Resolviendo $\frac{dv}{dt} = \delta(t), v(0) = 0$: Una propuesta pedagógica desde la física y la matemática avanzada

ISSN 1870-9095

Ranferí Gutiérrez[1], María Sigüenza[2]
[1]Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias y Humanidades. Universidad del Valle de Guatemala, 18 Av. 11-95 zona 15, Guatemala, Guatemala, 01015.
[2]Departamento de Ciencias Básicas, Área de Matemática, Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Landívar. Campus San Francisco de Borja, S. J. Vista Hermosa III, zona 16, Guatemala, Guatemala, 01016.

E-mail: mrgutierrez@uvg.edu.gt

(Recibido el 28 de mayo de 2025, aceptado el 16 de agosto de 2025)

Resumen

Este artículo presenta una estrategia didáctica para apoyar a los estudiantes en la comprensión del problema de valor inicial $dv/dt = \delta(t), v(0) = 0$ y su solución $v(t) = 1$, donde la Delta de Dirac $\delta(t)$ aparece como parte de la ecuación diferencial. La propuesta consiste en interpretar el problema en términos de una situación física que involucra a una partícula inicialmente en reposo, sometida a una fuerza impulsiva. Mediante el análisis de un problema elemental de la mecánica clásica—en el que una fuerza conocida actúa durante un intervalo de tiempo finito—los estudiantes pueden comprender el papel del impulso y cómo este se traduce en un cambio de velocidad. A partir de esta base, se ofrece una interpretación intuitiva de la función delta de Dirac como el límite de una gaussiana normalizada, y se aplica la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial. La interpretación propuesta ayuda a cerrar la brecha entre conceptos matemáticos abstractos y la intuición física, ofreciendo una forma significativa para que los estudiantes comprendan soluciones que involucran a la delta de Dirac.

Palabras clave: Movimiento unidimensional, leyes de Newton, ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales, función escalón, transformada de Laplace, función delta de Dirac.

Abstract

This article presents a didactic strategy to support students in understanding the initial value problem $dv/dt = \delta(t), v(0) = 0$, and its solution $v(t) = 1$, where the Dirac delta function appears as part of the differential equation. The approach consists of interpreting the problem in terms of a physical situation involving a particle initially at rest, subjected to an impulsive force. By first analyzing an elementary problem in classical mechanics—where a known force acts over a finite time interval—students can comprehend the role of impulse and how it translates into changes in velocity. The article builds on this foundation to provide an intuitive understanding of the Dirac delta function as the limit of a normalized Gaussian, and applies Laplace transforms to solve the differential equation. The proposed interpretation helps bridge the gap between abstract mathematical concepts and physical intuition, offering a meaningful way for students to grasp solutions involving the Dirac delta.

Keywords: One-dimensional motion, Newton's laws, ordinary differential equations with initial conditions, step function, Laplace transform, Dirac delta function.

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los retos más frecuentes que existen al enseñar ecuaciones diferenciales, como en cualquiera otra rama de la matemática, es que los estudiantes tienden a concentrarse únicamente en el manipuleo algebraico necesario para resolver dichas ecuaciones, pero prestan muy poca o ninguna atención a la interpretación de sus soluciones. Y en ocasiones algunas ecuaciones diferenciales se convierten en una serie de símbolos incomprensibles pero que igualmente no importan las interpretaciones ya que el interés del estudiante es aprender, en el mejor de los casos, la mecánica para resolver la ecuación, aunque no comprenda qué está haciendo ni lo que significa lo que obtiene como resultado.

Un ejemplo de lo expuesto anteriormente es el caso de las ecuaciones diferenciales que involucran a la función delta de Dirac $\delta(t)$ la cual ya de por sí es bastante extraña para los estudiantes dada su peculiar definición y más aún sus extrañas propiedades.

En este artículo se propone una estrategia para dar al estudiante un significado intuitivo, basado en física elemental, del problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = \delta(t), v(0) = 0 \qquad (1)$$

así como de su solución

$$v(t) = 1 \qquad (2)$$

Con el objetivo de alcanzar una comprensión más significativa del problema de valor inicial (1) y su solución (2), se propone comenzar con el análisis de un caso elemental de la física general. Este problema servirá como base para establecer una analogía que facilite al estudiante la interpretación física e intuitiva de la ecuación diferencial planteada y su solución.

