transversales de un sistema MOPA de N_2*, Rev. Mex. Fis. **43**, 381-387 (1997).
[16] Kagawa, K., Obayashi, H. K., y Shikane, M. I., *Oscillator-Amplifier System in N_2 Laser Using the Pressure-Dependent Formative Time-Lag of Discharge*, Jap. J. Appl. Phys. **18**, 2187 (1979).
[17] Sánta, I., Szatmári, S., Német, B. y Hebling, J., *Investigation of TEA-TE nitrogen laser system*, Opt. Comm. **41**, 59-60 (1982).
[18] Aboites, V., Martínez, F. y Jiménez, M., *Laser Amplification Experiment and Electronic Simulation*, Rev. Mex. Fis. **53**, 168-173 (2007).
[19] Kunabenchi, R. S., Gorbal, M. R. y Savadatti, M. I., *Nitrogen Lasers*, Progress in Quantum Electronics **9**, 259-329 (1984).
[20] Aboites, V., *Lasers, Handbook of Optical Engineering*, Ed. Marcel Dekker, 719 (1999).
[21] Salamina, A., Parvin, P., Zare, A. y Sadighi, R., *The small signal gain and the saturation intensity measurement of the nitrogen-ion laser*, Optics & Laser Technology **28**, 207-211 (1996).