La estructura del artículo es la siguiente: en la Sección II se exponen los fundamentos teóricos necesarios y se analiza el problema físico que servirá de apoyo conceptual. En la Sección III se presenta la resolución del problema de valor inicial mediante el uso de la transformada de Laplace, y se interpreta la solución obtenida utilizando el marco físico previamente discutido. Finalmente, en la Sección IV se exponen las conclusiones del estudio.

II. MARCO TEÓRICO

En esta sección se presentan brevemente los conceptos y resultados que el estudiante debe conocer para resolver el tipo de problema de aplicación discutido en este artículo.

A. Primera ley de Newton

Las leyes de Newton fueron establecidas por Sir Isaac Newton en 1687 [1]. La primera ley de Newton establece que si sobre un cuerpo no actúa fuerza neta y el cuerpo está en reposo, éste permanecerá en reposo, o si el cuerpo está moviéndose a velocidad constante, continuará haciéndolo así indefinidamente.

B. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton establece que la suma vectorial de las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ ejercidas sobre un cuerpo de masa m es igual al producto de la masa del objeto por su aceleración $\vec{a}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a} \qquad (3)$$

Es importante recordar que las leyes de Newton son válidas en marcos de referencia inerciales, es decir, en marcos de referencia en los cuales se cumple la Primera ley de Newton.

C. Cantidad de movimiento e Impulso

Un objeto de masa m que en un instante dado se nueve con velocidad $\vec{v}$ tiene asociada una cantidad de movimiento $\vec{p}$ definida como [1]

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (4)$$

Cuando un objeto es sujeto a una fuerza durante un intervalo de tiempo entonces, de acuerdo con la segunda ley de Newton (3), se produce una aceleración y como consecuencia su cantidad de movimiento (4) cambiará también. Si la masa del objeto es constante, entonces el cambio en la cantidad de movimiento será debido al cambio en su velocidad. Se dice que la fuerza ha producido sobre el objeto un impulso $\vec{I}$, definido [1] como el cambio en la cantidad de movimiento del objeto durante el intervalo de tiempo en que la fuerza fue aplicada:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_o, \qquad (5)$$

donde $\vec{p}_o$ y $\vec{p}_f$ se refieren a la cantidad de movimiento que tiene el objeto en el instante $t = 0$ y en el instante $t = T$ cuando la fuerza deja de actuar.

Si la fuerza $\vec{F}$ es variable, el impulso se obtiene a partir de

$$\vec{I} = \int_0^T \vec{F} dt \qquad (6)$$

Si la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el objeto es constante, y suponemos que actúa horizontalmente, entonces (6) se reduce a la sencilla expresión

$$I = FT, \qquad (7)$$

la cual, al combinarse con (5) establece que cantidad de movimiento final del objeto es

$$p_f = FT + p_o \qquad (8)$$

A manera de ejemplo, suponga que una caja de 1.00 kg, inicialmente en reposo, recibe la acción de una fuerza horizontal constante dirigida hacia la derecha, de magnitud 2.00 N, la cual actúa durante 3.00 s. Supondremos la dirección positiva hacia la derecha. Vea la figura 1.

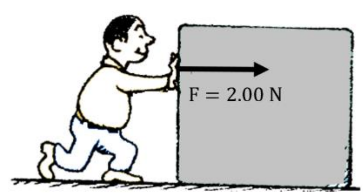

FIGURA 1. Una caja es empujada durante 3.00 s aplicándole una fuerza de magnitud constante dirigida hacia la derecha. La caja parte del reposo.

De acuerdo con (7) la caja ha recibido un impulso I hacia la derecha de magnitud

$$I = (2.00)(3.00) = 6.00\ N - s, \qquad (9)$$

y de (8), su cantidad de movimiento final tiene una magnitud

$$p_f = 6.00 + 0.00 = 6.00\ N \cdot s, \qquad (10)$$

y está dirigida hacia la derecha.

Finalmente, de (4), su velocidad en el instante que la fuerza deja de actuar es

$$v_f = \frac{6.00}{1.00} = 6.00 \text{ m/s}, \tag{11}$$

dirigida hacia la derecha, por lo que, de acuerdo con la primera ley de Newton, una vez que la fuerza deja de actuar, la caja continuará moviéndose indefinidamente con esa velocidad.

Otra forma conveniente para los fines de este artículo es observar que, de acuerdo con (7), se puede interpretar el impulso I que la fuerza F proporciona a una masa m como el área encerrada entre el eje horizontal t y la gráfica de F en el intervalo $0 \leq t \leq T$. En el ejemplo descrito arriba de la caja, significa que el impulso $I = 6.00\ N - s$ es justamente el valor del área del rectángulo mostrado en la Figura 2.

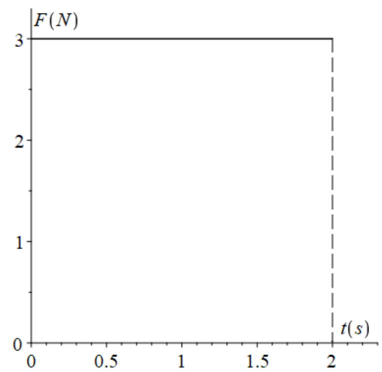

FIGURA 2. El impulso impartido a la caja de la Figura 1 puede obtenerse a partir del área del rectángulo mostrado en la figura.

En una situación general en la que la fuerza $\vec{F}$ aplicada es variable, el impulso impartido se obtiene de (6) y puede interpretarse también como el área encerrada entre el eje horizontal t y la gráfica de la fuerza $\vec{F}$ en el intervalo $0 \leq t \leq T$. La Figura 3 ilustra lo indicado anteriormente para el caso en que la fuerza aplicada $\vec{F}$ es completamente horizontal y está dirigida hacia la derecha, considerando la dirección positiva hacia la derecha.

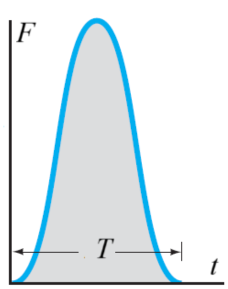

FIGURA 3. Cuando la fuerza aplicada es variable, el impulso impartido sigue siendo igual al área encerrada mostrada en la figura y se obtiene calculando la integral (6).

C. La función delta de Dirac $\delta(t)$

Con el fin de introducir la función delta de Dirac $\delta(t)$ comenzamos considerando la conocida función de distribución de probabilidad gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{12}$$

donde μ es la media, $\sigma > 0$ la desviación estándar de la distribución y $-\infty < x < \infty$. La distribución de probabilidad (12) está normalizada a la unidad, es decir, el área encerrada bajo la curva es igual a uno, independientemente de μ y de σ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \tag{13}$$

Vea la Figura 4 para el caso en que (13) tiene media $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, conocida como la distribución normal estándar.

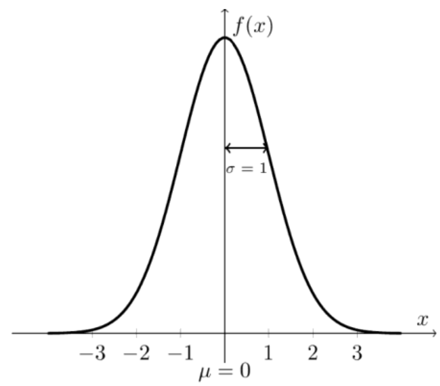

FIGURA 4. Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, (12) se conoce como distribución normal estándar. En este caso se sigue cumpliendo la condición de normalización (13).

Suponga que en (12) se disminuye el ancho de la distribución, es decir, se disminuye el valor de la desviación estándar σ. En orden que la condición de normalización (13) siga cumpliéndose, la altura de la distribución de probabilidad gaussiana debe incrementarse, tal como se ilustra en la Figura 5.

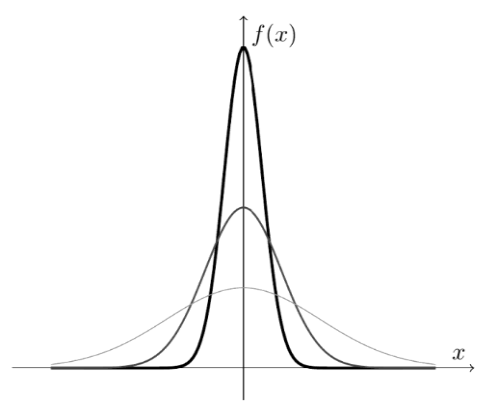

FIGURA 5. Conforme el ancho de la distribución de probabilidad gaussiana disminuye, su altura debe incrementarse para que la condición de normalización (13) se cumpla.

Supongamos ahora que el ancho σ en la Figura 5 fuera cada vez más cercano a cero, y por tanto su altura se hiciera cada vez mayor. Si ahora se supone que el eje vertical representa una fuerza variable y el eje horizontal representa el tiempo, entonces en analogía con la Figura 3, salvo el hecho que la distribución gaussiana está centrada en $t = 0$, se tiene el caso de una fuerza variable que proporciona un impulso de 1 N-s dado que el área bajo la curva en este supuesto gráfico $F - t$ es igual a uno por la condición de normalización (13).

La función delta de Dirac, introducida por el físico Paul Dirac [2,3,4], se utiliza, entre otras aplicaciones, para describir fuerzas impulsivas de corta duración, como las que se presentan, por ejemplo, cuando una raqueta de tenis golpea a la pelota, o cuando un palo de golf golpea a una pelota, tal como se ilustra en la Figura 6.

FIGURA 6. La función delta de Dirac $\delta(t)$ se emplea en la representación de fuerzas impulsivas, es decir, fuerzas de gran magnitud que actúan en intervalos de tiempo muy cortos, como es el caso que se ilustra en esta figura cuando un palo de golf golpea a una pelota.

La función delta de Dirac $\delta(t)$ está definida como

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \tag{14}$$

Y aunque estrictamente hablando no es una función en el sentido que usualmente se habla en los cursos de precálculo o cálculo, se le seguirá llamando "función" en el contexto de este artículo.

La función delta de Dirac δ(t) se caracteriza por una propiedad fundamental que resulta especialmente útil en el contexto físico que nos interesa: aunque su valor es cero en todos los puntos excepto en $t = 0$, el área bajo su curva es igual a uno. Esta propiedad, expresada matemáticamente como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{15}$$

permite interpretarla como una "fuerza idealizada" que actúa durante un tiempo extremadamente corto, pero que genera un impulso finito de magnitud 1 N·s. Esta idea se conecta naturalmente con la noción de impulso analizada anteriormente, donde el área bajo la curva Fuerza vs. Tiempo representa el impulso total aplicado a un objeto.

D. La transformada de Laplace

La transformada de Laplace recibe su nombre en honor a Pierre Simon Laplace, aunque fue Euler quien probablemente enunció primero su definición. Dicha transformada permite, al menos en principio, resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales conocidas, convirtiéndolas en ecuaciones algebraicas. Mayores detalles sobre el método pueden ser encontrados en [2,3,4].

Suponga que $f(t)$ es una función definida para toda $t \geq 0$. La transformada de Laplace de f es la función F definida como sigue:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{16}$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge [2,3,4].

Existen tablas que muestran cómo se transforman diferentes funciones $f(t)$ al aplicarles (16). En particular, interesa la transformada de Laplace para $f'(t)$ [2,3,4]:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{17}$$

donde $f(0)$ corresponde al valor de $f(t)$ cuando $t = 0$.

Otro resultado importante para este artículo es [2,3,4]:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{18}$$

También es posible hablar de la transformada inversa de Laplace, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, la cual permite, en principio, conocida una función F, encontrar la función f a la cual corresponde:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{19}$$

Resulta de gran utilidad en este artículo el hecho de que

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1 \tag{20}$$

III. ESTUDIO DE CASO

Se considera a continuación la situación en la que un objeto en reposo es golpeado en $t = 0$ por una fuerza impulsiva muy grande y de corta duración, como la que se ilustra en la Figura 6. Se supondrá una fuerza que proporcione un impulso de 1.00 N-s.

Suponga que un objeto de masa $m = 1.00$ kg se encuentra en reposo y justo en $t = 0$ s se le aplica una fuerza impulsiva $\delta(t)$. La segunda ley de Newton (1), con $a = dv/dt$ queda expresada como el problema de valor inicial (1)

$$\frac{dv}{dt} = \delta(t),\ v(0) = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial en (1) y los resultados (17), (18, (19) y (20), con $f'(t) = dv/dt$ y $v(0) = 0$, se obtienen los siguientes resultados equivalentes entre sí:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$$

$$sF(s) - v(0) = 1, v(0) = 0$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (21)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

Y, finalmente,

$$v(t) = 1, t \geq 0 \quad (22)$$

Donde se ha utilizado el hecho que $v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Si retomamos el análisis del inciso C del Marco Teórico, podemos entender con mayor claridad lo que ocurre en este caso. Como la masa de la partícula es de 1.00 kg y estaba inicialmente en reposo, al recibir un impulso de 1.00 N·s, su velocidad justo después de la acción de la fuerza será $v_f = 1.00$ m/s, en dirección hacia la derecha. Luego, gracias a la primera ley de Newton, sabemos que esa velocidad se mantendrá constante a partir de ese momento ($t \geq 0$), lo cual concuerda perfectamente con la solución matemática obtenida en la ecuación (22).

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone, como estrategia para que el estudiante comprenda el significado del problema de valor inicial (1)

$$\frac{dv}{dt} = \delta(t), v(0) = 0,$$

y el porqué de su solución (2)

$$v(t) = 1$$

iniciar primero analizando un problema elemental de física general, a saber, el de un objeto que se encuentra inicialmente en reposo y al cual se le aplica una fuerza constante durante un cierto intervalo de tiempo. El cálculo de la velocidad del objeto, una vez que ha dejado de actuar la fuerza, es sencillo y la aplicación de la primera ley de Newton permite comprender el posterior comportamiento del objeto una vez que la fuerza cesa. El análisis debe incluir la discusión del papel del gráfico Fuerza vs. tiempo, así como la interpretación del área bajo la curva como el impulso impartido al objeto.

Posteriormente se propone introducir al estudiante en la comprensión intuitiva de la función delta de Dirac a partir de un análisis sobre la función de distribución gaussiana normalizada y cómo se ve afectada su forma a medida que se disminuye su ancho σ. Finalmente se propone mostrar al estudiante la propiedad (15) de la función delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

El método de solución propuesto para el problema de valor inicial (1) es el de la Transformada de Laplace.

Con los conceptos básicos descritos anteriormente el estudiante puede interpretar el problema de valor inicial (1) como uno en el que, a una masa de 1.00 kg, inicialmente en reposo, se le aplica una fuerza impulsiva muy grande que dura un intervalo de tiempo extremadamente corto pero que proporciona un impulso finito de valor conocido a dicha masa.

A partir del análisis sencillo presentado en la Sección II, es posible deducir que, si una fuerza constante de 1.00 N actúa durante 1.00 s sobre una masa inicialmente en reposo, el impulso generado será de 1.00 N·s. En consecuencia, la masa alcanzará una velocidad final de 1.00 m/s, dirigida hacia la derecha, justo al terminar la acción de la fuerza. Esta situación nos permite interpretar la función delta de Dirac, utilizando la propiedad (15), como una "fuerza idealizada" que actúa en un tiempo extremadamente corto pero que produce un impulso de 1 N·s. Por lo tanto, al cesar esta fuerza, y acorde a la primera ley de Newton, el objeto debe continuar moviéndose con velocidad constante, tal como lo indica la solución $v(t) = 1, t \geq 0$.

Aunque por razones de extensión no se ha abordado en este artículo, es posible generalizar fácilmente el análisis al caso en el que un objeto permanece en reposo durante un intervalo de tiempo $0 \leq t < c$, y al cual se le aplica una "fuerza impulsiva" representada por $\delta(t-c)$ justo en $t = c$. Mediante un análisis elemental, similar al desarrollado anteriormente se puede comprender con claridad el comportamiento físico del sistema en esta situación. Posteriormente, esta comprensión permite interpretar de forma natural la solución $v(t) = u(t-c)$, correspondiente al problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = \delta(t-c), v(0) = 0,$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario [2,3,4].

Finalmente, este artículo muestra que es posible apoyarse en situaciones físicas elementales como una estrategia efectiva para facilitar en los estudiantes una comprensión más intuitiva y significativa de ciertas ecuaciones diferenciales, especialmente aquellas que involucran la función delta de Dirac. Esta función, por su definición poco convencional y sus propiedades inusuales, suele resultar extraña y difícil de asimilar, ya que no se parece a ninguna de las funciones que los alumnos han estudiado previamente en cursos de precálculo o cálculo.

REFERENCIAS

[1] Resnick R., Halliday D., Krane D. *Física Volumen 1* 4ª Edición. Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V. 71-75, México 2000.

[2] Edwards C. y Penney D. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* 4ª Edición. Pearson Educación, México 2009.
[3] Zill D. y Cullen M. *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera.* 7ª Edición. Cengage Learning, México 2009.
[4] Nagle R., Saff E. y Snider A. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* 4ª Edición. Pearson Educación, México 2005.